АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ

МАТЕМАТИКА

РЕФЕРАТЫ

4492—5265

*

№ 6 1957

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
РЕФЕРАТИВНОГО ЖУРНАЛА

Н. В. Агеев, В. В. Алпатов, Г. Д. Афанасьев, Б. С. Балакшин, В. Ю. Ломоносов, А. И. Михайлов (председатель), С. М. Никольский, К. Ф. Огородников, В. В. Покишевский, Л. И. Седов, В. В. Серпинский, С. А. Шиканов (зам. председателя), Э. В. Шпольский

СОДЕРЖАНИЕ

Общие вопросы 1
История математики. Биографии . . . 2
Основания математики и математическая логика 4
Теория чисел 7
Алгебра 13
Многочлены и линейная алгебра . . . 13
Группы 15
Поля, кольца и структуры 19
Алгебраическая теория схем связи и управления . . . . . —
Топология 22
Теория функций действительного переменного 26
Теория множеств . . . . . —
Приближение функций полиномами и их обобщениями 28
Теория функций комплексного переменного 32
Дифференциальные уравнения 48
Обыкновенные дифференциальные уравнения 48
Уравнения в частных производных . . 60
Приложения к физике, технике и естественным наукам 66
Интегральные уравнения 72
Приложения интегральных уравнений . . . —
Вариационное исчисление 73
Анализ (другие вопросы) 75
Числовые ряды 78
Специальные функции 82
Интегральные преобразования и операционное исчисление 83
Приложения общих методов математического анализа . . . . . —
Функциональный анализ 85
Теория вероятностей 96
Математическая статистика 99
Теория игр и математическая экономика 102
Применение теоретико-вероятностных и статистических методов 103
Геометрия 106
Приложения геометрии 108
Проективная синтетическая геометрия . 108
Геометрия Лобачевского 109
Начертательная геометрия 110
Алгебраическая геометрия 111
Дифференциальная геометрия трехмерного пространства 113
Геометрия n-мерного пространства. Теория относительности 117
Метрические методы в геометрии . . . 123
Геометрия выпуклых многообразий . . . 124
Численные и графические методы 125
Таблицы 132
Вычислительные машины и математические приборы 133
Использование вычислительных устройств и их элементов в технике. 142
Новые книги, поступившие в редакцию . . . —
Авторский указатель 145

Адрес редакции: Москва Д-219, Балтийский пос., д. 42-Б

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ
МАТЕМАТИКА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР *С. М. Никольский*, УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ *М. К. Керимов*,
РЕДАКТОРЫ ОТДЕЛОВ: *П. С. Александров, И. Н. Векуа, А. Н. Колмогоров, Ю. В. Линник, А. И. Маркушевич, В. В. Немыцкий, С. М. Никольский, П. С. Новиков, Д. Ю. Панов, М. М. Постников, Н. В. Смирнов, С. П. Фиников*

Рефераты 4492—5265 **№ 6** **Июнь 1957 г.**

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ

4492. Заседания Ленинградского общегородского математического семинара (14 февр.—5 июня 1956 г.), Успехи матем. наук, 1956, 11, № 6, 247

4493. Четвертый съезд румынских математиков (Al IV-lea congres al matematicienilor romîni), Gaz. mat. şi fiz., 1956, B7, № 10, 533—535 (рум.)

Информационное сообщение о 4-м съезде румынских математиков, проходившем в Бухаресте 27 мая—4 июня 1956 г. Две групповые фотографии делегатов. А. Н. Гливич

4494. 4-й съезд чехословацких математиков. Новак Иосеф, Чехосл. матем. ж., 1956, 6, № 1, 140—142

Информация о 4-м съезде чехословацких математиков, проходившем в Праге 1—8 сентября 1955 г. (см. также РЖМат, 1956, 7814). К. А. Рыбников

4495. Труды съезда научных обществ [Израиля]. Проходил в Рамат-Гане 19—22 марта 1956 г. (Proceedings of the Convention of Scientific Societies. Held at Ramat Gan, March 19—22, 1956), Bull. Res. Council Israel, 1956, A5, № 2—3, 191—221 (англ.)

4496. Выбор математических сочинений. Бельгодер (Choix d'ouvrages mathématiques. 4 éd. Belgodère Paul), Docum. math., 1955, № 27, 14 p. (франц.)

Рекомендательный список математической литературы (преимущественно на французском языке) для преподавателей математики, университетских и институтских библиотек. Разделы: 1) Энциклопедии, сочинения общего характера; 2) Арифметика и алгебра; 3) Анализ; 4) Геометрия; 5) Кинематика и механика; 6) Теория вероятностей; 7) Прикладная математика; 8) Таблицы; 9) Математические развлечения; 10) История математики. М. К. Керимов

4497. Адреса научных учреждений, с которыми Французское математическое общество поддерживает связь. Бельгодер, Лардё (Adresses d'expédition pour affichage, des convocations et informations de la Société mathématique de France. 4 éd., Belgodère Paul, Lardeux Denise), Docum. math., 1956, № 31, 8 p. (франц.)

4498. Периодические издания, представленные в библиотеке института имени Анри Пуанкаре. Эстев (Etat des périodiques figurant à la bibliothèque de l'Institut Henri Poincaré. Estève Madeleine), Docum. math., 1955, № 30, 27 p. (франц.) .

Список имеющихся в библиотеке института им. Анри Пуанкаре периодических изданий по математике и ее приложениям, с указанием изменений в названиях журналов, происшедших со времени издания первого тома. М. К. Керимов

4499. Перечень периодических изданий, регулярно получаемых библиотекой института имени Анри Пуанкаре. Эстев (Liste des titres des périodiques régulièrement reçus par la bibliothèque de l'Institut Henri Poincaré (Cabinet du département des sciences mathématiques). Estève Madeleine), Docum. math., 1955, № 29, 14 p. (франц.)

4500. Роль моделей в преподавании математики и механики в высшей школе. Манджерон, Брайер (Rolul modelelor în predarea matematicii şi mecanicii în învăţămînt. Mangeron D., Braier A.), Gaz. mat. şi fiz., 1956, A8, № 8, 393—396 (рум.; рез. русс., франц.)

В статье говорится о применении моделей при изучении теоретической механики в Ясском политехническом институте. Авторы указывают, что применение моделей в преподавании в Румынии ведет начало от работ проф. Миллера в 1910 г. В настоящее время новые модели разрабатываются в семинаре проф. А. Хаймовича. Ставится вопрос о широком обмене опытом этой работы. А. Н. Гливич

4501. К вопросу о новых направлениях в преподавании математики. Вьола (Verso nuovi indirizzi nell'insegnamento della matematica. Viola Tullio), Archimede, 1956, 8, № 4—5, 154—163 (итал.)

Автор излагает свой взгляд на пути изжития кризиса преподавания математики в итальянской школе, в которой передовые идеи Энрикеса, Клейна и Пуанкаре не находят ныне последователей. Он считает необходимым возродить основанный Энрикесом национальный институт истории науки в Риме, ввести в университетах преподавание истории математики, элементарной математики, психологии и философии для будущих учителей. И. Я. Депман

4502. К методологии и дидактике математики. Гарсиа-Руа (Sobre metodologia y didactica matematica. García Rúa J.), Gac. mat., 1955, 7, № 7—8, 177—180 (исп.)

Сообщаются общие требования к дидактике преподавания математики в школе, высказанные в секции преподавания на амстердамском конгрессе математиков, в частности требование, чтобы будущие преподаватели университета проходили практику в школе. Для школы рекомендуется линейное, а не концентрическое прохождение математических дисциплин. И. Я. Депман

4503. Современные точки зрения в дидактике элементарной математики. Паскуаль-Ибарра (Puntos de vista modernos en la didáctica de las matemáticas elementales. Pascual Ibarra Jose R.), Gac. mat., 1956, 8, № 1, 8—11 (исп.)

Указывается, что международная комиссия по улучшению преподавания математики в августе 1945 г. на конгрессе в Оостербеке (Голландия) обсуждала

возможность введения в курс средней школы некоторых понятий современной алгебры и топологии. Предложения опубликованы в журнале Enseign. math. (1955). Автор показывает, как можно при обучении разложению чисел на простые множители познакомить учащихся с кругами Венна и графически иллюстрировать основные понятия теории множеств. И. Я. Депман

4504. **Изучение арифметики при помощи раскрашенных пособий. Метод Кюизенера. Гаттенью** (El estudio de la aritmética con ayuda del color asociado a la longitud. El método «Cuisenaire». Gattegno C.), Gac. mat., 1956, 8, № 2—3, 57—64

Рассматриваются идеи бельгийского учителя Кюизенера (G. Cuisenaire), изложенные в его книге «Les nombres en couleur» (Tamines, 1954) и в книге Кюизенера и автора (Cuisenaire G. Gattegno C., Numbers in colour, London, 1955). Указывается, что «эта новая техника преподавания элементарной математики дала исключительные результаты во всей Европе».

И. Я. Депман

4505. **Несоизмеримые количества и действительные числа. Гарсиа-Прадильо** (Cantidades inconmesurables y números reales. García Pradillo Julio), Gac. mat., 1956, 8, № 1, 6—7 (исп.)

Указывается, как без пользования пифагоровой теоремой можно доказать, что допущение соизмеримости стороны и диагонали квадрата приводит к невозможному равенству. И. Я. Депман

4506 К. **Четвертый год математической олимпиады. Зелинка** (Čtvrtý ročník matematické olympiady. Zelinka Rudolf. Praha, Stani pedagogické nakladatelstvi 1956, 211s., ill., 5, 52 Kčs) (чеш.)

В книге содержится информация о четвертом общегосударственном математическом соревновании учеников одиннадцатилеток и техникумов, состоявшемся в 1954/55 уч. году. Даны подробные решения всех 84 заданных задач. J. Sedláček

4507 К. **Собрание математических статей (в пяти томах). Т. 1. Вариационное исчисление. Каратеодори** (Gesammelte mathematische Schriften (5 Bde). Bd. I, Variationsrechnung. Carathéodory Constantin. XXI, 426 S., Fig., I Titelb. München, Beck, 1954, 42. — DM) (нем.)

Книга является первым томом собрания сочинений автора. В нее вошли двадцать статей по вариационному исчислению. Статьи распределены по трем разделам: 1) разрывные решения (3 статьи); 2) общая теория (12 статей); 3) кратные интегралы (5 статей). Одна статья второго раздела была написана в 1932 г. и публикуется впервые. В этот раздел включена также статья автора, составляющая четвертую главу книги Франка и Мизеса (Frank, von Mises, Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, 1930, Vieweg, Braunschweig). Все статьи напечатаны на том языке, на котором они появились в печати впервые. Исключение составляет одна статья из раздела 3, которая переведена на немецкий язык с греческого языка. Имеется фотография автора. М. К. Керимов

4508 К. **Высшая математика. Математический анализ, аналитическая геометрия, теория вероятностей. Мазотти** (Matematica generale. Analisi matematica, geometria analitica, teoria della probabilità. 6 ed. Masotti Arnaldo. Milano, Ed. vita e pensiero, 1955, xii, 521 p., 3500 L.), Bibliogr. ital., 1956, № 654—655, 497 (итал.)

4509 К. **Математическая смесь. Литлвуд** (A mathematician's miscellany. Littlewood J. E. London, Methuen and Co., 1953, VII, 136 p., 18 diagrams, 15 s.) (англ.)

4510 К. **О математике и геометрии в новом свете. Метаморфозы и катастрофы истории Земли. Мериан** (Von Matematik und Geometrie in neuer Sicht. Die Metamorfose und Katastrofen d. Erdgeschichte. Merian Paul. Basel, «Mathäus Merian», 1955, 31 S., 2.80 sfr.), Dtsch. Nationalbibliogr., 1956, A, № 12, 857 (нем.)

4511 Ж. **«Теория вероятностей и ее применения».** М., АН СССР. Т. I. 1956, квартальный, 45 р. за год.

В 1956 г. начал выходить новый математический журнал «Теория вероятностей и ее применения», издаваемый Академией наук СССР (гл. редактор акад. А. Н. Колмогоров). Журнал печатает «оригинальные статьи и краткие сообщения по теории вероятностей, общим вопросам математической статистики и применениям теории вероятностей в естествознании и технике». Появление специального журнала отвечает прежде всего необычайно широкому развитию творческой работы как в области чисто теоретической проблематики, так и, в особенности, в многочисленных приложениях теории вероятностей. Идея организации этого журнала принадлежит советским математикам и многим ученым стран народной демократии. В первых номерах журнала нашли себе место труды советских, венгерских, румынских и польских математиков; помещена статья шведского ученого Крамера. Есть основания полагать, что в журнале примут также участие и прогрессивные ученые других стран. В связи с этим признано целесообразным печатать статьи иностранных ученых на одном из четырех языков по выбору автора (русском, английском, немецком, французском). Русские статьи сопровождаются резюме на иностранном языке. Н. В. Смирнов

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ. БИОГРАФИИ

4512. **О некоторых задачах истории математики. Гнеденко Б. В.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 100-101

4513. **Из истории аксиоматического метода. Яновская С. А.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 105

4514. **О новых работах в СССР по истории математики. Юшкевич А. П., Рыбкин Г. Ф.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 104—105

4515. **К вопросу о происхождении наших цифр. Боев Г. П.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 165

4516. **Вавилонское квадратное уравнение. Берриман** (The Babylonian quadratic equation. Berriman A. E.), Math. Gaz., 1956, 40, № 333, 185—192 (англ.)

Излагается ход решения нескольких вавилонских задач, эквивалентного решению квадратных уравнений (из сборников Нёйгебауэра). Представляет интерес замечание автора, что сумерийский дюйм (shushi — у автора неправильно shusi), равный 0,66 дюйма, встречается в средневековой Европе (наиболее употребительный фут равнялся в точности 20 shushi) и в Мохенджо-даро (новооткрытая древнеиндийская доарийская культура в долине Инда), где на фрагментах раковины имеются деления, в точности равные 2 сумерийским shushi. И. Н. Веселовский

4517. **О некоторых нерешенных вопросах истории античной математики. Кольман Э. Я.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1. М., АН СССР, 1956, 232

4518. **Трактовка некоторых проблем математического анализа в древнегреческой математике. Башмакова И. Г.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1. М., АН СССР, 1956, 228—229

4519. **Индийская астролябия XVI века. Смирнов С. В.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1. М., АН СССР, 1956, 235—236

4520. Переписка Леонарда Эйлера. Смирнов В. И., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 103

4521. Исследования Леонарда Эйлера в области дифференциальных уравнений и их приложений. Симонов Н. И., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2, М., АН СССР, 1956, 102—103

4522. Работы Эйлера по теории цепных дробей. Хованский А. Н., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1. М., АН СССР, 1956, 236—237

4523. Юношеские годы Леонарда Эйлера и его первые научные работы. Михайлов Г. К., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1. М., АН СССР, 1956, 232

4524. Связи Якоби с русскими математиками. Гайдук Ю. М., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 165—166

4525. Псевдонимы Бошковича. Херцигония (Boškovićevi pseudonimi. Hercigonja Mira), Весн. Друштва матем. и физ. Нар. Реп. Србије, 1955, 7, № 1—2, 109—118 (хорв., рез. франц.)

Дубровникский (Рагузский) математик, физик, астроном, Руджер Бошкович (1711—1787) писал под псевдонимами Nicolaus Riccius Romanus (1742), Marchio Andreas Archetti (1748) и Numenius Anigraeus (1753).

Автор устанавливает, что эти псевдонимы представляют анаграммы фраз «Рагузинец божьей милостью», «Икар славянского происхождения» и подобных, в которых Бошкович подчеркивает свою славянскую национальность. Библ. 15 назв. И. Я. Депман

4526. Н. И. Лобачевский. Норден А. П., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 101—102

4527. История интерпретаций геометрии Лобачевского. Розенфельд Б. А., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1. М., АН СССР, 1956, 234

4528. Творчество Яна Снядецкого в математических и естественных науках. Дробот (Dzieło Jann Śniadeckiego w naukach matematycznych i przyrodniczych. Drobot S.), Roczn. Polsk. towarz. mat. Ser. II — Wiadom. mat., 1955, 1, № 1, 95—111 (польск.)

Несколько измененное предисловие к «Избранным научным трудам Яна Снядецкого», изданным в 1954 г. Снядецкий (1756—1830) — польский математик, ученик Кондорсе, Даламбера и Лапласа, с 1781 г. профессор Краковской академии, с 1805 г. профессор и ректор Вильнюсского университета, создавал польскую математическую терминологию, первый читал лекции на польском языке, его учебники переводились и на немецкий язык. Последовательный материалист. Член-корр. Петербургской академии наук с 1811 г. Известна его книга о Копернике (1803), основанная на новых документах. И. Я. Депман

4529. Вклад Великобритании в развитие математических наук за последнее столетие. Ле-Лионне (La contribution de la Grande Bretagne au développement des sciences mathématiques depuis un siècle. Le Lionnais F.), Osiris, 1954, 11, 40—49 (франц.)

Краткий обзор основных направлений творчества английских математиков, начиная с середины XIX в.: математической логики (Дж. Буль, А. де Морган, А. Н. Уайтхед и Б. Рассел), теории матриц и теории форм (А. Кели, Дж. Сильвестер), проективной геометрии (Кели), аналитической геометрии (Дж. Сальмон), неевклидовой геометрии (У. Клиффорд), теории чисел (Г. Харди, Дж. Литтлвуд, Е. Титчмарш и др.), операционного исчисления (О. Хевисайд, А. Бромуич и др.), математической физики и механики (Дж. Максвелл, У. Томпсон, Г. Лемб, П. Дирак и др.), вычислительных машин и математических приборов (Ч. Беббедж и др.) и, наконец, математической статистики (Ф. Гальтон, К. Пирсонс). А. П. Юшкевич

4530. Научный архив А. М. Ляпунова по вопросам устойчивости и теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Смирнов В. И., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1. М., АН СССР, 1956, 236

4531. Работы русских математиков XIX в. по теории функций комплексного переменного. Белозеров С. Е., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1. М., АН СССР, 1956, 229—230

4532. Математика в периодических изданиях Одесского (Новороссийского) университета (1865—1955 гг.) Ч. I. (1865—1933). Киро С. Н., Тр. Одесск. ун-та, 1956, 146, сер. матем. н., № 6, 89—109

Обзор работ одесских математиков, опубликованных в периодических изданиях Одесского (Новороссийского) университета в период 1865—1933 гг. Работы посвящены вариационному исчислению, дифференциальным уравнениям, геометрии, алгебре, теории чисел, истории математики. Приводится библиография математических статей, напечатанных в периодических изданиях университета с 1868 по 1927 г. М. К. Керимов

4533. Павел Сергеевич Александров (К 60-летию со дня рождения и 40-летию научной деятельности). Понтрягин Л. С., Мищенко Е. Ф., Успехи матем. наук, 1956, 11, № 4, 183—187. Список работ П. С. Александрова, 187—192

4534. Андрей Николаевич Тихонов (К 50-летию со дня рождения). Александров П. С., Самарский А. А., Свешников А. Г., Успехи матем. наук, 1956, 11, № 6, 235—242. Список печатных работ А. Н. Тихонова, 243—245

4535. Александр Осипович Гельфонд (К 50-летию со дня рождения). Линник Ю. В., Маркушевич А. И., Успехи матем. наук, 1956, 11, № 5, 239—248

4536. Адольф Павлович Юшкевич (К 50-летию со дня рождения). Маркушевич А. И., Яновская С. А., Успехи матем. наук, 1956, 11, № 4, 197—198. Список работ А. П. Юшкевича, 197—200

4537. Александр Николаевич Барсуков (К 20-летию журнала «Математика в школе»). Андронов И. К., Березанская Е. С., Глаголев Н. С. и др., Матем. в школе, 1957, № 1, 72—74

4538. Список работ академика Словацкой АН Юрая Гронца (Zoznam publikácií akademika SAV Juraja Hronca), Mat.-fyz. časop., 1956, 6, № 4, 263—264 (словац.)

4539. П. Г. Боль (1865—1921). Рабинович И. М., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 166—167

4540. Отто Юльевич Шмидт. Некролог. Курош А. Г., Успехи матем. наук, 1956, 11, № 6, 227—233

Некролог академика О. Ю. Шмидта (1891—1956); список и характеристика его математических работ. К. А. Рыбников

4541. Академик Александр Николаевич Динник. Пеньков (Академік Олександр Миколайович Дінік. Пеньков О. М.), Прикладна механіка, 1955, 1, № 4, 371—377 (укр.)

Очерк жизни и научной деятельности акад. Динника А. Н. (1876—1950), видного ученого в области механики и теории упругости, написанный по случаю 5-летия со дня смерти. К. А. Рыбников

4542. Эмиль Борель (1871—1956). (Émile Borel (1871—1956), C. r. Acad. sci., 1956, 245, № 24, 1951 (франц.)

4543. Памяти Эрнесто Чезаро (1859—1906). Перна (Ricordo di Ernesto Cesàro (1859—1906). Perna Alfredo), Bol. Unione mat. ital., 1956, 11, № 3, 457—468 (итал.)

Очерк жизни и научной деятельности выдающегося итальянского математика Э. Чезаро. С незаконченным средним образованием Чезаро поступил в Льежский

горный институт; на 4-й курс математического факультета Римского университета он был принят лишь в 1883 г., когда был автором 30 научных работ и книги «О различных вопросах арифметики» (Sur diverses questions arithmétiques), впоследствии прославившей его имя. Отсутствие математической школы повело к тому, что Чезаро не раз переоткрывал результаты Бернулли, Эйлера, Гаусса, Лежандра, Дирихле, Лиувилля и других ученых. Оно также придало высокую степень оригинальности научным работам Чезаро и его учебным руководствам.

За 25 лет научной деятельности Чезаро опубликовал более 250 оригинальных работ, а также — под своим именем и под псевдонимом (Rosace) — более 100 решений задач, поставленных Куммером, Адамаром и другими учеными.

Автор особенно высоко ценит лекции Чезаро по максвелловой теории электричества и его работы по натуральной геометрии (geometria intrinseca). Оспаривается мнение, согласно которому результаты работ Чезаро по натуральной геометрии могут быть получены как простое следствие из уравнений дифференциальной геометрии. М. Я. Выгодский

4544. Эдмунд Уиттекер, член-корреспондент Парижской академии наук (Некролог). Жюлиа (Notice nécrologique sur Sir Edmund Whittaker, correspondant de la section de géométrie. Julia Gaston), C. r. Acad. sci., 1956, 242, № 21, 2493—2495 (франц.)

Краткая биография Э. Уиттекера, скончавшегося 24 марта 1956 г. в Эдинбурге. Заметка содержит также описание его трудов, в частности монографий, «Курс современного анализа», «Аналитическая механика» и «История теорий эфира и электричества со времен Декарта до конца XIX в». М. И. Левин

4545. Луи Карпинский — историк математики. Джонс (Louis C. Karpinski, historian of mathematics. Jones Phillip S.), Science, 1956, 124, № 3210, 19 (англ.)

Некролог американского историка математики Л. Карпинского, скончавшегося 25 января 1956 г. Он известен также как активный участник Международного объединения историков науки.

К. А. Рыбников

4546. Иван Милошевич. (Мореплаватель и математик). Стипанич (Ivan Miloševi'c. (Nautičar i matematičar). Stipanić Ernest), Godisnjak Pomorsk. muzeja Kotoru, 1955 (1956), 4, 123—132 (сербо-хорв.; рез. англ.)

4547 К. Карл Фридрих Гаусс. Два доклада. Курант, Поль (Carl Friedrich Gauß. 2 Vorträge. Courant R., Pohl R. W. Göttingen—Berlin—Frankfurt, Musterschmidt, 1955, 27 S., ill., 1. 50 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1956, A, № 8, 507 (нем.)

4548 Д. Работы русских ученых XIX века по исследованию начала наименьшего действия и начала Остроградского—Гамильтона. Цыганова Н. Я. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н. Ин-т истории, естествозн. и техн. АН СССР, М., 1956

См. также: 4900, 5005 К, 5053, 5074 К, 5079 К, 5080 К, 5081 К.

ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

4549. Системы перечислимых множеств и их нумерации. Успенский В. А., Докл. АН СССР, 1955, 105, № 6, 1155—1158

Под занумерованной системой $\mathfrak{M}\alpha$ подразумевается система рекурсивно перечислимых множеств, рассматриваемая вместе с некоторой нумерацией α, т. е. с некоторым отображением произвольного множества натуральных чисел (номеров) на эту систему.

Множество («точка») $x \in \mathfrak{M}$ называется точкой τ-соприкосновения для подсистемы $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{M}$, если во всякой ее окрестности (РЖМат, 1956, 5682) найдется такое $z \in \mathfrak{A}$, что всякая окрестность z содержит x. Соответствующий смысл имеют понятия τ-замкнутости и τ-плотности. $\mathfrak{M}$ называется ω-сепарабельной, если подсистема $\mathfrak{M}'$ всех ее конечных множеств рекурсивно-перечислима и τ плотна в $\mathfrak{M}$; $\mathfrak{M}$ — псевдозамкнута, если она τ-замкнута во всякой объемлющей системе.

Подсистема $\mathfrak{A}$ системы $\mathfrak{M}$ называется эффективно открытой, если существует рекурсивно-перечислимая система конечных множеств $\mathfrak{K}$ такая, что $\mathfrak{A} = \bigcup_{F \in \mathfrak{K}} \mathfrak{Q}_F$, где $\mathfrak{Q}_F$ — элементарное открытое множество в $\mathfrak{M}$, определенное множеством F. Подсистема $\mathfrak{A}$ называется вполне перечислимой в $\mathfrak{M}$, если $\alpha^{-1}(\mathfrak{A})$ рекурсивно-перечислима в $\alpha^{-1}(\mathfrak{M})$. Вычислимым отображением $X\alpha$ в $Y\beta$ называется всякое отображение f системы X в Y, для которого существует частично-рекурсивная функция θ такая, что $x \in X \to \theta[\alpha^{-1}(x)] \subseteq \beta^{-1}[f(x)]$. Если, кроме того, $X \subseteq Y$ и $f(x) \equiv x$, то $X\alpha$ вложена в $Y\beta$.

Для специальным образом занумерованной системы всех рекурсивно-перечислимых множеств Райс (РЖМат, 1953, 548) определил следующие свойства (I, III — теоремы, II — гипотеза):

I. Всякая подсистема, эффективно-открытая в системе, вполне перечислима в ней.

II. Обратное к I.

III. Невозможно разбить систему на 2 непересекающихся и непустых вполне перечислимых подсистемы.

Вводимые автором нумерационные и топологические понятия позволяют ему следующим образом обобщить исследования Райса:

Нумерация α системы $\mathfrak{N}$ называется вычислимой, если множество всех пар $<n, t>$, где n принадлежит области определения α, а $t \in \alpha(n)$, является рекурсивно-перечислимым; она называется потенциально-вычислимой, если $\mathfrak{N}\alpha$ вложена в некоторую систему $\mathfrak{M}\beta$ с вычислимой нумерацией β. Всякая система обладает хотя бы одной потенциально-вычислимой нумерацией (теорема 1), но может и не иметь ни одной вычислимой нумерации.

Если α есть потенциально-вычислимая нумерация какой-либо системы $\mathfrak{M}$, то имеет место I (теорема 2).

Нумерация γ системы $\mathfrak{N}$ называется накрывающей (соответственно — вполне накрывающей), если всякая занумерованная система $\mathfrak{B}\varphi$, где $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{N}$, а φ вычислимая (соответственно потенциально-вычислимая) нумерация, вложена в $\mathfrak{N}\gamma$.

Если $\mathfrak{N}$ есть ω-сепарабельная система и γ — ее накрывающая нумерация, то имеет место II (теорема 5). Если, кроме того, $\mathfrak{N}$ еще связна, то имеет место и III.

(Райсом была рассмотрена частного вида связная ω-сепарабельная система с вычислимой и накрывающей нумерацией.)

Связь с вычислимыми операциями см. РЖМат, 1956, 5682.

Теорема 6 (7). Пусть $\mathfrak{A}\alpha$ и $\mathfrak{B}\beta$ — занумерованные системы, причем α-вычислимая (потенциально-вычислимая), а β — накрывающая (вполне накрывающая) нумерации. Тогда всякая одноместная вычислимая операция, отображающая $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$, совпадает на $\mathfrak{A}$ с некоторым вычислимым отображением $\mathfrak{A}\alpha$ в $\mathfrak{B}\beta$.

Теорема 8 (9) (обратная к теореме 6 (7)). Пусть $\mathfrak{B}\beta$ — занумерованная система. Если для всякой занумерованной системы $\mathfrak{A}\alpha$ с вычислимой (потенциально-вычислимой) нумерацией и всякой одноместной вычислимой операцией, отображающей $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$, существует совпадающее на $\mathfrak{A}$ с этой операцией вычислимое отображение $\mathfrak{A}\alpha$ в $\mathfrak{B}\beta$, то β — накрывающая (вполне накрывающая) нумерация.

Теорема 10. Пусть $\mathfrak{A}\alpha$ есть ω-сепарабельная система с накрывающей, а $\mathfrak{B}\beta$ — система с потенциально-вычислимой нумерацией. Тогда для всякого вычислимого отображения $\mathfrak{A}\alpha$ в $\mathfrak{B}\beta$ существует одноместная вычислимая операция, совпадающая на $\mathfrak{A}$ с этим отображением.

Если нумерация одновременно вычислима (потенциально-вычислима) и накрывающая (вполне накрывающая), то она называется главной нумерацией первого (второго) рода.

Всякая система обладает главной нумерацией второго рода (теорема 12); если система ω-сепарабельна и псевдозамкнута, то она обладает и главной нумерацией первого рода. Существуют вычислимые нумерации, не являющиеся накрывающими. Б. А. Трахтенброт

4550. Унификация универсумов в теории множеств. Куайн (Unification of universes in set theory. Quine W. V.), J. Symbolic Logic, 1956, **21**, № 3, 267—279 (англ.)

Теория называется стандартной, если она представлена как исчисление предикатов с одним родом квантифицируемых переменных, которые пробегают определенное множество объектов (универсум). В такой теории многие проблемы могут обсуждаться средствами узкого исчисления предикатов. Поэтому автор считает важной задачу стандартизации различных теорий.

В статье рассматриваются стандартные формы теории множеств фон Неймана—Бернайса и теории типов, изучаются связи этих теорий с теорией Цермело (причем последняя модифицируется).

В теории множеств фон Неймана—Бернайса унифицируются универсумы множеств и классов, вместо двух предикатов принадлежности ε и η (множества к множеству, соответственно классу) вводится один предикат ε, при этом $x\varepsilon y$, когда x класс, понимается истинным в том и только том случае, когда y имеет в качестве члена множество, члены которого те же, что и класса x.

Большая часть статьи посвящена стандартизации теории типов. Автор отмечает, что метод Рассела—Уайтхеда: введение общих переменных и выделение выпрямимых (stratified) формул — не решает проблемы стандартизации этой теории (напр., существуют тождественные формулы, которые выпрямимы, однако ложны в теории типов).

Путь автора следующий: вводятся переменные $x, y, z, \ldots$ (над всеми типами), предикаты T_0, T_1 и т. д., истинных соответственно для индивидуумов и только для них, для классов индивидуумов и только для них и т. д. Квантификации $(x^i)(\ldots x^i\ldots)$ и $(\exists x^i)(\ldots x^i\ldots)$ переписываются в виде $(x)(T_i x \supset \ldots \ldots x\ldots)$ и $(\exists x)(T_i x \ldots x\ldots)$. Если $\in$ было осмыслено в теории типов с индексами, его понимание остается прежним; во всех остальных случаях ложно (в частности $x\in x$ ложно). При таком понимании $\in$ тип x будет непосредственно предшествующим типу y (в символах $xPTy$) тогда и только тогда, когда

$$(\exists z)(\exists w)(x\in z . z\in w . y\in w).$$

Отсюда T_0, T_1, T_2, ... определяются через $\in$: $T_0x \equiv (y) - (yPTx)$, $T_1x \equiv (y)(T_0y \supset yPTx)$, $T_2x \equiv (y)\cdot(T_1y \supset yPTx)$ и т. д.

Схемы аксиом существования класса с заданным свойством $\ldots x\ldots$ и объемности:

$$(\exists y)(T_{n+1}y .(x)(T_nx \supset .x\in y \equiv .\ldots x\ldots)), \quad (2)$$

$$T_{n+2}z .T_{n+1}x .T_{n+1}y .(w)(T_nw \supset .w\in x \equiv .$$

$$\equiv .w\in y).x\in z .\supset .y\in z. \quad (3)$$

Кроме того, вводится схема типовых аксиом

$$x\in y .\supset .T_nx \equiv T_{n+1}y. \quad (4)$$

С помощью (4) можно упростить (2) и (3) и получить:

$$(\exists y)(T_{n+1}y .(x)(x\in y .\equiv .T_nx .\ldots x\ldots)), \quad (5)$$

$$T_{n+1}x .T_{n+1}y .(w)(w\in x .\equiv .w\in y).x\in z .\supset .y\in z. \quad (6)$$

Далее в (5) заменяется T_nx на $xPTy$ и $T_{n+1}y$ на T_ny:

$$(\exists y)(T_ny .(x)(x\in y .\equiv .xPTy .\ldots x\ldots)). \quad (10)$$

Схемы аксиом (2)—(4), а также (4)—(6), или (4), (6), (10) достаточны для стандартизации теории типов.

Особый интерес, по мнению автора, имеют следующие упрощения теории.

1. Отождествление пустых классов всех типов. Тогда в (5) и (6) $T_{n+1}x$ и $T_{n+1}y$ можно заменить на $-T_0x$ и на $-T_0y$:

$$(\exists y) - T_0y .(x)(x\in y .\equiv .T_nx .\ldots x\ldots)), \quad (12)$$

$$-T_0x .-T_0y .(w)(w\in x .\equiv .w\in y).x\in z .\supset .y\in z \quad (13)$$

(Это упрощение, т. к. сложность $T_{n+1}x$ в выражении через $\in$ возрастает с n к тому же теперь (13) — аксиома.)

2. Для индивидуумов и только для них: считать $x\in x$ истинным и отождествить x и ιx.

Теперь (12) и (13) сводятся к (15) и (16):

$$(\exists y)(x)(x\in y .\equiv .T_nx .\ldots x\ldots), \quad (15)$$

$$(w)(w\in x .\equiv .w\in y).x\in z .\supset .y\in z. \quad (16)$$

Определение T_nx исправляется: $y=x$, T_0x, $T_{n+1}x$ означают соответственно $(u)(y\in u .\supset .x\in u)$, $(y)(y\in x .\equiv .y=x)$, $(y)(y\in x .\supset .T_ny)$. При этом типы становятся кумулятивными, т. е. если x индивидуум, то T_nx истинно для всех n, если x — класс индивидуумов, то T_nx истинно для $n>0$ и т. д.

Далее автор обращается к теории Цермело (отвлекаясь при этом от аксиом выбора и бесконечности). Аксиоматика теории: (13) — аксиома объемности; схема выделения и аксиомы существования множества подмножеств, суммы и пары z, w:

$$(\exists y)(-T_0x .(x)(x\in y .\equiv .x\in z .\ldots x\ldots)), \quad (17)$$

$$(\exists y).(x)(x\in y .\equiv .-T_0x .(w)(w\in x .\supset .w\in z)), \quad (18)$$

$$(\exists y)(x)(x\in y .\equiv (\exists w)(x\in w .w\in z)), \quad (19)$$

$$(\exists y)(x)(x\in y .\equiv .x=z \vee .x=w). \quad (20)$$

Рассматривается модификация теории, в которой для индивидуумов $x\in x$ истинно. При этом T_0x определяется как $(y)(y\in x .\equiv .y=x)$, (13) сводится к (16), а (17) и (18) упрощаются:

$$(\exists y)(x)(x\in y .\equiv .x\in z .\ldots x\ldots), \quad (21)$$

$$(\exists y)(x)(x\in y .\equiv .(w)(w\in x .\supset .w\in z). \quad (22)$$

Таким образом аксиоматика этого варианта теории дается (16) и (19)—(22).

Затем устанавливается, что (12) можно получить с помощью (17), (18) и (23): $(\exists y)(-T_0x .(x)(x\in y .\equiv .T_0x)$ и таким образом избежать употребления усложняющегося T_nx.

Аналогичным образом (15) получается из (21), (22) и (24): $(\exists y)(x)(x \in y_{\alpha} \equiv T_0 x)$.

Теперь оказывается, что две вышеприведенные стандартизации теории типов характеризуются соответственно (13), (17), (18), (23) и (16), (21), (22), (24). При этом вторая теория совпадает с модифицированной теорией Цермело.

В заключение автор отмечает, что унификация универсумов и введение общих переменных ведут к упрощениям и большей стройности теории и в том случае, когда теория не приводится к стандартной и, в частности, намечает пути упрощения функциональной логики Фреге (включение теории классов в теорию функций).

Д. А. Захаров

4551. Прототетика Лесневского. Слупецкий (St. Lesniewski's Prototheticcs. Słupecki Jerzy), Studia log., 1953, **1**, 44—111 (англ.; рез. польск., русск.)

Реферируемая статья содержит неопубликованные до сих пор результаты Лесневского, но расположение материала, а также некоторые доказательства, исходят от автора. Автор пользуется замечаниями, заимствованными им из лекций Лесневского, озаглавленных «О некоторых проблемах прототетики», которые были прочитаны в 1932/33 г. Для большей ясности автор вводит некоторые упрощения за счет педантизма математических формулировок, например он отказывается от символической записи правил вывода.

Прототетика — это исчисление высказываний с пропозициональными переменными и переменными функторами произвольных семантических категорий, которые могут быть построены, отправляясь от низшей категории предложений. Элементарной прототетикой автор называет ту часть прототетики, в которой встречаются только пропозиционные переменные и переменные функторы с пропозициональными аргументами. В расширенной прототетике допускаются переменные функторы, аргументами которых служат другие функторы.

В статье дается обзор некоторых формальных систем прототетики и ее частей.

В различных системах прототетики имеются различные правила вывода. Следующие правила вывода встречаются в системах прототетики:

1) Правило определения, которое дает возможным добавить к системе новую теорему, имеющую вид эквивалентности. Эта теорема служит определением новой постоянной. Для метода Слупецкого характерна обширная сеть терминов, введенных посредством определения. Это позволяет ослабить правило подстановки.

2) Правило подстановки, которое позволяет заменять свободные переменные, представляющие функторы некоторой семантической категории, постоянными или переменными той же семантической категории. Это правило сравнительно слабое, оно не дает так называемой функциональной подстановки.

3) Правило отделения (modus ponens) в одних системах для импликации, в других — для эквивалентности.

4) Правило распределения квантора общности по отношению к эквивалентности или к импликации. Это правило является одной из характерных особенностей систем Лесневского. Другие авторы им не пользуются.

5) Правило навешивания квантора общности на левый член импликации и навешивания квантора общности на правый член импликации, левый член которой не содержит этой переменной в свободном виде.

6) Правило верификации, позволяющее присоединить к системе общую теорему, при условии, что в системе содержатся все результаты подстановки в эту теорему, определенные для данной семантической категории. Число предметов каждой семантической категории в прототетике конечно и можно определить их все, образуя так называемое множество верификаторов для данной категории.

7) Правило энстенсиональности, позволяющее добавлять к системе теоремы некоторой определенной структуры. Эти теоремы являются известными законами энстенсиональности для функторов произвольной семантической категории.

Статья представляет в формализованном виде следующие системы: в главе 5 рассматривается элементарное исчисление высказываний с кванторами, основанное на аксиомах Тарского—Бернайса и на правилах, которые обычно выполняются в этой системе; глава 9 содержит определение системы E элементарной прототетики, основанной на аксиоме

$$[f, q]\{f([p]\{p \supset p\}) \supset (f([p]\{p\}) \supset f(q))\}. \quad (A_1)$$

Система E полна. Далее определяются три эквивалентные, хотя и формально различные, системы прототетики S, S_1, S_2. Системы S и S_1 имеют один и тот же исходный термин — импликацию и одну и ту же аксиому A_1, но они отличаются правилами вывода. Помимо правил системы E, в S выполняется правило верификации, а в S_1 — правило экстенсиональности. Система S_2 имеет эквивалентность своим исходным термином и основана на четырех аксиомах

$$[p, q, r]\{(p \equiv q) \equiv ((r \equiv q) \equiv (p \equiv r))\}, \quad (1)$$

$$[p, q]\{(p \equiv q) \equiv [f]\{f(p) \equiv f(q)\}\}, \quad (2)$$

$$[p, q]\{(p \equiv q) \equiv [f]\{(f(p) \equiv f(q)) \equiv (p \equiv q)\}\}, \quad (3)$$

$$[f]\{f(p)\{p\}) \equiv (f([p]\{p\} \equiv [p]\{p\} \equiv \equiv [q]\{f([p]\{p\} \equiv f(q)))\}. \quad (4)$$

В системе S_2 имеют место следующие правила: подстановки, отделения для эквивалентности, распределения квантора общности по отношению к эквивалентности, экстенсиональности, определения. Доказывается полнота систем S, S_1, S_2.

S. Jaśkowski

4552. Системы Лесневского в связи с современными логическими исследованиями. Гжегорчик (The systems of Lesniewski in relation to contemporary logical research. Grzegorczyk Andrzej), Studia log., 1955, **3**, 77—96 (англ.; рез. польск., русск.)

Обсуждается научное наследие Станислава Лесневского, профессора Варшавского университета, умершего в 1939 г.

Замечания автора касаются трех систем, построенных Лесневским, а именно, прототетики, онтологии и мереологии. Другие области логических исследований Лесневского только упоминаются или полностью обходятся. Первая из перечисленных систем — прототетика — является обобщенным двузначным исчислением высказываний (имеются, в частности, переменные различных типов и кванторы по переменным высказываниям; истина, ложь и пропозициональные операторы определимы в системе). Вторая из этих систем — онтология содержит теорию классов (простую теорию типов), которой Леневский придал свое оригинальное философское истолкование, а третья — мереология содержит формализацию наглядных представлений, связанных с повседневным употреблением слова «часть».

Автор показывает, что каждая из этих трех систем, с формальной точки зрения, подобна булевой алгебре. По этой причине системы Лесневского не представляют особой ценности для математики. Автор полагает, что логические интересы Лесневского были ближе к философии, чем к математике.

Научная деятельность Лесневского «не сыграла значительной роли» в развитии мировой логики. Причины были: трудный язык, которым Лесневский писал свои статьи и значительное промедление с публикацией результатов. Кроме того, проблемы, которые он рассматривал, «постепенно теряли свой местный интерес». Однако Лесневский оказал значительное влияние на занятия логикой в Польше, главным образом благодаря своим университетским лекциям и личным контактам. Некоторые из его результатов, например теория семантических категорий, относятся к фундаментальным и устойчивым достижениям современной логики. Поэтому автор считает, что если бы системы Лесневского были опубликованы одновременно со вторым изданием Уайтхеда и Расселла (Whitehead, Rassel, Principia Mathematica), то они сыграли бы важную роль, потому что они превосходят эту книгу точностью, формальной простотой и естественностью исходных допущений. Во многих отношениях системы Лесневского «наилучшие из возможных».

Автор считает также, что мереология Лесневского может оказать большую пользу в формализации различных эмпирических разделов науки. J. Słupecki

4553. Аксиоматизация двузначных предикатных исчислений первой ступени с импликацией. Тиле (Eine Axiomatisierung der zweiwertigen Prädikatenkalküle der ersten Stufe, welche die Implikation enthalten. Thiele Helmut), Z. math. Logik und Grundl. Math., 1956, 2, 93—106 (нем.)

Рассматриваются общие двузначные исчисления предикатов с импликацией. В таком исчислении операции над предикатами осуществляются с помощью конечноместных функций истинности Φ_k^i (i — число мест, k — индекс; $i \geqslant 0$, $1 \leqslant k \leqslant 2^{2^i}$) из некоторого множества Ω функций двузначной логики. Ω обязательно содержит импликацию, но может не содержать (всех или части) обычных: конъюнкции, дизъюнкции, эквивалентности, отрицания. Кроме этого, используются кванторные операции всеобщности и существования (одна или обе могут отсутствовать).

Сначала формализуется исчисление со счетным множеством индивидуальных объектов и счетным множеством предикатов. При этом для каждой функции $\Phi_k^i \in \Omega$ вводится точно один функтор F_k^i, который для импликации обозначается $\to$ и для четырех вышеуказанных функций (если они присутствуют): $\wedge$, $\vee$, $\longleftrightarrow$, $\sim$.

Понятия формулы, ее интерпретации, тождественной формулы не отличаются от обычных.

Схемы аксиом:

$ax_{\to}$: $H_1 \to .H_2 \to H_1$

$H_1 \to H_2 : \to : H_2 \to H_3 . \to . H_1 \to H_3$

$H_1 \to H_2 . \to . H_1 : \to : H_1$

aF_k^0 $\left.\begin{matrix} F_1^0 \\ F_2^0 \to H \end{matrix}\right\}$ (здесь в статье опечатка)

$a_{F_k^i}$. Пусть $i \geqslant 1$. С помощью Φ_k^i конструируется 2^{2^i} схем аксиом: Пусть $H_1, \ldots, H_i$ и H — произвольные формулы, $[w_1, \ldots, w_i]$ — некоторый набор значений «И» и «Л» (истинно, ложно). Полагаем $H'_\iota = H_\iota$, если $w_\iota = $ И, и $H'_\iota = H_\iota \to H$, если $w_i = $ Л($\iota = 1, \ldots, i$). Теперь в случае $\Phi_k^i(w_1, \ldots, w_i) = $ И принимаем в качестве аксиом формулы вида: $H'_1 : \to : : H'_2 . : \to \to : . \ldots . : \to : H'_i . \to . (F_k^i H_1 \ldots H_i \to H) \to H$, соответственно, в случае $\Phi_k^i(w_1, \ldots, w_i) = $ Л:

$H'_1 : : \to : : H'_2 . : \to : . \ldots . : \to : H'_i . \to . (F_k^i H_1, \ldots H_i \to H)$.

Для $\wedge$, $\vee$, $\longleftrightarrow$, $\sim$ приводятся другие, более простые, схемы.

Правила вывода обычны: modus ponens, кванторные схемы и правила переименования индивидуальных переменных.

Теорема аксиоматизации. Формула H является тождественной тогда и только тогда, когда она выводима.

Для доказательства строится некоторое максимальное множество непротиворечивых формул, не содержащее H.

В заключение указывается, как надо изменить рассуждения, когда в исчислении есть предикат равенства (=), а также и в случае наличия некоторого множества (не более чем счетного) индивидуальных констант. Наконец, снимаются ограничения на мощность множества индивидуальных и предикатных переменных и индивидуальных констант.

Указываются некоторые возможности дальнейшего обобщения результатов. Библ. 25 назв.

Д. А. Захаров

4554. Базы для систем анализа. Крейсел (Bases for systems of analysis. Kreisel Georg), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 405 (англ.)

Сообщаются некоторые результаты, представляющие интерес в связи с анализом Брауэра и содержащиеся в журнале «Brit. J. Philos. Sci.» (1953, 4, № 14, 107—129). А. С. Есенин-Вольпин

4555. Примеры применения математической логики к алгебре. Шиханович Ю. А., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 148—149

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

4556. Оценка показательной тригонометрической суммы. Постников А. Г., Изв. АН СССР, сер. матем., 1956, 20, № 5, 661—666

Методом И. М. Виноградова дана оценка показательной тригонометрической суммы $S = \sum_{x=0}^{P-1} \exp 2\pi i a g^x$, $0 \leqslant \alpha < 1$, g — целое $\geqslant 2$. Интервал $[0, 1)$ разбивается на два подмножества $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$, причем если $\alpha \in \mathfrak{M}_2$, то $|S| \leqslant C(\varepsilon) \frac{P}{(\ln P)^{0,5-\varepsilon}}$, $\varepsilon > 0$ и $\operatorname{mes} \mathfrak{M}_1 = O(e^{-C(\ln P)^3})$, $C > 0$ — константа. А. И. Виноградов

4557. Диофантовы уравнения. Раманатхан (Diophantine equations. Ramanathan G.), 數學, Сугаку, 1956, 7, № 4, 249—250 (япон.)

Содержание лекции о представлении чисел формами от n переменных

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c,$$

в частности квадратичными формами с суммой одинаковых степеней натуральных чисел (проблема Варинга). Г. В. Емельянов

4558. Сообщение об одной группе исследований в аддитивной арифметике чисел, свободных от степе-

ней. Куджани (Relazione su un gruppo di ricerche di aritmetica additiva dei numeri liberi da potenze. Cugiani Marco), Bol. Unione mat. ital., 1956, **11**, № 3, 359—367 (итал.)

Обзор результатов, полученных с 1931 по 1953 г. по вопросам представления целых чисел N в виде $x^g + l_t$, где $g \geqslant 1$, $t \geqslant 2$ — фиксированные числа, l_t принимает целые значения, не делящиеся на t-е степени простых чисел, а в качестве множества возможных значений $x \geqslant 0$ рассматриваются следующие случаи:

1) x принимает любые целые значения (Эстерман, Куджани),

2) в качестве x берутся только простые числа (Эстерман, Эрдеш, Самбасива Рао и др.).

3) x принимает значения, свободные от квадратов (Рот, Куджани)

4) $(x;\ N) = 1$ (Куджани).

Приводятся также некоторые результаты Риччи и Куджани по вопросу о представлении N в виде $F(x) + l_t$, где $F(x)$ — целочисленный многочлен с рациональными коэффициентами. А. А. Бухштаб

4559. Монотонность функций разбиения на слагаемые. Бейтман, Эрдёш (Monotonicity of partition functions. Bateman P. T., Erdös P.), Mathematika, 1956, **3**, № 5, 1—14 (англ.)

Пусть A — конечное или бесконечное множество целых положительных чисел. Пусть $p(n) = p_A(n)$ — число представлений n в форме $n_1a_1 + n_2a_2 + \ldots$, где $a_i \in A$, n_i — целые неотрицательные числа. Доказывается, что $p(n)$ — монотонно возрастающая функция от n при достаточно большом n тогда и только тогда, когда A состоит более чем из одного элемента и наибольший общий делитель всех элементов из A, кроме любого одного, равен единице.

Дано обобщение для k-й разности от $p(n)$.

В. А. Голубев

4560. О гипотезе Рамануджана. Раманатхан (Ramanujan の予想について. Ramanathan K. G.), 數學, Сугаку, 1956, **7**, № 4, 250—252 (япон.)

Приводится содержание лекции Раманатхана, посвященной известной гипотезе Рамануджана: Пусть

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 - x^k)^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p(n)\, x^n$$

и

$$24n \equiv 1 \pmod{5^\alpha 7^\beta 11^\gamma},$$

тогда $p(n) \equiv 0 \pmod{5^\alpha 7^\beta 11^\gamma}$, $\alpha,\ \beta,\ \gamma \geqslant 0$.

Примечание референта. Среди работ, упомянутых в связи с этой гипотезой, не указаны работы В. А. Кречмара (Изв. АН, 1933, **6**, № 6, 763—800).

Г. В. Емельянов

4561. Оценка плотности суммарных множеств. III. Каш (Abschätzung der Dichte von Summenmengen. III. Mitt. Kasch Friedrich), Math. Z., 1956, **66**, № 2, 164—172 (нем.)

Ч. I и II см. РЖМат, 1956, 2730 и 8541.

Пусть A — множество натуральных чисел плотности α, B — некоторый базис натурального ряда среднего порядка $\lambda\ (0 \in B)$. И пусть γ обозначает плотность суммарного множества $A + B$.

Оценка для γ получается в зависимости от условий, ограничивающих λ снизу: если $\lambda \geqslant \psi(\alpha)$, то $\gamma \geqslant \alpha + \varphi(\alpha)$.

При $\psi(\alpha) = 3 + \alpha(1 - \alpha)(3 - 2\alpha)^2/2\,(3 - 2\alpha)$

$$\varphi(\alpha) = (1/2)\left\{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 3\alpha(1 - \alpha)}\right\}, \qquad (1)$$

откуда в случае $\alpha \leqslant 1/2$ получается результат А. Брауэра (РЖМат, 1956, 7845). При другом выражении для $\psi(\alpha)$

$$\varphi(\alpha) = \frac{1}{2}\left\{\lambda - \frac{\alpha}{4} - \sqrt{\left(\lambda - \frac{\alpha}{4}\right)^2 - 3\alpha(1 - \alpha)}\right\},$$

что лучше по сравнению с (1).

Получающиеся для γ оценки, во всяком случае, для значений α, близких к $1/2$, отличаются несущественно от наилучших возможных оценок.

Аналогичные оценки получаются для асимптотических плотностей. Б. М. Бредихин

4562. О проблеме делителей. II. Дун Гуан-чан (II). (除數問題. II. 董光昌), 數學學報, (Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica), 1956, **6**, № 2, 139—152 (кит.; рез. англ.)

Пусть $d_k(n)$ — число разложений n на k множителей,

$$D_k(x) = \sum_{n \leqslant x} d_k(n), \quad R_k(x) = (a_{k,0} + a_{k,1} \ln x + \ldots + a_{k,k-1} \ln^{k-1} x)\, x, \qquad x > 0,$$

есть вычет $\zeta(s)\, x^s s^{-1}$ в точке $s = 1$.

$$\Delta_k(x) = D_k(x) - R_k(x).$$

Как и в предыдущих работах (РЖМат, 1956, 1937, 6340), автор с помощью обобщения известного тождества Вороного получает уточнение результата Харди о порядке $\Delta(x)$. Так, например, доказывается

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(-1)^{\left[\frac{k-1}{4}\right]} \Delta_k(x)}{(x \ln x)^{\frac{2k-1}{2k}} (\ln \ln x)^{k-1}} > 0 \quad \text{при} \quad k = 4l + 1,$$

$$l = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \text{ и др.}$$

Г. В. Емельянов

4563. Нетривиальные корни дзета-функции Римана. Минь Сы-хао (論黎曼ξ函數的非顯明零點. 閔嗣鶴), 北京大學學報, (自然科學), Бэйцзин дасюэ сюэбао (цзыжань кэсюэ), Acta scient. natur. Univ. pekinensis, 1956, № 2, 165—189 (кит.; рез. русск.)

Пусть $N(T)$ — число корней $\beta + i\gamma$ $\zeta(s)$ с $0 \leqslant \gamma \leqslant T$, из них $N_0(T)$ — число тех, у которых $\beta = 1/2$. Доказывается, что $N_0(T) > \frac{1}{60\,000} N(T)$, $(T > T_0)$.

Г. В. Емельянов

4564. Проблема минимума для дзета-функции Эпштейна. Ранкин (A minimum problem for the Epstein zeta-function. Rankin R. A.), Proc. Glasgow Math. Assoc., 1953, **1**, № 4, 149—158 (англ.)

Пусть

$$h(m, n) = \alpha m^2 + 2\delta mn + \beta n^2$$

— положительно определенная квадратичная форма с детерминантом $\alpha\beta - \delta^2 = 1$. В частности, специальную форму $Q(m, n)$ определим следующим образом:

$$Q(m, n) = \frac{2}{3}\sqrt{3}\,(m^2 + mn + n^2).$$

Рассматривается дзета-функция Эпштейна

$$Z_h(s) = \sum\nolimits'_{m,n=-\infty}^{\infty} \{h(m, n)\}^{-s},$$

где штрих обозначает, что исключается член с $m = n = 0$. Двойной ряд абсолютно сходится при $\mathrm{Re}\, s > 1$. Функция $Z_h(s)$ может быть продолжена

на всю s-плоскость, где она будет регулярной, за исключением простого полюса в $s=1$ с вычетом 1.

Доказывается теорема: Для всех $s \geqslant 1{,}035$ — $Z_h(s) \geqslant Z_Q(s)$. Равенство имеем тогда, когда формы h и Q эквивалентны.

С помощью десяти лемм теорема доказывается сперва для $s \geqslant 3$, затем для $2 < s \leqslant 3$ и, наконец, для $1{,}035 \leqslant s \leqslant 2$. Г. А. Ломадзе

4565. ζ-функция арифметического многообразия. **Лустиг** (Über die Zetafunktion einer arithmetischen Mannigfaltigkeit. Lustig Gerhard), Math. Nachr., 1955 (1956), **14**, № 4—6, 309—330 (нем.)

Работа развивает идеи Кэлера о чисто алгебраической теории полей алгебраических функций многих переменных. Пусть K — поле; арифметической размерностью его назовем величину $\dim_a K$, которая совпадает с $\dim K$, если $\chi(K) > 0$; если же $\chi(K) = 0$, то $\dim_a K = \dim K + 1$. Здесь $\dim K$ — размерность K, $\chi(K)$ — характеристика. Точкой (Erscheinung) поля K называется кольцо S, все элементы которого отличные от единиц, образуют простой идеал $\mathfrak{p}$. Сам идеал $\mathfrak{p}$ и отображение $S \to S/\mathfrak{p}$ называется перспективой точки S. Базисом S называется кольцо R такое, что само S — совокупность величин ab^{-1}, где a, $b \in R$, $b \notin \mathfrak{p}$. Многообразием V поля K называется совокупность точек, характеризующаяся условиями:

1. Пересечение двух любых точек V является базисом некоторой, третьей точки V.

2. Всякая точка, базисом которой служит одна из точек V, сама принадлежит V.

Поле или кольцо называется арифметическим, если оно порождено конечным множеством элементов. Многообразие V называется арифметическим, если существует конечное множество таких арифметических колец R_i, что каждая точка $S \in V$ имеет своим базисом одно из R_i.

Точка S называется регулярной, если ее перспектива $\mathfrak{p}$ порождена конечным числом элементов $p_1, p_2, \ldots, p_h$, причем из условий:

$$\sum_{\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_h=m} a_{\nu_1,\ldots,\nu_h} p_1^{\nu_1} \cdots p_h^{\nu_h} \in \mathfrak{p}^{m+1}, \qquad a_{\nu_1,\ldots,\nu_h} \in S$$

следует, что $a_{\nu_1,\ldots,\nu_h} \in \mathfrak{p}$. В противном случае S — сингулярная точка. Если все точки многообразия регулярны, то и само V называется регулярным. Пусть теперь каждой точке S многообразия V поставлен в соответствие некоторый идеал $g(S) \subseteq S$, причем из условия $s \subseteq S$ следует, что $g(S) = g(s)\,S$. Совокупность всех таких идеалов $g(S)$ называется конструкцией g над V (Gebilde). Мы говорим, что конструкция $f \geqslant g$, если $g(S) \supseteq f(S)$ для всех точек $S \in V$. Конструкция $\mathfrak{G}$ называется полной, если $\mathfrak{G}(S) = 0$ всюду на V. Очевидно, что любая конструкция $g \leqslant \mathfrak{G}$. Пусть $\mathfrak{a}$ — идеал, принадлежащий S. Полагаем $N(\mathfrak{a})$ равным числу классов вычетов S по модулю $\mathfrak{a}$; пусть далее

$$N(g) = \prod_{S \in V} N(g(S)) \qquad (\leqslant \infty)$$

и

$$\zeta(f \mid s) = \sum_{g \leqslant f} (Ng)^{-s},$$

где f — заданная конструкция над V; g пробегает все конструкции $g \leqslant f$. Это определение ζ-функции содержит как частные случаи определения Дедекинда, Артина, Шмидта для арифметических полей с $\dim_a K = 1$.

Пусть, наконец, S_0 — некоторая точка V, $\mathfrak{p}_0$ — ее перспектива, S — любая точка V. Определим конструкцию f условием:

$$f(S) = [\mathfrak{r}_0 \cap S]\,S$$

для всех $S \in V$. Кэлер высказал гипотезу, что ряд для $\zeta(f|s)$ сходится в области $\mathrm{Re}(s) > n$, где $n = \dim_a S_0/\mathfrak{p}_0$. В статье рассматривается частный случай этой гипотезы; пусть $S_0 = K$, тогда $\mathfrak{o}_0 = 0$. Автор доказывает теорему: пусть V — регулярное арифметическое многообразие поля K, арифметическая размерность которого равна 2; $\mathfrak{G}$ — полная конструкция над V. Тогда ряд

$$\zeta(\mathfrak{G}/s) = \sum_{g \leqslant \mathfrak{G}} (Ng)^{-s}$$

абсолютно сходится для $\mathrm{Re}(s) > 2$, причем в этом случае $\dim_a S_0/\mathfrak{p}_0 = 2$. Н. Г. Чудаков

4566. Характеры числовых полугрупп с конечной или бесконечной достаточно редкой базой. Бредихин Б. М. Уч. зап. Куйбышевск. гос. пед. ин-та, 1956, вып. 14, 3—27

Подробно излагаются и уточняются результаты, краткие изложения которых реферировались ранее (РЖМат, 1953, 1036; 1954, 5041). Н. Г. Чудаков

4567. О числе простых множителей целых чисел. Танака (On the number of prime factors of integers. Tanaka Minoru), Japan. J. Math., 1955, **25**, 1—20 (англ.)

Пусть $\omega(n)$ — число различных простых делителей n; $f_i(\xi)$ $(i = 1, \ldots, k)$ — попарно взаимно простые полиномы положительной степени с целыми рациональными коэффициентами, $f_i(\xi) > 0$ при $\xi \geqslant 1$, E — ограниченное или неограниченное измеримое по Жордану k-мерное множество. Пусть каноническое разложение $f_i(\xi)$ на неприводимые в поле рациональных чисел полиномы содержит r_i попарно различных полиномов

$$u_i(n) = \{\omega(f_i(n)) - r_i \log\log n\}\,(r_i \log\log n)^{-1/2},$$

$A(x, E)$ — число натуральных n, $3 \leqslant n \leqslant x$, для которых точка $(u_1(n), \ldots, u_k(n)) \in E$. Тогда при $x \to \infty$

$$x^{-1}A(x, E) \to (2\pi)^{-k/2} \times$$

$$\times \int_E \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} u_i^2\right) du_1 \ldots du_k.$$

Приводится ряд частных случаев. Отмечается, что аналогичные результаты имеют место при замене $\omega(n)$ на функцию $\Omega(n)$, выражающую число всех простых делителей n.

Доказательство основано на применении метода решета Бруна. И. П. Кубилюс

4568. Об аддитивных арифметических функциях и применениях вероятностей к теории чисел. Эрдёш (On additive arithmetical functions and applications of probability to number theory. Erdös P.), Proc. Internat. Congr. Math. 1954. Vol. 3. Groningen — Amsterdam, 1956, 13—19 (англ.)

Обзорный доклад, посвященный вероятностным методам в теории аддитивных и мультипликативных арифметических функций. Изложены основные результаты, полученные различными авторами, причем более подробно освещаются результаты, не вошедшие в обзорную статью Каца (Kac M., Bull. Amer. Math. Soc., 1949, 55, 641—665). Формулируется ряд задач. И. П. Кубилюс

4569. Функции распределения аддитивных арифметических функций. Шапиро (Distribution functions of additive arithmetic functions. Shapiro Harold N.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1956, **42**, № 7, 426—430 (англ.)

Пусть $f(m)$ — вещественная аддитивная арифметическая функция, т. е. вещественная функция, определенная на множестве натуральных чисел и удовлетво-

ряющая условию $f(mn)=f(m)+f(n)$, если $(m, n)=1$. $f(m)$ называется сильно аддитивной, если $f(p^\alpha)=f(p)$ для всех простых p и всех натуральных α. Пусть $K_n(f, \omega)$ — число натуральных $m \leqslant n$ таких, что $\{f(m)-A_n\}/B_n < \omega$, где $A_n=\sum_{p<n} f(p)/p$, $B_n^2=\sum_{p<n} f^2(p)/p$.

Теорема А. Если $f(m)$ сильно аддитивна, $B_n \to \infty$ при $n \to \infty$ и для любого $\eta > 0$ при $n \to \infty$

$$\sum f^2(p)/p = o\left(B_n^2\right),$$

где суммируется по всем простым $p < n$, для которых $|f(p)| > \eta B_n$, то $n^{-1}K_n(f, \omega)$ при $n \to \infty$ сходится к нормальному закону $(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\omega} \exp(-u^2/2)\,du$.

Теорема В. Пусть $f(m)$ — любая аддитивная функция $B_n \to \infty$ при $n \to \infty$,

$$\hat{f}(m)=\sum_{p/m} f(p).$$

Если $n^{-1}K_n(f, \omega)$ при $n \to \infty$ сходится к некоторой непрерывной функции распределения $F(\omega)$, то и $n^{-1}K_n(\hat{f}, \omega) \to F(\omega)$, и наоборот.

Из теоремы В следует, что в теореме А можно не требовать сильной аддитивности.

Примечание референта. Теорема А является частным случаем более общих теорем, доказанных референтом (РЖМат, 1955, 5588; 1957, 1116, 1117). И. П. Кубилюс

4570. Международная конференция по алгебраической теории чисел (代數的整數論に關する國際會議), 數學, Сугаку, 1956, **7**, № 4, 193—264 (япон.)

Сообщение о Международной конференции по алгебраической теории чисел, проходившей с 8 по 13 сентября 1956 г. в Токио и Нико. Г. В. Емельянов

4571. О числе классов алгебраического числового поля. Брауер (On the class number of algebraic number fields. Brauer R.), 數學, Cykary, 1956, **7**, № 4, 244—245 (япон.)

Пусть k — алгебраическое поле степени n, d — дискриминант поля; h — число классов идеалов поля с нормой $\mathrm{Nor} \leqslant |d|^{1/2}$. Пусть $n=r_1+2r_2$, где r_1 — число вещественных, а r_2 — число пар комплексных сопряженных корней, порождающих поле. Утверждается, что существует бесконечное множество полей, для которых $h > |d|^{1/2-\varepsilon}$. Рассматривается частный случай $r_2=0$, т. е. чисто вещественные поля. Конструируются конкретные поля, для которых $h > |d|^{1/2-\varepsilon}$.

Приводится ряд других результатов, относящихся к теории алгебраических полей. Г. В. Емельянов

4572. О первом случае теоремы Ферма для четных показателей. Эконому (Sur le premier cas du théorème de Fermat pour les exposants pairs. Oeconomou Georges), C. r. Acad. sci., 1956, **243**, № 21, 1588—1591 (франц.)

Предлагается применить квадратичный закон взаимностей для исследования неопределенного уравнения

$$x^{2n}+y^{2n}=z^{2n} \qquad (1)$$

Если, например, в (1) $(z^2-y^2, (z^{2n}-y^{2n})/(z^2-y^2))=1$, то $\beta^2=(z^{2n}-y^{2n})/(z^2-y^2) \equiv nz^{2(n-1)} \pmod{z^2-y^2}$ и, следовательно, $(n/q)=+1$, где q — простой делитель z^2-y^2. Автор рассматривает различные возможные случаи для q и n.

Заметим, что высказанная автором идея содержится в классических работах Куммера по теореме Ферма: П. Н. Реморов

4573. Диофантовы уравнения в некоторых кольцах. Вандивер (Diophantine equations in certain rings. Vandiver H. S.), Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1956, **42**, № 9, 656—665 (англ.)

Пусть p — нечетное простое и $F[p^n]$ — конечное поле порядка p^n; рассматриваются уравнения вида:

$$c_1x_1^{a_1}+c_2x_2^{a_2}+\ldots+c_sx_s^{a_s}+c_{s+1}=0,$$

$0<a<p^n-1$, $s>1$ для $c_{s+1}\neq 0$ и $s>2$ для $c_{s+1}=0$,

$$c_i \in F[p^n],\ c_1c_2\ldots c_s \neq 0.$$

В настоящей работе автор применяет методы исследований уравнений в кольце рациональных чисел в случае, когда коэффициенты уравнений и неизвестные принадлежат коммутативному кольцу с единицей.

Один из важных результатов работы выражен теоремой: Уравнение $da+k_1p+(db+k_2p)x^c=(d+k_3p)y^t$, где $(a, b)=1$, a, b, c — фиксированные, не имеет решения для бесконечного количества целых c таких, при которых $cl+1=p$ — простые нечетные числа, $(a^t+b^t)/(a+b) \neq r^t$, $a+b \neq s^t$, $a \neq t^t$ и a, b, r, s, t — целые, $d \not\equiv 0 \pmod p$. П. Н. Реморов

4574. Покрытие пространства шарами. Давенпорт (Le recouvrement de l'espace par des sphères. Davenport H.), Colloq. théorie nombres, Bruxelles, 1955. CBRM. Liège—Paris, 1956, 139—145 (франц.)

Работа носит обзорный характер. Рассматриваются покрытия $\mathfrak{R}$ n-мерного евклидова пространства системами одинаковых шаров $\{S_\nu\}$; плотность покрытия определяется как $\delta(\mathfrak{R})=\lim_{V(C)\to\infty}\left[\sum_\nu V(S_\nu \cap C)\right]/V(C)$, где V — объем, C — произвольный куб. Нижняя грань $\delta(\mathfrak{R})$ по всем $\mathfrak{R}$, обладающим плотностью, обозначается через ϑ_n^* (то же для решеткообразных покрытий обозначается через ϑ_n). Отмечены результаты: $\vartheta_n^* > 16/15-\varepsilon_n$ ($\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$), Эрдёш и Роджерс (РЖМат, 1954, 4571); $\vartheta_n > 4/3-\varepsilon_n$, Бамба и Давенпорт (Bambah, Davenport, J. London Math. Soc., 1952, **27**, 224—229); $\vartheta_n < (1{,}107)^n$, Давенпорт (Rend. Circolo mat. Palermo, (2), 1952, **1**, 92—107). Намечены доказательства последних двух неравенств.

Б. Б. Венков

4575. Обилие арифметических функций, удовлетворяющих некоторым простым функциональным уравнениям. Сколем (The abundance of arithmetic functions satisfying some simple functional equations. Skolem Th. Kgl. norske vid. selskabs forhandl., 1956, **29**, № 11, pp. 47—53) — (англ.)

Рассматриваются алгебраические системы, которые обладают несколькими сложениями $(+_r)$ и одним умножением. Относительно каждого сложения система A представляет собой абелеву группу и всякие два сложения связаны соотношением $(x+_ry)+_sz=x+_r(y+_sz)$ для x, y, $z \in A$. Доказано, что если в A умножение связано с каждым из сложений левым и правым дистрибутивными законами и если существует элемент a такой, что из $ax=ay$ следует $x=y$, то все сложения совпадают. С другой стороны, построены примеры систем с любым конечным или счетным числом сложений, в которых выполняется правый дистрибутивный закон. Изучены некоторые свойства разложения на множители в таких системах. В конце работы приводится пример алгебраической системы с континуальным числом коммутативных и ассоциативных бинарных операций, из которых каждые две

(x, y) и $g(x, y)$ связаны соотношениями $f(x, x) = x$, $f(x, g(y, z)) = g(f(x, y), f(x, z))$ для любых $x, y, z \in A$. Примеры указанных систем осуществляются с помощью ариф- метических функций, что и объясняет название статьи. Б. Б. Венков

4576. Знакопеременные непрерывные дроби. Тан Тянь-дун (交錯連分級數. 湯天棟), 數學通訊, Шусюэ-тунсюнь, 1956, № 63, 1—10 (кит.)

Рассматриваются цепные дроби вида

$$a_1 - \cfrac{1}{a_2 - \cfrac{1}{a_3 - \cfrac{1}{a_4 - \dots}}}$$

Доказывается ряд известных элементарных теорем об этих дробях. Г. В. Емельянов

4577. О разложении квадратичных иррациональностей в непрерывные дроби. Гонсалвиш (Sur le développement des irrationnalités quadratiques en fraction continue. Gonçalves J. V.), Rev. Fac. ciânc. Univ. Lisboa, 1954—1955, **A4**, № 1—2, 273—282 (франц.)

Пусть $\xi = (p + \delta)/q$ $(\delta = \sqrt{D})$ (p, q, $D > 0$ и $(D - p^2)/q$ — целые числа) — действительная квадратичная иррациональность и пусть целое $a > 0$ такое, что

$$D - p^2 = aqq'.$$

Рассмотрим последовательность чисел $a_1, a_2, \dots$, где $a_n = \pm a$, причем если $a > 1$, то два соседних члена a_n и a_{n+1} не могут одновременно принимать значение a.

Определим ξ_n из соотношений

$$\xi_n = b_n + \frac{a_{n+1}}{\xi_{n+1}} = \frac{p_n + \delta}{q_n} \quad (\xi_0 = \xi),$$

где b_n — кратное числа a, лежащее между ξ_n и $\xi_n - a_{n+1}$.

Предположим, что $b_{i-1} + a_i \geqslant |a|$ $(i = n+1, n+2, \dots)$ и $\xi_{l-1} \geqslant (\xi_l + a)/\xi_l$, $a_{l-1} < 0, \dots, a_{n+1} < 0$ (при $k > 1$, $l = n + k$) для некоторой возрастающей последовательности l_i.

При этих условиях доказывается, что среди чисел p_i, а потому и среди ξ_i имеются повторения. Э. Апарисио

4578. $\mathfrak{M}$-подгруппы группы классов вычетов. Нёбауэр ($\mathfrak{M}$-Untergruppen von Restklassengruppen. Nöbauer Wilfried), Monatsh. Math., 1956, **60**, № 4, 269—287 (нем.)

Обобщение работы автора (РЖМат, 1955, 3594). Рассматривается векторное пространство Γ_k полиномиальных векторов $f(r) = (f_1(r), f_2(r), \dots, f_k(r))$, компонентами которых являются многочлены от k неизвестных $x_1, \dots, x_k$ с целочисленными коэффициентами. Если в целочисленном векторе $r_k = (x_1, \dots, x_k)$ неизвестные пробегают независимо друг от друга полную систему вычетов по mod n, то говорят, что r_k пробегает полную систему вычетов по mod n.

Полиномиальные векторы, которые порождают при любых целочисленных r_k нулевой вектор по mod n, образуют в Γ_k идеал A_k^n. Классы фактор-кольца $\Gamma_k | A_k^n$, состоящие из полиномиальных векторов, порождающих полную систему вычетов по mod n в случае, когда r_k пробегает полную систему вычетов по mod n, образуют группу G_n^k относительно операции «подстановки» $f(g(r))$, где $f(r)$ и $g(r) \in G_n^k$. При образовании $f(g(r))$, в $f(r)$ все r_ν заменяются соответствующими компонентами $g_\nu(r)$ полиномиального вектора $g(r)$.

Пусть теперь каждому натуральному n поставлено во взаимно однозначное соответствие некоторое множество полиномиальных векторов $\mathfrak{M}(n)$ из Γ_k. Через B_n^k обозначим множество всех элементов $\Gamma_k | A_k^n$, которые имеют представителей в $\mathfrak{M}(n)$. Пусть $U_n^k = B_n^k \cap G_n^k$ будет подгруппой G_n^k для любого натурального n. Назовем U_n^k $\mathfrak{M}$-подгруппой. При некоторых условиях структура $\mathfrak{M}$-подгруппы U_n^k тесно связана с мультипликативным строением n, что позволяет вычисление порядка U_n^k свести к вычислению порядков подгрупп U_p^k, где простые числа p/k. $\mathfrak{M}$-подгруппы U_n^k изучаются и в том случае, когда переменными являются одновременно n и k. Рассматриваются частные примеры $\mathfrak{M}$-подгрупп и вычисляются их порядки. Б. М. Бредихин

4579. Об основном модуле произведения характеров. Климов А. И., Уч. зап. Саратовск. пед. ин-т, 1956, вып. 23, 121—127

Основным (ведущим) модулем характера Дирихле называется наименьший из модулей этого характера. Автор разработал алгоритм для вычисления основного модуля произведений нескольких данных характеров. Н. Г. Чудаков

4580. Группы первообразных корней. Карлиц (Sets of primitive roots. Carlitz L.), Compositio math., 1956, **13**, № 1, 65—70 (англ.)

Продолжение работы автора (Duke Math. J., 1952, 19, 459—469). Доказывается и обобщается теорема: Пусть $a_1, \dots, a_{r-1}$ фиксированные целые числа, не меньше 1, и пусть N_r означает число целых x таких, что числа $x, x + a_1, \dots, x + a_{r-1}$ все будут первообразными корнями по модулю p.

Тогда $N_r \sim \varphi^r (p-1)/p^{r-1}$ $(p \to \infty)$. В. А. Голубев

4581. Применение теоремы Штикельбергера Карлиц (An application of a theorem of Stickelberger. Carlitz L.), Simon Stevin, 1956, **31**, № 1, 27—30 (англ.)

Пусть $q = p^t$, где p — нечетное, $GF(q)$ — конечное поле степени q и $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$, где $a_i \in GF(q)$ и $f(x) = g_1(x) \dots g_s(x)$, где $g_i(x)$ — различные неприводимые полиномы $\in GF[q, x]$.

Тогда, если $\psi(a) = +1$ для a квадрата в $GF(q)$ и $\psi(a) = -1$ для a не квадрата, то $\psi(D) = (-1)^{n-s}$, где D — дискриминант полинома $f(x)$.

Автор обобщает этот результат для колец $GF[q, x, u]$ и находит число решений в $GF(q)$ уравнения $D(\zeta_1, \dots, \zeta_n) = \eta^2$, где $D(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ — дискриминант многочлена $f(x)$. М. А. Пробст

4582. Распределение матриц над конечным полем. Карлиц, Ходжес (Distribution of matrices in a finite field. Carlitz L., Hodges John H.), Pacif J. Math., 1956, **6**, № 2, 225—230 (англ.)

Доказывается:

1. Число неособенных квадратных матриц порядка m с элементами из конечного поля $GF(q)$ равно

$$Y(m) = g_m \sum \frac{1}{\Phi(M(x))},$$

где суммирование идет по всем многочленам $M(x)$ степени m с коэффициентами из поля $GF(q)$ (и со старшим коэффициентом 1),

$$g_m = \prod_{r=0}^{m-1} (q^m - q^r), \quad \Phi(M(x)) = q^m \prod_{P(x) | M(x)} \left(1 - \frac{1}{|P(x)|}\right),$$

а $P(x)$ пробегает неприводимые над $GF(q)$ делители $M(x)$, $|P(x)| = q^e$, e — степень $P(x)$.

2. Число всех классов подобных матриц порядка m над $GF(q)$ равно

$$N(m) = \sum_{k_1+2k_2+\ldots+mk_m} q^{k_1+k_2+\ldots+k_m}.$$

Определяется также число классов подобных матриц порядка m над $GF(q)$, у которых один определенный инвариантный делитель соответствующих им характеристических многочленов имеет фиксированную степень. Б. М. Уразбаев

4583. Некоторые гипергеометрические сравнения. Карлиц (Some hypergeometric congruences. Carlitz L.), Portug. math., 1953, **12**, № 3—4, 119—128 (англ.)

Пользуясь результатами, данными, например, в книге Бейли (Bailey W. D., Generalized hypergeometric series, Cambridge, 1935), автор выводит ряд сравнений, например

$$\frac{1}{p}\sum_{r=0}^{m}(4r+1)\left(\frac{1\cdot 3\ldots(2r-1)}{2\cdot 4\ldots 2r}\right)^4 \equiv 1 \pmod{2m+1},$$

где $2m+1$ — простое число. В. А. Голубев

4584. О сравнениях с данными корнями. Хойнацкая-Пневская (Sur les congruences aux racines données. Chojnacka-Pniewska M. M.), Ann. polon. math., 1956, **3**, № 1, 9—12 (франц.)

Пусть m — данный модуль и $x_1, \ldots, x_k$ — произвольная система различных вычетов по модулю m. Существует ли всегда полином $f(x)$ с целыми коэффициентами, для которого корнями сравнения $f(x) \equiv 0 \pmod{n}$ будут исключительно числа $x_1, \ldots, x_k$ и числа, сравнимые с ними по модулю m? Рассматриваются два случая: m — простое и m — составное. В первом случае ответ на поставленный вопрос положителен, во втором случае — отрицателен.

Б. М. Бредихин

4585. Число рекуррентных циклов. Парамесваран (Number of recurring cycles. Parameswaran S.), Monatsh., Math., 1956, **60**, № 3, 183—189 (англ.)

Известно, что число различных периодов, получающихся при обращении дроби M/N в десятичную, равно a, если $(N, 10) = 1$, N — простое, $10^a \equiv 1 \pmod{N}$, где a — наименьший показатель сравнения. Доказывается формула числа периодов дроби M/N, если $(N, 10) = 1$, N — число составное, $M = 1, 2, \ldots, (N-1)$. В. А. Голубев

4586. Упрощенное доказательство постулата Бертрана. Артюхов М. М., Уч. зап. Северо-Осетинск. гос. пед. ин-та, 1956, вып. 20, 235—240

Дано элементарное доказательство постулата Бертрана. Оно основано на известном неравенстве

$$C_{2m}^{m} > \frac{2^{2m}}{2m+1} \qquad (1)$$

и лемме: Для любого целого k справедливо неравенство $M(k) < k^2 2^{2k}$, где $M(k)$ — наименьшее общее кратное чисел $2, 3, 4, \ldots, k$.

Допустив, что между m и $2m$ нет ни одного простого числа, получим: $2C_{2m}^{m} \leqslant M(n)\,M(\nu)$, где n — наибольшее целое число, не превосходящее $2m/3$, ν — наибольшее целое, не превосходящее $\sqrt{2m}$. Отсюда по лемме имеем неравенство $C_{2m}^{m} < (4/9)\, m^2 2^{4m/3+2\sqrt{m}}$; правая часть его при $m > 78$ меньше, чем $2^{2m}/(2m+1)$, что приводит к противоречию с неравенством (1).

В. А. Голубев

4587. Об ошибочном предложении Корсельта относительно составных чисел m, делящих $a^m - a$. Шапрон (Sur une proposition erronée de Korselt relative aux nombres composés m qui divisent $a^m - a$. Chapron R.), Bull. sci. math., 1956, **80**, mai-juin, 81—83 (франц.)

В книге Диксона (Dickson L. E., History of the theory of numbers, New-York, 1934. **I**, 93) имеется заметка: «А. Корсельт сообщил, что сравнение $a^m \equiv a \pmod{m}$ справедливо тогда и только тогда, когда m не делится на точный квадрат и когда $m-1$ делится на наименьшее общее кратное чисел $p_1 - 1, p_2 - 1, \ldots, p_n - 1$, где $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — простые делители m».

Это предложение опровергается на примерах; вместо него дается новое предположение автора.

В. А. Голубев

4588. О множимых совершенных числах. Бугулов Е. А., Уч. зап. Северо-Осетинск. гос. пед. ин-та, 1956, вып. 20, 241—248

Доказывается ряд несложных теорем, устанавливающих возможные или невозможные формы для кратных (множимых) совершенных чисел и тем облегчающих их нахождение. Устанавливается связь между проблемами кратных совершенных чисел и нечетных совершенных чисел. Дана таблица 30 кратных совершенных чисел (ср. РЖМат, 1954, 3208; 1955, 2554).

В. А. Голубев

4589. Замечание к проблеме Полиньяка. Огай С. В., Уч. зап. Кирг. гос. заочн. пед. ин-та, 1956, вып. 2, 7

Элементарно доказывается, что разрешимость уравнения

$$[(p-2n-1)!+1]\,2n\,(2n)! + (p-2n)\,[(2n)!-1] = p\,(p-2n)\,s$$

в целых числах при данном натуральном n является необходимым и достаточным условием того, чтобы числа $p - 2n > (2n-1)!$ и p были одновременно простыми. Н. В. Гордеев

4590. Целые положительные решения некоторых уравнений. Лу Цзинь-янь (某些方程的整數解. 陸覲彥), 數學通訊, Шусюэ туньсюнь, 1956, № 63, 1—13 (кит.)

Рассматриваются уравнения видов $x^2 + y^2 + \ldots = t^2$, $x^3 + y^3 + z^3 = t^3$ и приводятся известные элементарные факты о решениях этих уравнений в виде целых рациональных функций от нескольких параметров.

Г. В. Емельянов

4591. Теорема пифагоровой арифметики. Сабо (Ein Lehrsatz der pythagoreischen Arithmetik. Szabó Árpád), Elem. Math., 1956, **11**, № 5, 101—105 (нем.)

В девятой книге «Начал» Евклида (теорема 20) доказывается, что число простых чисел бесконечно. Ставится вопрос, к какому времени относится возникновение этой теоремы. Беккер (Becker O., Quell. Gesch. Math., 1936, **3B**, 533—553) считает эту теорему, вместе с 16 следующими за нею теоремами, дополнением, не связанным с предшествующим содержанием «Начал».

Устанавливается связь теоремы 20 с некоторыми теоремами 7-й книги Евклида, из которых 32-я теорема служит леммой для теоремы 20, и высказывается предположение, что теорема 20 возникла во время Пифагора (V—VI в. до н. э.). В. А. Голубев

4592. Об основных решениях уравнения $a^2+b^2+c^2=d^2$. Штейгер (Über die Grundlösungen der Gleichung $d^2+b^2+c^2=d^2$. Steiger Franz), Elem. Math., 1956, **11**, № 5, 105—108 (нем.)

Основными решениями данного уравнения называются решения в натуральных числах a, b, c, d, при этом $(a, b, c, d) = 1$. Без доказательства даны фор-

мулы для основных решений данного уравнения и условия, при которых эти формулы дают все основные решения по одному разу каждое. Дана таблица 347 основных решений уравнения для $d \leqslant 99$.

В. А. Голубев

4593. Общий признак делимости чисел. Киршт (Eine allgemeine Teilbarkeitsregel. Kirscht H.), Math. und naturwiss. Unterr., 1956, 9, № 6, 265—267 (нем.)

Пусть z — нечетное и не кратное пяти число. Полагаем $az = 10n \pm 1$, где $a = 1$, если z оканчивается на 1 или 9, а $a = 3$, если z оканчивается на 3 или 7. Получен следующий общий признак делимости чисел: число N делится на z, если путем вычитания взятой n раз последней цифры числа N из числа, образованного остальными цифрами числа N, для случая $az = 10n + 1$, или путем сложения увеличенной в n раз последней цифры числа с числом, образованным остальными цифрами числа N, для случая $az = 10n - 1$, получится число, делящееся на z.

В. А. Голубев

4594. Двенадцатиричная система обозначения с коммерческими и научными таблицами. Холрайт (A duodecimal notation with commercial and scientific tables. Hallwright Horatio W.), Duodecimal Bull., 1956, **10**, № 1, 1—6 (англ.)

Пропагандируется двенадцатиричная система счисления. Даны таблицы предлагаемой автором системы мер длины, площадей, объемов, веса, монет, времени в двенадцатиричной системе счисления.

В. А. Голубев

4595 К. Арифметические таблицы. Якоби (Canon Arithmeticus. Jacobi C. G. J.), Berlin Akad. Verlag, 1956, 432 S., il. (нем.)

Книга представляет собой новое, переработанное издание (под ред. Г. Брандта) известных арифметических таблиц Якоби. Основная ее часть содержит таблицы индексов для простых модулей до 1000, причем для каждого модуля, кроме обычных двух таблиц (переходы $x \to \operatorname{ind} x$, $\operatorname{ind} x \to x$), имеются таблицы переходов $\operatorname{ind} x \to \operatorname{ind}(x+1)$, $\operatorname{ind} x \to \operatorname{ind}(x-1)$; последние таблицы удобны для вычисления индексов сумм и разностей. Дополнительно даны значения индексов для модулей вида p^α, $2p^\alpha$ ($\leqslant 1000$), $p > 2$ — простое, и для модулей 2^β ($4 \leqslant \beta \leqslant 11$).

Б. Б. Венков

См. также: 4915 К, 5224.

АЛГЕБРА

4596 К. Алгебра и ее применение. Гров (Algebra and its use. Vol. 1. Grove Ethel L. et al. Amer. book, 1956, 454 pp., ill., 3.20 doll.), Cumul. Book Index, 1956, 59, № 2, 41 (англ.)

4597 К. Неравенства. Изд. 2-е. Коровкин П. П. М., Гостехиздат, 1956, 56 стр., илл., 95 к.

4598 К. Сборник задач по высшей алгебре. Учебн. пособие для гос. ун-тов и пед. ин-тов. Изд. 6-е, стереотипн. Фаддеев Д. К., Соминский И. С. М., Гостехиздат, 1956, 308 стр., 7 р. 20 к.

4599 К. Курс высшей алгебры (Для ун-тов и пед. ин-тов). Изд. 5-е, стериотипн. Курош А. Г. М., Гостехиздат, 1956, 379 стр., илл., 8 р. 30 к.

4600 К. Современная алгебра. Кезанн, Делаше (L'algèbre moderne. Queysanne M., Delachet André, Paris, Presses univ. France, 1955, 163 p. ill., 153 fr.) (франц.)

Популярная брошюра, посвященная элементам современной алгебры.

Ю. И. Соркин

МНОГОЧЛЕНЫ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

4601. О числе размещений супругов за круглым столом. Шао Пин-цун (關於夫妻圍桌入坐公式的討論. 邵品琮), 數學通報, Шусюэ тунбао, 1956, № 9, 10—11 (кит.)

4602. Замечание к одной задаче Заранкевича. Чулик (Poznámka k problému K. Zarankiewioze. Čulík Karel), Práce Brněnské základ. Českosl. akad. véd, 1955, **27**, № 7, 341—348 (чеш.; рез. русс., франц.)

Рассматривается следующая задача Заранкевича (Zarankiewicz K., Colloq. math., 1951, 2, 301, problém 101): для данных чисел n, m, i и j найти такое число p_0, чтобы любая целочисленная $n \times m$-матрица, по крайней мере p_0 элементов которой равны нулю, содержала $i \times j$-подматрицу состоящую только из нулей. Пользуясь результатами Серпинского (РЖМат, 1955, 2105) и Ковари—Шош—Турана (РЖМат, 1956, 203), автор определяет число p_0 для случая: $3 \leqslant m \leqslant 8$, $3 \leqslant n \leqslant 8$, $i = j = 3$.

V. T. Sós

4603. Некоторые алгебраические тождества. Хуа Ло-гэн (Някои алгебрични тъждества. Хуа Ло-кен), Изв. Матем. ин-т Бълг. АН, 1956, 2, № 1, 3—12 (болг.; рез. русск., англ.)

Элементарное доказательство следующих тождеств:

$$1)\ \sum_{i_1, \ldots, i_n} \delta^{1, \ldots, n}_{i_1, \ldots, i_n} x_{i_1}^{n-1} x_{i_2}^{n-2} \ldots x_{i_{n-1}} (1 - x_{i_1})^{-1} \times$$

$$\times (1 - x_{i_1} x_{i_2})^{-1} \ldots (1 - x_{i_1} \ldots x_{i_n})^{-1} = D(x_1, \ldots, x_n) \times$$

$$\times \left(\prod_{i=1}^{n} (1 - x_i) \right)^{-1} \left(\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (1 - x_i x_j) \right)^{-1};$$

$$2)\ \sum_{i_1, \ldots, i_n} \delta^{1, \ldots, n}_{i_1, \ldots, i_n} x_{i_1}^{n-1} x_{i_2}^{n-2} \ldots x_{i_{n-1}} \left(1 - x_{i_1}^2\right)^{-1} \times$$

$$\times \left(1 - x_{i_1}^2 x_{i_2}^2\right)^{-1} \ldots \left(1 - x_{i_1}^2 \ldots x_{i_n}^2\right)^{-1} = D(x_1, \ldots, x_n) \times$$

$$\times \left(\prod_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} (1 - x_i x_j) \right)^{-1};$$

$$3)\ \sum_{i_1, \ldots, i_n} \delta^{1, \ldots, n}_{i_1, \ldots, i_n} x_{i_1}^{n-1} x_{i_2}^{n-2} \ldots x_{i_{n-1}} (1 - x_{i_1} x_{i_2})^{-1} \times$$

$$\times (1 - x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4})^{-1} \ldots (1 - x_{i_1} \ldots x_{i_{2^\nu}})^{-1} =$$

$$= D(x_1, \ldots, x_n) \left(\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (1 - x_i x_j) \right)^{-1},$$

$$\left(D(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_i - x_j);\ \delta^{1, \ldots, n}_{i_1, \ldots, i_n} = (-1)^t,\right.$$

где t — число инверсий в перестановке $i_1, \ldots, i_n$; $\left.\nu = \left[\frac{n}{2}\right]\right)$.

С. Д. Берман

4604. Алгебра многочленов. Заманский (Algèbre des polynômes. Zamansky Marc), Enseign. math., 1956, 2, № 4, 293—306 (франц.)

Изложение элементарных свойств кольца многочленов над полем комплексных чисел.

4605. Об общем подходе к решению уравнений 2-й, 3-й и 4-й степени с одним неизвестным. Огай С. В., Уч. зап. Кирг. гос. заочн. пед. ин-та, 1956, вып. 2, 8—9

4606. О корнях алгебраических уравнений с действительными коэффициентами. Обрешков (Über die Wurzeln von algebraischen Gleichungen mit reellen Koeffizienten. Obreschkoff Nikola), Докл. Болгар. АН, 1956, 9, № 3, 1—3 (нем.; рез. русск.)

Доказываются некоторые теоремы о корнях второй производной многочлена с действительными коэффициентами и рассматривается действительность корней частичных сумм биномиального ряда. Резюме автора.

4607. О корнях уравнения четвертой степени. Боттема (On the roots of the biquadratic equation. Bottema O.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch, 1956, A59, № 4, 407—410; Indagationes math, 1956, 18, № 4, 407—410 (англ.)

Обычный метод определения числа действительных корней уравнения $x^4 + ax^2 - bx + c = 0$ состоит в изучении дискриминантной поверхности в трехмерном (a, b, c)-пространстве. Автор предлагает новый метод, позволяющий проводить исследование на плоскости, не выходя в трехмерное пространство.

Ю. И. Соркин

4608. Условие Рауса—Гурвица для уравнения четвертой степени. Боттема (The Routh-Hurwitz condition for the biquadratic equation. Bottema O.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1956, A59, № 4, 403—406- Indagationes math., 1956, 18, № 4, 403—406 (англ.)

Элементарный вывод условий Рауса—Гурвица для многочлена четвертой степени. Ю. И. Соркин

4609. Введение определителей. Майо (Une introduction aux déterminants. Maillot F.), Rev. math. spéc., 1957, 67, № 6, 453—455 (франц.)

Доказано, что определитель квадратичной матрицы $A = \| a_{ij} \|$ можно определить как многочлен от ее элементов, принимающий нулевое значение тогда и только тогда, когда столбцы матрицы A линейно зависимы, и для любой диагональной матрицы равный произведению ее диагональных элементов.

А. И. Ширшов

4610. Одно условие диагонализуемости матриц. Фарахат, Мирский (A condition for diagonability of matrices. Farahat H. K., Mirsky L.), Amer. Math. Monthly, 1956, 63, № 6, 410—412 (англ.)

Доказано, что матрица A тогда и только тогда подобна диагональной, когда для любого числа ω матрица $A - \omega I$ принадлежит некоторой мультипликативной группе матриц (если ω — характеристическое число матрицы A, то эта группа состоит из вырожденных матриц). Ф. Р. Гантмахер

4611. Нижняя граница для диагональных элементов неотрицательной матрицы. Перфект (A lower bound for the diagonal elements of a non-negative matrix. Perfect Hazel), J. London Math. Soc., 1956, 31, № 4, 491—493 (англ.)

Доказано неравенство

$$x \geqslant \frac{1}{n}\left\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i - \sqrt{(n-1)\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_i - \lambda_j)^2}\right\}$$

где χ — произвольный диагональный элемент, а $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — характеристические числа неотрицательной $n \times n$-матрицы. Ф. Р. Гантмахер

4612. О собственных значениях эндоморфизмов векторного пространства. Фукухара (Sur les valeurs propres des endomorphismes de l'espace vectoriel. Hukuhara Masuo), Proc. Japan Acad., 1955, 31, № 3, 126—127 (англ.)

Пусть L — эндоморфизм конечномерного векторного пространства над полем комплексных чисел K и $H = f(L)$, где f — некоторый многочлен над K. Доказано, что если $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — различные корни уравнения $f(\lambda) = \rho_0$ ($\rho_0 \in K$), имеющие соответственно кратности $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$, то подпространство $N^m[H; \rho_0] = \{x; (H - \rho_0 E)^m_x = 0\}$ является прямой суммой пространств $N^m{}_{\mu_k}[L; \lambda_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

В. А. Андрунакиевич

4613. Поведение характеристического корня присоединенной и сопряженной матриц. Ян Сюн (附屬方陣及合成方陣的特徵根之性質. 楊雄), 新科學, Синь кэсюэ, 1954, № 2, 21—25 (кит.)

4614. К матричному исчислению. II. Бодевиг (Zum Matrizenkalkul. II. Bodewig E.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wet., 1956, A59, № 3, 301—304; Indagationes math., 1956, 18, № 3, 301—304 (нем.) Ч. I см. РЖМат, 1955, 4876.

Приводится новое доказательство и излагаются некоторые применения следующей теоремы Веддербарна: для любых столбцов s и z ранг матрицы $A_1 = A - \gamma (As_s)(z'A)$, где $\gamma^{-1} = z'As_s \neq 0$, на единицу меньше ранга матрицы A. Из этой теоремы, в частности, вытекает, что любую матрицу A с характеристическими числами $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ можно представить в виде $\frac{1}{u_1's}(As)u_1' + A_1$, где матрица A_1 имеет характеристические числа $0, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, а u_1 — собственный столбец для характеристического числа λ_1 (так называемое расщепление Виландта). Ф. Р. Гантмахер

4615. О нормальных матрицах. Мирский (A note on normal matrices. Mirsky L.), Amer. Math. Monthly, 1956, 63, № 7, 479 (англ.)

Доказывается известная теорема о том, что матрица BA нормальна, если нормальны матрицы A, B и AB. А. И. Ширшов

4616. Простые идеалы в матричных кольцах. Сандс (Prime ideals in matrix rings. Sands Arthur D.), Proc. Glasgow. Math. Assoc., 1956, 2, № 4, 193—195 (англ.)

Пусть R — произвольное кольцо и $M(R)$, — его радикал в смысле Нагата, т. е. пересечение всех простых максимальных идеалов кольца R. Доказывается, что $M(R_n) = [M(R)]_n$, где R_n — полное кольцо матриц порядка n над кольцом R.

В. А. Андрунакиевич

4617. О комплексных ортогональных преобразованиях. Моринага, Ноно (On the complex orthogonal transformations. Morinaga Kakutaro, Nôno Takayuki), J. Sci. Hiroshima Univ., 1955, A18, № 3, 349—377 (англ.)

Рассматривается комплексная ортогональная группа O_g, т. е. группа свех комплексных матриц M порядка n, удовлетворяющих соотношению $M'gM = g$, где g — фиксированная невырожденная симметрическая матрица. Преимущественно изучаются матрицы вращений, т. е. ортогональные матрицы с определителем 1. Используя экспоненциальное представление, авторы разбивают совокупность этих матриц на четыре класса. Устанавливаются разложения матриц каждого из классов в произведения матриц вращений плоскости. М. И. Граев

4618. О строении унитарных симплектических групп. Минакшисундарам (On the structure of unitary symplectic groups. Minakshisundaram S.), 1955, J. Indian Math. Soc.) 19, № 3—4, 105—120 (англ.)

Сферой Римана называется множество всех инволютивных матриц порядка $2n$, имеющих вид $(H, S) = \begin{bmatrix} -H & \overline{S} \\ S & \overline{H} \end{bmatrix}$, где H — эрмитова, а S — симметрическая матрицы порядка n. Точка (H, S) сферы Римана

называется неисключительной, если матрица $E_n - H$ невырождена. Оказывается, что формулы

$$Z = S(E-H)^{-1};\ H = (\bar{Z}Z+E)^{-1}(\bar{Z}Z-E),$$
$$S = 2Z(\bar{Z}Z+E)^{-1}$$

определяют взаимно однозначное соответствие между неисключительными точками (H, S) сферы Римана и симметрическими матрицами Z порядка n.

Внутренний автоморфизм, осуществляемый некоторой невырожденной матрицей, тогда и только тогда переводит сферу Римана в себя, когда эта матрица лишь скалярным множителем отличается от унитарной симплектической матрицы. Группа внутренних автоморфизмов, осуществляемых унитарными симплектическими матрицами, транзитивна на сфере Римана.

В заключение показано, что любую унитарную симплектическую матрицу $\mathfrak{M}$ можно представить в виде

$$\mathfrak{M} = \begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & \bar{u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_d & B_d \\ -\bar{B}_d & \bar{A}_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & \bar{u}_1 \end{bmatrix},$$

где u, u_1 — унитарные, а A_d и B_d — диагональные матрицы.

Имеются опечатки, например, в формуле (9) на стр. 109 вместо $(\bar{Z}Z+E)$ должно быть $(\bar{Z}Z+E)^{-1}$.

Д. А. Супруненко

4619. Энергетические соотношения в многополюсниках. Шекель (Energy relations in multiterminal transducers. Shekel Jacob), IRE Trans. Circuit Theory, 1955, CT-2, № 3, 268—271 (англ.)

Как известно, соотношение между вектором $x_1 = \begin{Vmatrix} v_1 \\ i_1 \end{Vmatrix}$ на входе и вектором $x_2 = \begin{Vmatrix} v_2 \\ i_2 \end{Vmatrix}$ на выходе многополюсника задается формулой $x_1 = Kx_2$, где K — некоторая матрица, которую, в соответствии с разбиением векторов x_1, x_2 на векторы v_1, i_1 и v_2, i_2, соответственно можно представить в блочном виде $K = \left\| \begin{matrix} A & B \\ C & D \end{matrix} \right\|$. Пусть $P = \frac{1}{2}\left(i_1^* v_1 + v_1^* i_1 - i_2^* v_2 - v_2^* i_2\right)$.

С помощью матриц A, B, C, D автор выписывает условия того, чтобы многополюсник был: 1) без потерь ($P=0$); 2) пассивным ($p>0$); 3) активным ($P<0$).

В добавлении к работе рассматриваются многополюсники, удовлетворяющие одному из соотношений: $K^{-1} = E_1 K E_1$, $K^{-1} = E_2 K' E_2$, $K^{-1} = E_3 K^* E_3$, где

$$E_1 = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\|,\ E_2 = \left\| \begin{matrix} 0 & j1 \\ -j1 & 0 \end{matrix} \right\|,\ E_3 = \left\| \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \right\|$$

(1 — единичная матрица порядка n, а $j = \sqrt{-1}$).

М. А. Наймарк

4620. Об общих матричных уравнениях некоторых классов механизмов. Калицин (Върху единните матрични уравнения на някои класи от механизми. Калицин Г. С.), Изв. Техн. ин-т Българ. АН, 1956, кн. 4. 51—74 (болг.; рез. русск., нем.)

4621. О вполне позитивных матрицах. Лёвнер (On totally positive matrices. Loewner Charles), Math. Z., 1955, **63**, № 3, 338—340 (англ.)

Пусть s_n — полугруппа всех невырожденных вполне положительных (т. е. имеющих только неотрицательные миноры) матриц порядка n, а σ_n — совокупность всех матриц вида $(dU(t)/dt)_{t=0}$, где $U(t)$, $0 \leqslant t \leqslant t_0$ — дифференцируемая матричная функция, принимающая значения в полугруппе s_n.

Доказывается, что матрица $\Omega = (\omega_{ij})$ тогда и только тогда принадлежит σ_n, когда $\omega_{ij} = 0$, если $|i-j|>1$, и $\omega_{ij} \geqslant 0$, если $|i-j| = 1$. С помощью одной теоремы Уитнея (Whitney A. M., J. Analyse Math., Jerusalem, 1952, **2**, 88—92) отсюда выводится, что полугруппа s_n порождается совокупностью своих инфинитезимальных элементов, т. е. всякую матрицу из s_n можно представить в виде $U(t_0)$, где $U(t)$, $0 \leqslant t \leqslant t_0$, — решение уравнения $dU(t)/dt = \Omega(t)U(t)$ с кусочно непрерывной матричной функцией $\Omega(t)$, $0 \leqslant t \leqslant t_0$, все значения которой принадлежат σ_n.

М. А. Наймарк

4622. Курс прикладного матричного исчисления. Дени-Папен, Кауфман (Cours de calcul matriciel, appliqué. Denis-Papin M., Kaufmann A.), Electro-techn. hydrauf., radio, 1956, № 221, Suppl. № 220, 9—23; № 222, 23—38 (франц.)

4623 К. Матричное исчисление. Бодевиг (Matrix calculus. Bodewig Ewald Konrad. Amsterdam, North-Holl. Publ. Co., 1956, xii, 334 pp., 53 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1956, № 351 (англ.)

4624 Д. Изучение эффективности некоторых методов нахождения характеристических чисел и собственных векторов симметрических матриц. Зейбл (A study of the effectiveness of several methods for obtaining the characteristic values and vectors of symmetric matrices. Zabel Norman Ralph. — Doct. diss. Univ. Nebraska, 1955), Dissert. Abstrs, 1955, **15**, № 5, 853—854 (англ.)

ГРУППЫ

4625. Конечные абелевы группы с изоморфными групповыми алгебрами. Дескинс (Finite Abelian groups with isomorphic group algebras. Deskins W. E.), Duke Math., J., 1956, **23**, № 1, 35—40 (англ.)

Доказывается, что групповые алгебры конечных абелевых групп G и K над полем характеристики p тогда и только, тогда изоморфны, когда изоморфны примарные по p компоненты P и Q этих групп и групповые алгебры фактор-групп G/P и K/Q.

А. П. Мишина

4626. Характеры и представления imprimитивных групп. Литлвуд (The characters and representations of imprimitive groups. Littlewood D. E.), Proc. London Math. Soc., 1956, **6**, № 22, 251—266 (англ.)

Пусть множество из rs элементов разбито на непересекающиеся подмножества $M_1, \ldots, M_s$, каждое из которых содержит r элементов. Изучаются представления imprimитивной группы H, являющейся полупрямым произведением GF нормального делителя G, состоящего из всех подстановок симметрической группы S_{rs}, оставляющих на месте каждое подмножество M_i $(i=1, \ldots, s)$, и подгруппы F, состоящей из всех подстановок группы S_{rs}, переводящих подмножества $M_1, \ldots, M_s$ друг в друга.

Пусть $R(G, K)$ — групповая алгебра группы G над полем K комплексных чисел. В соответствии с тем, что группа G разлагается в прямое произведение $G = G_1 \times \ldots \times G_s$, где каждая подгруппа G_i $(i=1, \ldots, s)$ изоморфна симметрической группе степени r, минимальные идемпотенты алгебры $R(G, K)$ записываются в виде $\varepsilon = \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_s$, где ε_i — минимальные идемпотенты алгебр $R(G_i, K)$.

Идемпотенты ε попарно ортогональны и переходят друг в друга под действием внутренних автоморфизмов группы G, порожденных элементами $g \in F$. Отсюда вытекает, что минимальные идемпотенты алгебры $R(H, K)$, в сумму которых разлагается идемпотент ε, имеют вид $\varepsilon\mu$, где μ — минимальный идемпотент алгебры $R(F', K)$; F' — подгруппа группы F, состоящая из всех таких элементов $g \in G$, что $g^{-1}\varepsilon g = \varepsilon$.

Если среди идемпотентов $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s$ i идемпотентов соответствуют разбиению (λ_1) числа r, j идемпо-

тентов — разбиению (λ_2) и т. д., то группа F' представляется как прямое произведение групп, изоморфных соответственно симметрическим группам S_i, S_j и т. д., и, следовательно, идемпотент μ есть произведение минимальных идемпотентов алгебр групп S_i, S_j и т. д. Получающиеся формулы для минимальных идемпотентов алгебры $R(H, K)$ позволяют определить характеры группы H. Если $r=2$, то группа H изоморфна так называемой гипероктаэдральной группе. В этом случае характеры группы H были определены Янгом (Young A., Proc. London Math. Soc., 1930, 31 (2), 273—288). С. Д. Берман

4627. О блоках характеров симметрических групп. Фарахат (On the blocks of characters of symmetric groups. Farahat H.), Proc. London Math. Soc., 1956, 6, № 24, 501—517 (англ.)

Пусть $\omega_\rho^{(\lambda)}$ — простой характер центра группового кольца симметрической группы S_n, соответствующий простому характеру $\chi_\rho^{(\lambda)}$ самой группы S_n. Дано новое доказательство теоремы о том, что характеры $\chi_\rho^{(\lambda)}$ и $\chi_\rho^{(\mu)}$ входят в один и тот же p-блок лишь тогда, когда соответствующие разбиения (λ) и (μ) числа n на целые положительные слагаемые сравнимы по модулю p. Доказательство основывается на рассмотрении многочленов $\left(Q_\lambda^\xi\right) = \sum \omega_\rho^{(\lambda)} \xi^{t_\rho}$ от неизвестной ξ, где суммирование производится по всем классам (ρ) группы S_n, а t_ρ — число циклов в подстановках класса (ρ). Выведены формулы, посредством которых через многочлены $\left(Q_\lambda^\xi\right)$ выражаются как число простых характеров, так и число неприводимых модулярных характеров группы S_n, относящихся к какому-либо p-блоку. В. К. Туркин

4628. О конечных группах, структура композиционных подгрупп которых модулярна. Цаппа (Sui gruppi finiti per cui il reticolo dei sottogruppi di composizione è modulare. Zappa Guide), Bol. Unione mat. ital., 1956, 11, № 3, 315—318 (итал.)

Доказано, что структура композиционных подгрупп (т. е. подгрупп, входящих хотя бы в один композиционный ряд группы) конечной группы тогда и только тогда модулярна, когда все примарные факторы каждого нормального ряда группы квазиабелевы (т. е. любые их подгруппы перестановочны друг с другом). Кроме того, доказано, что если все подгруппы Силова конечной группы квазиабелевы, то структура композиционных подгрупп группы модулярна. Это достаточное условие необходимо, если группа обладает главным рядом, факторы которого изоморфны подгруппам Силова (в частности, если группы сверхразрешимы). В. К. Туркин

4629. Характеры группы кубической поверхности. Эдж (The characters of the cubic surface group. Edge W. L.), Proc. Roy. Soc., 1956, A237, № 1208, 132—147 (англ.)

На основе представления группы G автоморфизмов системы 27 прямых, расположенных на неособой кубической поверхности, как группы 5-мерных ортогональных матриц над простым полем характеристики 3, вычислены характеры группы G, ранее найденные (другим методом) Фреймом (Frame J. S., Ann. mat. pura ed appl., 1951, ser. 4, 32, 83). С. Д. Берман

4630. Теорема о когомологически тривиальных модулях над конечной группой. Накаяма (A theorem on modules of trivial cohomology over a finite group. Nakayama Tadasi), Proc. Japan Acad., 1956, 32, № 6, 373—376 (англ.)

Пусть G — конечная группа. G-модуль A называется когомологически тривиальным, если $H^n(H, A)=0$ для всех целых n и для всех подгрупп H группы G. Доказывается, что если G есть p-группа и при некотором целом r группы $H^r(G, A)$ и $H^{r+1}(G, A)$ тривиальны, то G-модуль A когомологически тривиален. На примерах показано, что это утверждение не переносится на произвольные конечные группы.

З. И. Боревич

4631. О квазинеразложимых периодических абелевых группах. Селе (On quasi-indecomposable abelian torsion groups. Szele T.), Acta math. Acad. sci. hung., 1956, 7, № 1, 109—114 (англ.; рез. русск.)

Абелева группа называется квазинеразложимой, если она не может быть разложена в прямую сумму бесконечного числа групп. Доказывается, что мощность всякой периодической квазинеразложимой группы меньше или равна мощности континуума. Периодической квазинеразложимой группой мощности континуума является, например, периодическая часть A полной прямой суммы циклических групп порядков p, $p^2, \ldots, p^k$ (где p — простое число). Доказывается, что всякое прямое слагаемое группы A либо конечно, либо имеет мощность континуума; описываются все эндоморфизмы группы A и доказывается, что всякий эндоморфный образ этой группы либо конечен, либо счетен, либо имеет мощность континуума. А. П. Мишина

4632. О периодических абелевых группах, которые не могут быть представлены в виде прямой суммы заданного кардинального числа компонент. Фукс (On abelian torsion groups which can not be represented as the direct sum of a given cardinal number of components. Fuchs L.), Acta math. Acad. sci. hung., 1956, 7, № 1, 115—124 (англ.; рез. русск.)

Пусть $\mathfrak{m}$ — произвольное кардинальное число. Группа (мощности не меньшей $\mathfrak{m}$) называется $\mathfrak{m}$-неразложимой, если она не разлагается в прямую сумму подгрупп, мощность множества которых больше или равна $\mathfrak{m}$. Доказано, что среди редуцированных примарных абелевых групп тогда и только тогда существуют $\mathfrak{m}$-неразложимые группы, когда либо существует такое кардинальное число $\mathfrak{n}$, что $\mathfrak{n} < \mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}^{\aleph_0}$, либо существует такая счетная последовательность кардинальных чисел $\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2, \ldots < \mathfrak{m}$, что $\sum_{i=1}^{\infty} \mathfrak{n}_i = \mathfrak{m}$. Мощность любой $\mathfrak{m}$-неразложимой примарной абелевой группы не превосходит $\mathfrak{m}^{\aleph_0}$. Счетных $\aleph_0$-неразложимых редуцированных примарных абелевых групп не существует. Периодическая группа $\mathfrak{m}$-неразложима тогда и только тогда, когда все ее примарные компоненты $\mathfrak{m}$ неразложимы, базисные подгруппы самое большее конечного числа примарных компонент имеют мощность $\mathfrak{m}$, а сумма мощностей базисных подгрупп остальных компонент меньше $\mathfrak{m}$.

А. П. Мишина

4633. Некоторые замечания о бесконечных симметрических группах. Каррасс, Золитар (Some remarks of the infinite symmetric groups. Karrass A., Solitar D.), Math. Z., 1956, 66, № 1, 64—69 (англ.)

Изучается группа Σ_S всех взаимно однозначных отображений бесконечного множества S на себя. В частности, доказывается теорема Бэра (Baer R., Studia Math., 1934, 5, 15—17) о том, что единственными нетривиальными нормальными делителями группы Σ_S являются знакопеременная группа A_S и подгруппы S_q (где q — произвольное бесконечное кардинальное число, не превосходящее мощности p множества S), состоящие из всех подстановок группы Σ_S, переставляющих менее чем q элементов. Кроме того, доказывается, что фактор-группа S_{q^+}/S_q, где

q^* — непосредственно следующее за q кардинальное число, является простой группой мощности p^q, содержащей изоморфные образы любой группы мощности q. Если $q < p$, то фактор-группы S_{p^*} / S_p и S_{q^*} / S_q не изоморфны.

В конце работы рассмотрена некоторая не дискретная топологизация группы Σ_S. С. Д. Берман.

4634. Свободные нильпотентные группы. Гольдина Н. П., Докл. АН СССР, 1956, **111**, № 3, 528—530

Описываются все неабелевы свободные подгруппы свободной n-ступенно нильпотентной группы с произвольным числом свободных образующих. Для свободной n-ступенно нильпотентной группы с конечным числом образующих описываются все подгруппы. Утверждается, что построен алгоритм решения проблемы тождества в свободной n-ступенно нильпотентной группе. Для свободной метабелевой группы этот алгоритм решает проблему сопряженности. Доказательств нет. Ю. И. Соркин

4635. О свободных подгруппах топологических групп. Бальцежик, Мыцельский (On free subgroups of topological groups. Balcerzyk S., Mycielski Jan.), Bull. Acad. Polon. Sci., 1956, Cl. 3, 4, № 7, 415 (англ.); Бюл. Польской АН, 1956, Отд. 3, 4, № 7, 407

Формулируются следующие теоремы: 1) каждая компактная связная неабелева группа содержит свободную подгруппу с 2^{χ_0} образующими; 2) каждая локально компактная связная неразрешимая группа содержит свободную подгруппу с 2^{χ_0} образующими; 3) каждая локально компактная не нульмерная абелева группа содержит свободную абелеву подгруппу с 2^{χ_0} образующими. R. Sikorski

4636. Пятая проблема Гильберта. Ямага (Hilbert の第五問題. 彌永昌吉) 科學, Кагаку, 1953, **23**, № 9, 469—470 (япон.)

4637. Расширения частично упорядоченных групп. Жаффар (Extensions des groupes ordonnés. Jaffard P.), Sémin. A. Châtelet et P. Dubreil. Fac. sci. Paris, 1953—1954 (1956), **7**, № 11, 1—10 (франц.)

Частично упорядоченная (ч. у.) абелева группа G называется частично упорядоченным расширением ч. у. группы Q по ч. у. группе H, если G является расширением группы Q по H в смысле общей теории групп, частичное упорядочение в G индуцирует на H заданное в ней частичное упорядочение, причем H является выпуклой подгруппой группы G, и частичное упорядочение, определяемое естественным образом на фактор-группе G/H, совпадает с заданным частичным упорядочением на Q. Группу G можно определить как множество $H \times Q$ с групповой операцией: $(a, x) + (b, y) = (a + b + f(x, y), x + y)$, где f — некоторое отображение множества $Q \times Q$ в множество H. Ч. у. расширение G называется лексикографическим, если $(a, x) \geqslant 0$ тогда и только тогда, когда $x > 0$ или $x = 0$ и $a \geqslant 0$. Ч. у. группа G называется прямой суммой ч. у. групп H и Q, если группа G является прямой суммой групп H и Q и $(a, x) \geqslant 0$ тогда и только тогда, когда $a \geqslant 0$ и $x \geqslant 0$.

Проблема нахождения ч. у. расширения G ч. у. группы Q по ч. у. группе H сводится к проблеме определения полугруппы P положительных элементов группы G. Множество P должно удовлетворять следующим условиям: $P \cap H = H_+$, $\varphi(P) = Q_+$ и $P + P \subset P$, где H_+, Q_+ — полугруппы положительных элементов соответственно групп H и Q, а $\varphi(x)$ — естественной гомоморфизм группы G на группу Q.

Непустое подмножество S группы H называется заостренной частью, если из того, что $a \in S$ и $b \geqslant a$ следует, что $b \in S$. Множество U всех заостренных частей группы H является ч. у. полугруппой относительно теоретико-множественного включения: $A \leqslant B$, если $A \supseteq B$. Полугруппа P определяет некоторое отображение ψ множества Q_+ в полугруппу U: для любого $x \in Q_+$ подмножество $\psi(x)$ состоит из тех и только тех элементов a группы H, для которых $(a, x) \in P$. Отображение ψ обладает следующими свойствами: $\varphi(0) = H_+$, $\psi(x) + \psi(y) + (f(x, y)) \geqslant \psi(x + y)$. Лексикографическому расширению соответствует, в частности, такое отображение ψ, что $\psi(0) = H_+$ и $\psi(x) = H$, если $x \neq 0$ $(x \in Q_+)$. Лексикографическое расширение G ч. у. группы Q по ч. у. группе H тогда и только тогда является структурно упорядоченной группой, когда имеет место один из следующих двух случаев: 1) H — структурно упорядоченная, а Q — упорядоченная группы, 2) $H = \{0\}$, а группа Q структурно упорядоченная.

Положительные элементы a и b структурно упорядоченной группы G называются эквивалентными, если для любого элемента $x \in G_+$ равенство $a \wedge x = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда $b \wedge x = 0$. Соответствующие классы эквивалентности называются нитями. Индуктивно определяется класс n (n — целое неотрицательное число) структурно упорядоченных групп: класс 0 состоит только из одной группы $\{0\}$; класс n состоит из конечных прямых сумм лексикографических расширений упорядоченных групп по структурно упорядоченным группам класса $n-1$. Оказывается, что число нитей структурно упорядоченной (абелевой) группы тогда и только тогда конечно, когда эта группа принадлежит к одному из классов n. А. А. Виноградов

4638. Замечание о частично упорядоченных группах. Мальцев А. И., Уч. зап. Ивановск. гос. пед. ин-та, 1956, **10**, 3—5

Доказаны следующие локальные теоремы для частично упорядоченных групп: Если всякая подгруппа H с конечным числом образующих частично упорядоченной группы G обладает центральной (разрешимой) системой выпуклых подгрупп (нормальных делителей) в H, то центральной (разрешимой) системой, состоящей из выпуклых подгрупп (нормальных делителей), обладает и группа G. Установлена также справедливость аналогичных локальных теорем для существования центральных (соответственно разрешимых) систем, все факторы которых не имеют кручения. Кроме того, показано, что всякая частично упорядоченная локально нильпотентная группа обладает центральной системой выпуклых подгрупп; для группы без кручения все факторы этой системы также не имеют кручения. А. А. Виноградов

4639. Полугруппы. (Demi-groupes.), Sémin. A. Châtelet et P. Dubreil. Fac. sci. Paris, 1953—1954 (1956), 7-e année, partie complémentaire, № 12—20, 84 p. (франц.)

Сборник докладов по теории полугрупп. Новых результатов нет. В докладе Риге (№ 18) в определении полугрупп Вагнера допущена неточность; очевидно, имеется в виду переместимость идемпотентов полугруппы. Л. М. Глускин

4640. Ассоциативные системы, структурно изоморфные группе. I, II. Петропавловская Р. В., Вестн. Ленингр. ун-та, 1956, № 13, 6—25; № 19, 80—99

Для ассоциативной системы **A** через $P(\mathbf{A})$ обозначается частично упорядоченное относительно включения множество всех ее подсистем. Системы **A** и **B** называются P-изоморфными, если изоморфны частично упорядоченные множества $P(\mathbf{A})$ и $P(\mathbf{B})$. Оказывается, что: 1) система, P-изоморфная группе без кручения, является группой; 2) P-изоморфные группы обладают изоморфными структурами подгрупп; 3) существуют

системы (не являющиеся группами); P-изоморфные примарным циклическим группам. Указано условие, необходимое и достаточное для того, чтобы группа была P-изоморфна ассоциативной системе, не являющейся группой, а также условие, необходимое и достаточное для того, чтобы ассоциативная система была P-изоморфна группе.

Конечная система $\mathbf{A}$ порядка $k-1$ называется циклической системой вида $|m, k|$, где $m<k$, если существует такой элемент A, степени которого исчерпывают систему $\mathbf{A}$ и $A^m=A^k$. Оказывается, что для конечной системы $\mathbf{A}$ порядка $k-1$ множество $P(\mathbf{A})$ тогда и только тогда линейно упорядочено, когда система $\mathbf{A}$ является циклической системой вида $|m, k|$, где $m<4$, а число $k-m$ либо равно единице, либо некоторой степени простого числа, причем, если $m=3$, то число k должно быть четно.

Циклическая группа порядка p^n (p — простое) тогда и только тогда P-изоморфна системе $\mathbf{A}$, когда либо $\mathbf{A}$ — циклическая группа порядка q^n, где q — простое, либо $\mathbf{A}$ — циклическая система вида $|2, q^{n-1}+2|$, где q — простое, либо $n\geqslant 2$ и $\mathbf{A}$ — циклическая система вида $|3, q^{n-2}+3|$, где q — простое нечетное число.

Для системы $\mathbf{A}$, P-изоморфной периодической группе, множество $P(\mathbf{A})$ является полной структурой. С другой стороны, множество $P(\mathbf{A})$ тогда и только тогда является полной структурой, когда в $\mathbf{A}$ существует идемпотент, принадлежащий циклической системе, порожденной любым элементом системы $\mathbf{A}$.

Система $\mathbf{A}$, содержащая идемпотент E, называется произведением относительно E непустого множества τ своих подсистем (обозначение: $\mathbf{A}=\prod_E \tau$), если: 1) любая система $\mathbf{B}\in\tau$ содержит E; 2) любая система $\mathbf{B}\in\tau$ содержит по крайней мере два элемента; 3) пересечение любых двух систем из τ состоит только из идемпотента E; 4) любой элемент каждой системы $\mathbf{B}\in\tau$ перестановочен с E; 5) если элементы B_1, B_2 принадлежат двум различным системам из τ, то $B_1B_2E=B_2B_1E$; 6) для любого элемента $X\in\mathbf{A}$, не принадлежащего ни одной системе из τ, существуют такие элементы $B_i\in B_i$, где $\mathbf{B}_i\in\tau$ ($i=1, 2, \ldots, n$), что $X=B_1B_2\ldots B_nE$.

Структура (полная) $\mathbf{P}$ называется прямой суммой множества π своих (полных) подструктур (обозначение: $\mathbf{P}=\sum\pi$), если: 1) любая подструктура из π содержит более одного элемента; 2) для любого элемента $X\in\mathbf{P}$ существуют такие элементы $X_\mathbf{Q}\subset\mathbf{Q}$, где $\mathbf{Q}\in\pi$, что $X=\sup X_\mathbf{Q}$; 3) если в каждой подструктуре $\mathbf{Q}\in\pi$ выбраны два элемента $X_\mathbf{Q}$ и $Y_\mathbf{Q}$, то

$$\inf\left(\sup_{\mathbf{Q}\in\pi} X_\mathbf{Q},\ \sup_{\mathbf{Q}\in\pi} Y_\mathbf{Q}\right)=\sup_{\mathbf{Q}\in\pi}\inf\left(X_\mathbf{Q},\ Y_\mathbf{Q}\right).$$

Если система $\mathbf{A}$ содержит идемпотент E, принадлежащий циклической системе, порожденной любым элементом системы $\mathbf{A}$, то структура $P(\mathbf{A})$ тогда и только тогда является прямой суммой множества π, когда в системе $\mathbf{A}$ существует такое множество τ подсистем, что 1) $\mathbf{A}=\prod_E\tau$; 2) каждая подструктура из π имеет вид $P(\mathbf{B})$, где $\mathbf{B}\in\tau$; 3) для любого элемента $C\in\mathbf{C}$ любой системы $\mathbf{C}\in\tau$ каждый элемент X некоторой отличной от $\mathbf{C}$ подсистемы из τ обладает следующим свойством: если $CX\in\mathbf{C}$ (соответственно $XC\in\mathbf{C}$), то CX (соответственно XC) является степенью элемента C; 4) для любых элементов C_1, C_2, принадлежащих различным подсистемам из τ, циклические подсистемы, порожденные элементами C_1E и C_2E, конечны и имеют взаимно простые порядки.

Из этой общей теоремы без труда выводится, что структура всех подгрупп группы $\mathbf{G}$ тогда и только тогда разлагается в прямую сумму, когда группа $\mathbf{G}$ периодична и разлагается в прямое произведение собственных подгрупп, причем порядки элементов из различных сомножителей взаимно просты. Для конечных групп эта теорема была доказана Ивасавой (Iwasawa K., J. Fac. Sci. Imp. Univ. Tokyo, 1941, 4, 171—199) и Джонсом (Jones A. W., Duke Math. J., 1945, 12, 541—560).

Пусть τ — такое множество подсистем системы $\mathbf{A}$, что в $\mathbf{A}$ существует идемпотент E, принадлежащий циклической подсистеме, порожденной любым элементом любой подсистемы из τ. Тогда система $\mathbf{A}$ называется прямым произведением множества τ (обозначение: $\mathbf{A}=\Pi\tau$), если $\mathbf{A}=\prod_E\tau$ и для любых элементов B_1, B_2, принадлежащих различным подсистемам из τ, имеет место соотношение $B_1B_2=B_1B_2E$. Если A является периодической группой, то это определение совпадает с классическим.

Пусть $\mathbf{M}=\{X_1, X_2, \ldots\}$ — такое не более чем счетное подмножество центра периодической группы $\overline{\mathbf{G}}$, что для любого $i\leqslant\mu$, где μ — мощность множества $\mathbf{M}$, существует такое простое число p_i, что: 1) $p_i<p_j$, если $i<j$; 2) элемент X_i примарен по p_i; 3) все примарные по p_i элементы группы $\mathbf{G}$ являются степенями элемента X_i. Пусть далее $\mathbf{M}_1$ — некоторое (возможно пустое или совпадающее с $\mathbf{M}$) подмножество множества $\mathbf{M}$ и $\mathbf{M}_2=\mathbf{M}\setminus\mathbf{M}_1$. Обозначая для любого $i\leqslant\mu$ через q_i число p_i, если $X_i\in\mathbf{M}_1$, и число p_i^2, если $X_i\in\mathbf{M}_2$, рассмотрим множество $[\overline{\mathbf{G}}, \mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2]^\Gamma$ всех $\mu+1$-членных последовательностей вида $(\overline{G}, g_1 g_2, \ldots)$, где $\overline{G}\in\overline{\mathbf{G}}$, $0\leqslant g_i<q_i$, для каждой из которых множество отличных из нуля чисел g_i конечно. Это множество является группой относительно операции

$$(\overline{G}, g_1, g_2, \ldots)(\overline{H}, h_1, h_2, \ldots)=(\overline{G}\overline{H}X_1^{m_1}X_2^{m_2}\ldots, g_1+h_1-m_1g_1, q_2+h_2-m_2q_2, \ldots$$

где $m_i=0$, если $g_i+h_i<q_i$, и $m_i=1$, если $g_i+h_i\geqslant q_i$ (группа $[\overline{\mathbf{G}}, \mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2]^\Gamma$ есть не что иное, как расширение группы $\overline{\mathbf{G}}$ с помощью прямого произведения циклических групп порядков q_i). Рассмотрим далее множество $[\overline{\mathbf{G}}, \mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2]^C$ всех троек вида (X, Y, Z), где $X\in\overline{\mathbf{G}}$, Y — либо принадлежит $\mathbf{M}_1$, либо является квадратом элемента из $\mathbf{M}_2$, либо равно единице E группы $\overline{\mathbf{G}}$, а Z — либо принадлежит $\mathbf{M}_2$, либо равно E, причем не более двух элементов X, Y, Z отличны от E. Это множество является ассоциативной системой относительно операции

$$(X_1, Y_1, Z_1)(X_2, Y_2, Z_2)=\begin{cases}(X_1Y_1Z_1X_2Y_2Z_2, E, E), & \text{если } Z_1\neq E \text{ или } Z_1\neq Z_2,\\ (E, Z_1^2, E), & \text{если } Z_1=Z_2\neq E.\end{cases}$$

Оказывается, что если порядки всех элементов множества $\mathbf{M}_2$ нечетны, то система $[\overline{\mathbf{G}}, \mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2]^C$ P-изоморфна группе $[\overline{\mathbf{G}}, \mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2]^\Gamma$.

Из этой теоремы, в частности, следует, что группа $\mathbf{G}$, содержащая такую центральную подгруппу Силова, что подгруппа, порожденная всеми остальными подгруппами Силова, не совпадает с $\mathbf{G}$, P-изоморфна некоторой системе типа $[\overline{\mathbf{G}}, \mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2]$.

Замеченные опечатки: в теореме 3.1. вместо $P[A]$ следует читать $P(A)$; в условии (б) теоремы 2.7 вместо $|2, q^{n_0-1+2}|$ следует читать $|2, q^{n_0-1}+2|$; в определении 4.8.1. вместо G следует читать $1\overline{G}$ и т. д. Л. Е. Садовский

4641. Логарифметика конечных квазигрупп (II). Попова (Logarithmetics of finite quasigroups (II). Popova Helen), Proc. Edinburgh Math. Soc., 1956, 9, № 3, 109—115 (англ.)

Уточняются результаты предыдущей работы (РЖМат, 1955, 4909). Доказывается, в частности, что порядок логарифметики конечной квазигруппы Q делится на порядок любой порожденной одним элементом подквазигруппы квазигруппы Q. Если квазигруппа Q не имеет собственных гомоморфизмов и собственных подквазигрупп (такие квазигруппы называются соединенными), то порядок логарифметики является степенью порядка квазигруппы. В. Д. Белоусов

4642 Д. Об импримитивных распределениях i-последовательностей и группах, которые их порождают. Тьеррен (Sur les répartitions imprimitives des i-uples et les groupes qui les engendrent. Thierrin Gabriel. — Thèse. Paris, Jouve, 1953, 40 p.) (франц.) Из Math. Revs, 1955, 16, № 3, 216

4643 Д. Простые подгруппы вещественных групп Ли и однородные пространства. Карпелевич Ф. И. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., МГУ, М.; 1956

ПОЛЯ, КОЛЬЦА И СТРУКТУРЫ

4644. Уравнения Артина-Шрейера над полем характеристики нуль. Мак-Кензи, Уэйплс (Artin-Schreier equations in characteristic zero. MacKenzie R. E., Whaples G.), Amer. J. Math., 1956, 78, № 3, 473—485 (англ.)

Рассматриваются циклические расширения простой степени p, полученные присоединением к основному полю K корня уравнения Артина—Шрейера

$$x^p - x - \lambda = 0, \quad \lambda \in k.$$

Законченные результаты получены в случае, когда поле k полно относительно неархимедовской нормы $|\ |$ (не обязательно дискретной) и имеет характеристику нуль, а поле классов вычетов $\bar{k}$ по простому идеалу совершенно.

Рассматриваются некоторые примеры расширений Артина—Шрейера. Широкий класс таких расширений получается, например, на основании следующих соображений.

Пусть K/k — циклическое расширение простой степени p с производящим автоморфизмом σ. Элемент $\Gamma \in K$ называется константой искажения поля K/k, если $\sigma B = B(1 + O(\Gamma))$ для любого $B \in K$, где $O(\Gamma)$ — некоторый элемент с нормой $\leqslant |\Gamma|$, и $\sigma A = A(1+\Gamma)$ для некоторого $A \in K$. Элемент Γ не зависит от выбора автоморфизма σ и является инвариантом поля K/k. Оказывается, что если $|\Gamma^{p-1}| > |p|$, то поле K является расширением Артина—Шрейера. Если поле k совершенно, то всякое циклическое подполе композита расширений Артина—Шрейера также является расширением Артина—Шрейера.

В заключение рассматривается некоторая алгебра над регулярным полем обобщенной локальной теории полей классов, рассмотрение которой эквивалентно рассмотрению символа И. Р. Шафаревича (Матем. сб., 1950, 26 (68), № 1, 113—146). Определяется некоторый инвариант этой алгебры, с помощью которого получается явное выражение для символа норменного вычета. Б. М. Уразбаев

4645. К теории алгебр Галуа. Масуда (Galois-algebra の分解について. 増田勝彦), 數學, Суґаку, 1953, 5, № 3, 23—26 (япон.)

4646. Алгебра изотопического спина ($^3/_2$, $^1/_2$). Вотруба, Христов (Die Algebra des Isotopen Spins ($^3/_2$, $^1/_2$). Votruba V., Christov Christo Janko), Czechosl. J. Phys., 1954, 4, № 4, 403—418 (нем.; рез. русск.); Českosl. časop. fys., 1954, 4, № 383—394 (чеш.)

См. РЖФиз, 1956, 15761.

4647. Об алгебрах с ограниченными представлениями. Йосии (On algebras of bounded representation type. Yoshii Tensho), Osaka Math. J., 1956, 8, № 1, 51—105 (англ.)

Пусть $A = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{f(k)} Ae_{ki}$ — разложение алгебры с единицей A над алгебраически замкнутым полем K в прямую сумму прямо неразложимых левых идеалов $Ae_{ki} \approx Ae_{k1} = Ae_k$. Последовательность идеалов $Ne_{i_0}, \ldots, Ne_{i_r}$, где N — радикал алгебры A, называется цепью, если для любых $j = 1, 2, \ldots, r$ идеалы $Ne_{i_{j-1}}$, Ne_{i_j} содержат изоморфные простые левые идеалы и $Ne_{i_{j-1}} \neq Ne_{i_j}$. Говорят, что идеал Ne_i разделяется в идеалах Ne_j и Ne_k, если три идеала Ne_i, Ne_j и Ne_k содержат изоморфные простые левые идеалы. Доказывается, что если $N^2 = 0$, то степени прямо неразложимых представлений алгебры A тогда и только тогда ограничены, когда: 1) для любого $i = 1, \ldots, n$ идеал Ne_i является прямой суммой попарно не изоморфных левых идеалов, число n_i которых не больше трех; 2) идеал Ne_i не входит дважды ни в какую цепь; 3) если $n_i = 3$ и $n_j = 3$, то идеалы Ne_i и Ne_j нельзя соединить цепью; 4) если $n_i = 3$, то идеал Ne_i нельзя соединить цепью ни с каким разделяющимся идеалом Ne_j; 5) если $n_i = n_j = n_k = 2$, то идеал Ne_i не разделяется в идеалах Ne_j и Ne_k; 6) для любой цепи $Ne_{i_0}, Ne_{i_1}, \ldots, Ne_{i_r}$, либо $n_{i_0} = 3$, либо $n_{i_r} = 3$, либо $n_{i_j} \leqslant 2$, либо $r = 2$, либо $r = 3$ и $n_{i_1} = 3$, $n_{i_2} = n_{i_3} = 1$. Д. А. Супруненко

4648. О гомоморфизмах алгебры на фробениусовы алгебры. Дескинс (On the homomorphisms of an algebra onto Frobenius algebras. Deskins W. E.), Pacif. J. Math., 1955, 5, № 4, 501—511 (англ.)

Рассматривается ассоциативная алгебра A конечной размерности n над полем J. Из n^3 структурных констант c_{ijk} алгебры A относительно некоторого базиса $e_1, \ldots, e_n$ ($e_i e_j = \sum_k c_{ijk} e_k$) составляются $n \times n$ = матрицы $R_i = (c_{isr})$, $S_i = (c_{ris})$, $Q_i = (c_{sri})$ (индексы r и s обозначают соответственно номера строки и столбца матрицы, а $i = 1, \ldots, n$). Произвольному элементу $a = \sum_i a_i e_i$ алгебры A сопоставляются матрицы $R(a) = \sum_i a_i R_i$, $S(a) = \sum_i a_i S_i$, $Q(a) = \sum_i a_i Q_i$; матрица $Q(a)$ называется структурной (автор употребляет термин «parastrophic») матрицей элемента a. Формулы $e_i * Q_j = \sum_k c_{kij} Q_k$ и $Q_j * e_i = \sum_k c_{ikj} Q_k$ определяют множество L всех структурных матриц как двойной A-модуль; при переходе к другому базису модуль L подвергается конгруэнтному преобразованию. Размерность J-модуля L равна размерности минимального (двустороннего) идеала W алгебры A, факторалгебра A/W по которому является алгеброй с нулевым умножением. Алгебра A называется фробениусовой, если в модуле L содержится по крайней мере одна неособенная матрица; если все нулевые матрицы из L являются неособенными, то алгебра A будет алгеброй с делением. Для любой структурной матрицы Q ранга m совокупность всех элементов $b \in A$,

для которых $Q * b = 0$ (соответственно $b * Q = 0$), является правым (левым) идеалом размерности $\geqslant n - m$. В этом идеале однозначно выделяется правый (левый) подидеал B размерности $n - m$, который называется правым (левым) структурным идеалом матрицы Q. Если матрица Q конгруэнтна матрице вида $\begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, где T — невырожденная матрица порядка m, то правый (левый) структурный идеал совпадает с левым (правым). Поэтому в этом случае говорят просто о структурном идеале. Структурный идеал B называется регулярным, если в алгебре A существует такой идемпотентный элемент u, что $Au \cup B = A$. Основной результат: ядро гомоморфизма алгебры A на фробениусову алгебру является регулярным структурным идеалом, и обратно, фактор-алгебра A/B алгебры A по регулярному структурному идеалу B является фробениусовой алгеброй. В связи с этим результатом изучаются некоторые свойства минимальных регулярных структурных идеалов.

В конце работы доказывается, что в фробениусовой алгебре A с ограниченным радикалом K размерность k радикала K не меньше размерности m факторалгебры A/K, причем, если K — алгебра с нулевым умножением, то $k = m$. Замеченная опечатка: стр. 503, строка 10 сверху, напечатано «A-module», должно быть «J-module». Е. Г. Шульгейфер

4649. О размерности модулей и алгебр. I. Эйленберг, Икэда, Накаяма (On the dimension of modules and algebras. I. Eilenberg Samuel, Ikeda Masatoshi, Nakayama Tadasi), Nagoya Math. J., 1955, 8, February, 49—57 (англ.)

Рассматриваются некоторые вопросы, связанные с когомологической размерностью алгебр (РЖМат, 1956, 8648).

Укажем например, на следующий результат. Пусть φ: $\Lambda \to \Lambda'$ — произвольный гомоморфизм колец. С помощью этого гомоморфизма любой левый Λ'-модуль A можно рассматривать как Λ-модуль. Оказывается, что $ll \cdot \dim_{\Lambda} A \leqslant ll \cdot \dim_{\Lambda'} A + ll \cdot \dim_{\Lambda} \Lambda'$. Отсюда следует, что если кольцо Λ' полупросто, то для любого левого Λ'-модуля A имеет место формула $l \cdot \dim_{\Lambda} A \leqslant l \cdot \dim_{\Lambda} \Lambda'$. Далее, если кольцо Λ является алгеброй конечного ранга над некоторым полем, а Λ' — ее фактор-алгеброй по нильпотентному идеалу, то $\dim \Lambda \leqslant \dim \Lambda' + ll \cdot \dim_{\Lambda} \Lambda'$.

В заключение доказано, что размерность неполупростой абсолютно примарно разложимой алгебры бесконечна. М. М. Постников

4650. Когомологии бесконечных алгебр. Розенберг, Зелинский (Cohomology of infinite algebras. Rosenberg Alex, Zelinsky Daniel), Trans. Amer. Math. Soc., 1956, 82, № 1, 85—98 (англ.)

Когомологической размерностью $F - \dim A$ (или просто $\dim A$) ассоциативной алгебры A над полем F называется такое наименьшее целое число $n \geqslant 0$, что $H^{n+1}(A, N) = 0$ для любого двустороннего A-модуля N. Если такого n не существует, то $\dim A = \infty$. Доказано, что если $\dim A = 0$, то алгебра A сепарабельна и имеет конечный ранг. Если A — локально конечная полупростая, удовлетворяющая условию минимальности алгебра счетного ранга, то $H'(A, A \otimes A) \neq 0$ (если A — полупростая алгебра конечного ранга, то эта группа тривиальна). Если A — такая алгебра счетного ранга, то любое ее конечное подмножество содержится в сепарабельной подалгебре конечного ранга, то $\dim A = 1$. Если A — алгебра над полем K и $K \supset F$, то

$$F - \dim K \leqslant F - \dim A \leqslant F - \dim K + K - \dim A.$$

Если алгебра A является алгеброй многочленов от n переменных над полем F, то $\dim A = n$. Если алгебра A является полем степени трансцендентности $n < \infty$ над полем F, то $\dim A \geqslant n$, при этом $\dim A = n$ тогда и только тогда, когда поле A имеет конечное число образующих и сепарабельно порождаемо (над F). Если поле A имеет конечное число образующих над полем F, но не является сепарабельно порождаемым, то $\dim A = \infty$. Если поле A имеет степень трансцендентности n над полем F и допускает счетное (но не конечное) число образующих, то $\dim A = n + 1$, если поле A локально сепарабельно порождаемо, и $\dim A = \infty$ в противном случае. З. И. Боревич

4651. Локальные кольца. I. Нагата (局所環. I. 永田雅宣), 數學, Сугаку, 1953, 5, № 2, 104—114 (япон.)

4652. Локальные кольца. II. Нагата (局所環. II. 永田雅宣), 數學, Сугаку, 1954, 5, № 4, 37-46 (япон.)

4653. О теоремах вложения для полных локальных колец Геддес. (On the embedding theorems for complete local rings. Geddes A.), Proc. London Math. Soc., 1956, 6, № 23, 343—354 (англ.)

Продолжение предыдущей работы автора (РЖМат, 1955, 3700). Доказано, что полное слабо локальное кольцо Q, поле вычетов которого имеет характеристику $p \neq 0$, содержит подкольцо C со следующими свойствами: 1) C есть полное слабо локальное кольцо, максимальный идеал которого порождается p-кратными единицы кольца Q; 2) при естественном гомоморфизме кольца Q на его поле вычетов $Q/\mathfrak{m}$ кольцо C отображается на все $Q/\mathfrak{m}$; 3) C есть подпространство Q.

Как и в предыдущей работе, доказательство опирается на сведение к случаю слабо примарных колец. А. И. Узков

4654. О разложении на частичные дроби в, вообще говоря, некоммутативном евклидовом кольце. Клаус (Über die Partialbruchzerlegung in nicht notwendig kommutativen euklidischen Ringen. Claus Heinz Jörg), J. reine und angew. Math., 1955, 194, № 1—4, 88—100 (нем.)

Коммутативное кольцо главных идеалов $\mathfrak{H}$ определяется как область целостности, в которой на отличных от нуля элементах можно определить такую функцию w, принимающую действительные значения, что: 1) $w(a) \geqslant 0$ для любого элемента $a \neq 0$; 2) множество значений функции w дискретно (не обладает точками накопления); 3) для любой пары отличных от нуля элементов $a, b \in \mathfrak{H}$ существуют такие элементы $n, m \in \mathfrak{H}$, что элемент n прост к элементу b и либо $w(na - mb) < w(b)$, либо $na - mb = 0$. Функция w называется функцией значений. Если в условии 3) в качестве элемента n всегда можно выбрать единичный элемент кольца $\mathfrak{H}$, то кольцо $\mathfrak{H}$ называется евклидовым. Доказывается, что любое подкольцо поля частных кольца главных идеалов (евклидова кольца) $\mathfrak{H}$, содержащее кольцо $\mathfrak{H}$, является кольцом главных идеалов (соответственно, евклидовым кольцом). Любое кольцо с однозначным разложением на множители, имеющее конечную систему попарно неассоциированных простых элементов, является либо полем, либо евклидовым кольцом с бесконечным множеством делителей единицы.

Несколько усложняя аксиоматику, автор далее определяет некоммутативное евклидово кольцо с правым алгоритмом деления. При этом на функцию значений w налагаются следующие дополнительные усло-

вия: $w(a) < w(b)$ тогда и только тогда, когда $w(ac) < w(bc)$ и $w(ab) = w(ba)$ (здесь a, b, c — произвольные отличные от нуля элементы кольца). Некоммутативное евклидово кольцо (с правым алгоритмом деления) $\mathfrak{E}$ обладает рядом свойств, аналогичных свойствам коммутативного евклидова кольца. В частности, кольцо $\mathfrak{E}$ обладает единицей; любые два отличных от нуля элемента a, $b \in \mathfrak{E}$ обладают правым общим наибольшим делителем $(a, b)_r$ и левым общим наименьшим кратным $[a, b]_l$. Кольцо $\mathfrak{E}$ вложимо в кольцо с делением.

Разложение элемента $b \in \mathfrak{E}$ в произведение $b = b_1 \dots b_n$ называется правым представлением элемента b, если $(b_1 \dots b_{i-1}, b_i)_r = 1$ для каждого $i > 1$; это представление называется правым простым представлением, если каждый сомножитель b_i есть степень некоторого простого элемента. Будем говорить, что элемент a обладает разложением первого рода на частичные дроби относительно правого представления $b = b_1 \dots b_n$ некоторого отличного от нуля элемента b, если элемент a по крайней мере одним способом можно представить в виде

$$a = \sum_{i=1}^{n} (R_i b_i B_i + r_i B_i), \qquad (1)$$

где $B_i = b_1 b_2 \dots b_{i-1} b_{i+1} \dots b_n$ и $w(r_i) < w(b_i)$ или $r_i = 0$; это разложение обозначается через (a, b) или $(a, b = b_1, \dots, b_n)$. В представлении (1) слагаемое $\sum_{i=1}^{n} R_i b_i B_i$ называется целой частью, а слагаемое $\sum_{i=1}^{n} r_i B_i$ — дробной частью разложения. Будем говорить, что элемент a обладает разложением второго рода на частичные дроби относительно правого простого представления элемента $b = p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} \dots p_n^{\lambda_n}$, если a по крайней мере одним способом можно представить в виде

$$a = \sum_{i=1}^{n} \left(R_i p_i^{\lambda_i} \Pi_i + \sum_{j=1}^{\lambda_i} r_{ij} p_i^{\lambda_i - j} \Pi_i \right),$$

где $\Pi_i = p_1^{\lambda_1} \dots p_{i-1}^{\lambda_{i-1}} p_{i+1}^{\lambda_{i+1}} \dots p_n^{\lambda_n}$ и $w(r_{ij}) < (wp_i)$ или $r_{ij} = 0$; естественным образом определяется целая и дробная части этого разложения. Доказывается, что в некоммутативном евклидовом кольце $\mathfrak{E}$ для любой пары отличных от нуля элементов a, b существует разложение первого рода $(a, b = b_1 \dots b_n)_r$, а если элемент b обладает правым простым представлением $b = p_1^{\lambda_1} \dots p_n^{\lambda_n}$, то существует и разложение второго рода $(a, b = p_1^{\lambda_1} \dots p_n^{\lambda_n})$.

Евклидово кольцо $\mathfrak{E}$ называется кольцом с однозначным разложением на частичные дроби, если $\mathfrak{E}$ обладает такой функцией значений (называемой функцией значений первого типа), относительно которой любые два разложения первого рода (a, b) произвольной пары элементов a, $b \neq 0$, обладающие равными целыми частями, совпадают и, кроме того, для случая $n = 1$, т. е. в формуле правого деления $a = qb + r$, элементы q и r определяются однозначно. Евклидово кольцо, обладающее такой функцией значений, относительно которой разложение первого рода (a, b) любой пары a, $b \neq 0$ определяется однозначно, называется кольцом с абсолютно однозначным разложением на частичные дроби. Доказывается, что каждое евклидово кольцо (вообще говоря, некоммутативное) с однозначным разложением на частичные дроби, является либо телом, либо кольцом некоммутативных многочленов (в смысле Оре) от одного переменного над телом и что каждое евклидово кольцо с абсолютно однозначным дробным разложением на частичные дроби является либо телом, либо кольцом обычных многочленов от одного переменного над полем. Для случая коммутативных евклидовых колец эти результаты были получены Остманном (Ostmann H., J. reine und angew. Math., 1950, 188, 150—161). Отмечено, что функция значений w евклидова кольца тогда и только тогда является функцией значений первого типа, когда она неархимедова, т. е. когда она четная и удовлетворяет соотношению $w(a + b) \leqslant \max(w(a), w(b))$. В кольце с однозначным разложением на частичные дроби каждое разложение второго рода однозначно определяется своей целой частью.

В последнем параграфе приводятся ряд свойств функций значений, определенных в кольце многочленов от одного переменного.

Опечатки: стр. 89, стр. 7 снизу, напечатано «n/b» должны быть «n/bc»; стр. 97, строка 11 снизу, напечатано «Körper», должно быть «Schiefkörper».

Е. Г. Шульгейфер

4655. **О модулях и кольцах с операторами. Алмейда-Кошта** (On modules and rings with operators. Almeida Costa A.), Rev. Fac. ciênc. Univ. Lisboa, 1954—1955, A4, № 1,-2, 5—62 (англ.)

Абелева группа называется модулем M с областью операторов Ω, если определены произведения $x\lambda \in M$ для всех $x \in M$ и $\lambda \in \Omega$, причем $(x + y)\lambda = x\lambda + y\lambda$. Модуль называется простым, если он не содержит никаких нетривиальных подмодулей. Модуль, порождаемый своими простыми подмодулями, называется полупростым. Исправляя и дополняя свою предыдущую работу (Rev. Fac. ciênc. Vniv. Lisboa, 1952, 2, 115—160), автор, в частности, устанавливает равносильность следующих утверждений: а) модуль M полупрост; б) модуль M разлагается в дискретную прямую сумму простых модулей; в) каждый подмодуль выделяется из модуля M как прямое слагаемое (ср. РЖМат, 1955, 6427 К).

Основная часть статьи посвящена кольцам с операторами, т. е. кольцам, являющимся модулями и удовлетворяющим соотношению $(x\lambda)y = x(y\lambda) = (xy)\lambda$. Правые и левые умножения кольца R можно рассматривать как подмножество $\mathfrak{X}$ кольца эндоморфизмов Γ аддитивной группы кольца R. Централизатор Z множества $\mathfrak{X}$ в Γ называется максимальной областью операторов кольца R. Это понятие автор считает основным. Устанавливается, что подкольцо, порожденное в Γ множеством $\mathfrak{X}$, лежит в Z. Если $R^2 = R$, то кольцо Z ассоциативно и коммутативно.

В работе доказывается ряд, как правило, ранее известных свойств колец и алгебр. Например, доказано, что любое Ω-простое кольцо является простым и как кольцо без операторов. Некоторый модуль тогда и только тогда неприводим относительно кольца всех эндоморфизмов, когда это кольцо содержит простое поле, единицей которого является тождественный автоморфизм. В простом кольце, центр которого является простым кольцом K, все эндоморфизмы являются K-эндоморфизмами.

Л. А. Скорняков

4656. **Радикальные кольца с нильпотентными ассоциированными группами. Дженнингс** (Radical rings with nilpotent associated groups. Jennings S. A.), Trans. Roy. Soc. Canada, 1955, Sec. 3, 49, June, 31—38 (англ.)

Как известно, любое радикальное (в смысле Джекобсона) кольцо R является группой относительно операции $x * y = x + y + xy$. Эта группа называется ассоциированной группой и обозначается через $G(R)$. Кроме того, R является кольцом Ли относительно операции $x \circ y = xy - yx$ (сложение остается прежним). Это кольцо обозначается через $\Lambda(R)$. Доказано, что группа $G(R)$ тогда и только тогда нильпотентна, когда кольцо $\Lambda(k)$ является нильпотентным кольцом Ли.

Отсюда следует, что если для радикального кольца R группа $G(R)$ нильпотентна, то в R существует нильидеал N, фактор-кольцо R/N по которому коммутативно. Для частного случая, когда кольцо R является нильалгеброй над полем без характеристики, то класс нильпотентности группы $G(A)$ совпадает с классом нильпотентности кольца $\Lambda(A)$. В. А. Андрунакиевич

4657. Когомологические группы трехмерных алгебр Ли. Мори (Lie 環の 3 次元コホモロジー群について. 森光彌), 數學, Сугаку, 1953, 5, № 2, 85-87 (япон.)

4658. Лиевы и йордановы системы в простых кольцах с инволюцией. Херштейн (Lie and Jordan systems in simple rings with involution. Herstein I. N.), Amer. J. Math., 1956, 78, № 3, 629—649 (англ.)

Изучается простое ассоциативное кольцо A с инволюцией, имеющее характеристику $\neq 2$. Доказывается простота йорданова кольца, образованного самосопряженными элементами кольца A, а также значительное число утверждений относительно идеалов кольца Ли, образованного элементами $a \in A$, для которых $a^* = -a$. А. И. Ширшов

4659. Простые алгебры с ассоциативными степенями степени 2. Кокорис (Simple power-associative algebras of degree two. Kokoris Louis A.), Ann. Math., 1956, 64, № 3, 544—550 (англ.)

Доказано, что каждая полупростая коммутативная алгебра с ассоциативными степенями над полем без характеристики является йордановой. А. И. Ширшов

4660. О неассоциативных кольцах, которые являются полупростыми модулями. Алмейда-Кошта (Über die nichtassoziativen Ringe, die halbeinfache Moduln sind. Almeida Costa A.), Rev. Fac. ciênc. Univ. Lisboa, 1955—1956, A5, № 1, 75—102 (нем.)

Пусть M — произвольный Ω-модуль и Z — централизатор множества Ω в кольце всех эндоморфизмов группы M. Если существует такой гомоморфизм φ: $M \to Z$, что $(x\lambda)\varphi(y) = (x\varphi(y))\lambda = x\varphi(y\lambda)$ для любых элементов x, $y \in M$ и $\lambda \in \Omega$, то модуль M является кольцом относительно умножения $xy = x\varphi(y)$. На кольца, получающиеся этим методом из полупростых модулей M, переносятся результаты Алберта (Albert A., Ann. Math., 1942, 43, 685—707) о неассоциативных алгебрах конечного ранга. Л. А. Скорняков

4661. О топологической алгебре. Ковальский (Beiträge zur topologischen Algebra. Kowalsky Hans-Joachim), Math. Nachr., 1954, 11, № 3, 143—185 (нем.)

Изучаются свойства топологизаций тел в связи с местом этих топологизаций в структуре всех топологизаций тела. В частности, доказываются следующие теоремы:

1. Пополнение тела относительно наиболее грубой из его нетривиальных топологизаций является простым кольцом.

2. Каждая ограниченная нетривиальная топологизация содержится в V-топологизации (Kaplansky, Duke Math. J., 1947, 14, 527—541).

3. Ограниченная топологизация τ, являющаяся пересечением системы $\{\tau_\alpha\}$ ограниченных топологизаций, является пересечением конечного числа топологизаций этой системы. А. И. Узков

4662 Д. Полные идеалы полиномиальных колец. Бичлер (Complete ideals in polynomial rings., Beechler Barbara Jean.— Doct. diss., State Univ. Iowa, 1955), Dissert. Abstrs, 1955, 15, № 9, 1623 (англ.)

4663 Д. Исследования по упорядоченности. Жаффар (Contribution à l'étude ordonnée. Jaffard Paul.— Thèse doct. sci. math., Fac. sci. Univ. Paris, 1951. Paris, Gauthier—Villars, 1953, 78p.) (франц.)

См. также: 4540, 4810, 4915 К, 5016, 5055, 5086, 5101, 5104—5107, 5109, 5114, 5148—5150 К, 5152 Д, 5153 Д, 5155, 5156, 5158.

ТОПОЛОГИЯ

4664. Простая замкнутая кривая, которая не прокалывает никакого диска. Бинг (A simple closed curve that pierces no disk. Bing R. H.), J. math. pures et appl., 1956, 35, № 4, 337—343 (англ.)

Говорят, что простая замкнутая линия J прокалывает диск D, если J зацеплена с границей диска D и имеет с этим диском единственную общую точку.

Строится пример простой замкнутой кривой $J \subset E^3$, не прокалывающей никакого диска в E^3. Кривая J получается как пересечение некоторой убывающей последовательности топологических торов.

А. С. Пархоменко

4665. Узлы с двумя мостами. Шуберт (Knoten mit zwei Brücken. Schubert Horst), Math. Z., 1956, 65, № 2, 133—170 (нем.)

Рассматриваются узлы и зацепления с мостовым числом 2 (РЖМат, 1956, 280); под зацеплением понимается класс одинаково зацепленных друг с другом пар ориентированных замкнутых линий; для зацеплений мостовое число определяется так же, как для узлов). По определению такие узлы и зацепления представимы в R^3 в виде двух непересекающихся простых дуг на горизонтальной плоскости E_1, двух непересекающихся простых дуг на другой горизонтальной плоскости E_2 и четырех вертикальных отрезков, соединяющих концы этих дуг. С помощью деформации можно добиться того, чтобы все точки самопересечения линии, образующейся при вертикальной проекции такого представления на плоскость E_2, были лишь двойными и чтобы число n их было наименьшим («нормальная форма» представления узла или зацепления). Если $n \neq 0$, то число $\alpha = \frac{1}{2}n + 1$ (оно всегда целое) называется кручением данного представления. Оно четно для зацепления и нечетно для узла. Далее, на одной из простых дуг на плоскости E_2 возьмем первую (в смысле ориентации этой дуги) точку самопересечения вышеуказанной проекции. Пусть на пересекающей ее проекции простой дуги из плоскости E_1 эта точка будет m-й точкой самопересечения. Тогда число $\beta = \pm(\alpha - m)$, где знак + или — берется в зависимости от того, пересекает ли вторая дуга первую справа налево или слева направо, называется классом перекрещиваний представления. Если $n = 0$, то имеем либо окружность — в этом случае полагаем $\alpha = \beta = 1$, либо две незацепленных окружности — в этом случае считаем, что $\alpha = \beta = 0$. Если $\alpha > 1$, то $(\beta, 2\alpha) = 1$, $|\beta| < \alpha$. Заданием чисел α и β нормальная форма с точностью до несущественных деформаций полностью определена, и ее можно задавать произвольной парой чисел (α, β), удовлетворяющих вышеуказанным условиям.

Доказывается, что две нормальных формы (α, β) и (α', β') тогда и только тогда представляют один и тот же узел или зацепление, когда $\alpha = \alpha'$ и либо

$\beta = \beta'$, либо $\beta\beta' \equiv 1 \pmod{2\alpha}$, что дает классификацию всех узлов и зацеплений с мостовым числом 2. Все они оказываются симметричными, т. е. переходят в себя при изменении ориентации на противоположную. Узлы являются зеркальными, когда $\beta^2 \equiv -1 \pmod{2\alpha}$, а зацепление зеркально лишь при $\alpha = \beta = 0$. Двулистное накрытие пространства R^3, разветвленное по узлу или зацеплению, представленному нормальной формой (α, β), есть ориентированное линзовое пространство типа (α, β), откуда указанная классификационная теорема непосредственно вытекает для узлов и для зацеплений с индексом зацепления, отличным от нуля. Ввиду существования зацеплений с нулевым индексом зацепления (например, зацепление с нормальной формой (32,7)) автор дает непосредственное доказательство своей классификационной теоремы. К рассматриваемым узлам принадлежат торические узлы с обегающим числом 2 и зацепленные узлы, диагональным узлом которых служит окружность ··· (РЖМат, 1955, 2605). Для первых узлов β принимает значение ± 1, а для вторых — значение $\pm(\alpha - 2)$. Приводятся нормальные формы тех узлов таблицы Александера—Бригга, для которых удалось найти двумостное представление.

М. Ф. Бокштейн

4666. Группы переплетений. Милнор (Link groups Milnor John), Ann Math., 1954, 59, № 2, 177—195 (англ.)

Рассматриваются такие деформации многокомпонентного (ориентированного) узла, при которых каждая компонента может пересекать сама себя, но не может пересекаться с другими компонентами узла. Строится новый инвариант — группа переплетений узла (link group). Приведены некоторые теоремы об узлах и их группах переплетений и примеры. Доказано, в частности, что группа переплетений является гомотопическим инвариантом указанного класса деформаций (теорема 1).

Приведем определение группы переплетений. Пусть L — узел в открытом трехмерном многообразии M, состоящий из n компонент $l_1, \ldots, l_n$, а L^i — узел, получающийся из L выбрасыванием компоненты l_i. Через $G(L)$ обозначается группа узла L в M, т. е. $\pi_1(M \setminus L)$; аналогичный смысл имеет обозначение $G(L^i)$. Пусть $A_i(L)$ — ядро естественного гомоморфизма $G(L) \to G(L^i)$, порожденного вложением $M \setminus L \subset M \setminus L^i$, а $[A_i]$ — коммутант этого ядра. Факторгруппу $\mathcal{P}(L) = G(L)/E(L)$, где $E(L)$ есть произведение нормальных делителей $[A_1], [A_2], \ldots, [A_n]$, автор и называет группой переплетений узла L. При $n = 1$ эта фактор-группа была изучена Фоксом (Fox R. H., Bull. Amer. Math. Soc., 1945, 51, Abstract 140, 526).

В. Г. Болтянский

4667. Линии Эйлера и разложение регулярного графа степени $2n$ на два фактора степени n. Коцциг (Eulerovské čiary a rozklady pravidelného grafu párneho stupňa na dva faktory rovnakého stupňa. Kotzig Anton), Mat.-fyz. časop., 1956, 6, № 3, 133—136 (словац.; рез. русск.)

Граф Эйлера есть конечный граф, все вершины которого имеют четную степень. Линия Эйлера в графе есть замкнутый путь без повторяющихся ребер, содержащий все ребра графа. Линия Эйлера в графе существует тогда и только тогда, когда он является связным графом Эйлера (König Dénes, Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, New York, 1950, 20).

Отсюда легко получается следующая теорема: Ребра связного графа Эйлера с четным числом ребер можно таким образом разделить на два класса H_1, H_2, что каждая вершина будет инцидентна с одинаковым числом ребер из классов H_1 и H_2; такое разложение непосредственно получается с помощью линии Эйлера графа, если ребра этой линии поочередно относить к H_1 и к H_2. Доказано, что каждое разложение H_1, H_2 ребер этого графа на два класса с указанным свойством можно получить таким способом. Отсюда сразу следует, что если связный регулярный граф степени $2n$ можно разложить на два фактора G_1, G_2 степени n, то в графе существует такая линия Эйлера, в которой чередуются ребра из G_1 и G_2.

И. Н. Врублевская

4668. Характеристические числа неособенного графа. Лихтенбаум Л. М., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1. М., АН СССР, 1956, 135—136

4669. Об определимости топологических пространств при помощи полных систем окрестностей точек. Коутский (Určenost topologických prostorů pomocí úplných systémů okolí bodů. Koutský Karel), Spisy vyd. přírodověd. fak. Masarykovy univ., 1956, A13, B8, № 4, 153—163 (чеш.; рез. русск., франц.)

Пусть P — некоторое множество, 2^P — система всех его подмножеств. Всякое отображение $u\colon 2^P \to 2^P$ автор называет топологией в P, а пару (P, u) — топологическим пространством. Относительно функции u никаких предположений не делается.

Точка $x \in P$ называется O-точкой, если существует такое подмножество $S \subset P$, что $x \notin uS$; в этом случае множество $P \setminus S$ называется «окрестностью» точки x в (P, u). Система $\mathfrak{D}$ окрестностей O-точки x называется полной, если для каждой окрестности U точки x существует такая окрестность $O \in \mathfrak{D}$, что $O \subset U$.

Можно доказать, что если P — произвольное множество и каждой точке $x \in P$ поставлена в соответствие система $\mathfrak{D}_x$ подмножеств множества P, то существует, по меньшей мере, одно топологическое пространство (P, u), обладающее следующими свойствами: 1) если $x \in P$ и система $\mathfrak{D}_x$ пуста, то x не является O-точкой в (P, u); 2) если $x \in P$ и система $\mathfrak{D}_x$ не пуста, то x является O-точкой в (P, u), а $\mathfrak{D}_x$ является полной системой окрестностей точки x в (P, u).

Рассматриваются свойства системы $\mathfrak{T}$ всех обладающих свойствами (1), (2), топологий в множестве P.

А. С. Пархоменко

4670. Характеристика компактных метрических пространств. Грюнбаум (A characterization of compact metric spaces. Grünbaum Branko), Riveon lemat., 1955, 9, 70—71 (иврит.; рез. англ.)

Метрическое пространство X (с функцией расстояния d) называется гипернормальным, если для любых двух замкнутых непустых и непересекающихся подмножеств $A, B \subset X$ выполнено неравенство $d(A, B) > 0$.

Дается элементарное доказательство следующей теоремы, которая обобщает результат Монтейро и Пейшото.

Если гипернормальное пространство X не является компактным, то существует такое $r > 0$, что в X имеется бесконечно много точек x, для которых $d(x, X \setminus \{x\}) > r$.

Резюме автора

4671. О периодических движениях в некоторых метрических пространствах. Георгиев (Върху периодичните движения в някои метрични топологични пространства. Георгиев Г. Ив.), Годишник Минно-геол. ин-т, 1953—1954 (1955), 1, ч. 2, 171—187 (болг.; рез. русск., франц.)

Траекторией в метрическом пространстве S называется образ числовой прямой $(-\infty, \infty)$ при некотором непрерывном отображении x этой прямой в S; само отображение x называется параметрическим представлением соответствующей траектории. Траектория называется регулярной, если она имеет хотя бы одно параметрическое представление x, обладающее

следующим свойством: для любых действительных чисел t_0, $\varepsilon > 0$, $T > 0$ существует такое $\delta > 0$, что если $\rho(x(t_0), x(\tau_0)) \leqslant \delta$, то $\rho(x(t_0+\tau), x(\tau_0+\tau)) \leqslant \varepsilon$ для $|\tau| \leqslant T$. Основной результат: Для того чтобы регулярная траектория в компактном метрическом пространстве, локально гомеоморфном плоскости, была обыкновенной замкнутой кривой или точкой, необходимо и достаточно, чтобы множество точек траектории было замкнутым. И. Н. Врублевская

4672. О разбиениях на три континуума. Лелек (Sur les décompositions en trois continus. Lelek A.), Bull. Acad. Polon Sci., 1956, Cl. 3, 4, № 8, 511—513 (франц.); Бюл. Польской АН, 1956, Отд. 3, 4, № 8, 499—501

Континуум X называется имеющим свойство (S), если для каждых трех континуумов K_1, K_2, K_3, попарно имеющих общие точки и дающих в сумме X, пересечение $K_1 \cap K_2 \cap K_3$ непусто. Автор доказывает, что каждый уникогерентный континуум имеет свойство (S) и каждый локально связный континуум, обладающий свойством (S), уникогерентен (континуум называется уникогерентным, если его невозможно представить в виде суммы двух континуумов, пересечение которых несвязно). Из этого следует, что в классе локально связных континуумов уникогерентность эквивалентна свойству (S). Приведен пример континуума (не являющегося локально связным), который обладает свойством (S), но не является уникогерентным. S. Mrowka

4673. Множества неподвижных точек периодических гомеоморфизмов гильбертова пространства. Кли (Fixed-point sets of periodic homeomorphisms of Hilbert space. Klee V. L., Jr), Ann. Math., 1956, 64, № 2, 393—395 (англ.)

Доказываются следующие теоремы. Для любого компактного множества Y, лежащего в бесконечномерном (не обязательно сепарабельном) гильбертовом пространстве H, можно найти периодический гомеоморфизм пространства H, множеством неподвижных точек которого является Y. Для любого замкнутого множества $Y \subset H$ можно найти периодический гомеоморфизм пространства H, множество неподвижных точек которого гомеоморфно Y. А. С. Шварц

4674. Теорема о неподвижных точках инволюций в S^3. Монтгомери, Замельсон (A theorem on fixed points of involutions in S^3. Montgomery Deane, Samelson Hans), Canad. J. Math., 1955, 7, № 2, 208—220 (англ.)

Смит доказал (Smith P. A., Ann. Math., 1938, 39, 127—164), что если $T : S^3 \to S^3$ — сохраняющая ориентацию инволюция, отличная от тождественного отображения и имеющая по крайней мере одну неподвижную точку, то множество F всех неподвижных точек отображения T представляет собой простую замкнутую кривую. В реферируемой работе устанавливаются некоторые результаты о расположении линии F в случае симплициальности гомеоморфизма T.

Инволюция $T : S^3 \to S^3$ называется кусочно-линейной, если при некотором симплициальном разбиении K сферы S^3 отображение T является симплициальным автоморфизмом комплекса K. Основной результат: Пусть T — кусочно-линейная инволюция, удовлетворяющая условиям теоремы Смита, и F — линия, состоящая из всех неподвижных точек отображения T. Предположим, что F есть параллельный узел порядка 2 для простого замкнутого полигона C (т. е. обегающий узел с носителем C, имеющий обегающий коэффициент 2 и нечетный коэффициент зацепления с C; РЖМат, 1955, 2605). Тогда группа узла C (т. е. $\pi_1(S^3 \setminus C)$) является бесконечной циклической, а коэффициент зацепления полигонов F и C равен ± 1 (теорема 1).

При доказательстве теоремы 1 авторы устанавливают попутно следующий результат, который, как они указывают, был ранее получен Мойсом: Если полигон F незаузлен (в том смысле, что он является границей двумерной полиэдральной клетки), то гомеоморфизм T эквивалентен вращению сферы S^3 (теорема 2). В. Г. Болтянский

4675. Примеры множеств неподвижных точек периодических отображений. II. Флойд (Examples of fixed point sets of periodic maps. II. Floyd E. E.), Ann. Math., 1956, 64, № 2, 396—398 (англ.)

Ч. I см. Ann. Math., 1952, 55, 167—172.

Приводятся примеры, показывающие, что теоремы Смита (Лефшец С., Алгебраическая топология, М., Изд-во ин. лит., 1949, стр. 454—483) о множествах неподвижных точек отображений периода p^α, где p — простое число, не могут быть обобщены на отображения, период которых не является степенью простого числа. Именно, строится стягиваемый конечный комплекс, на котором действует преобразование периода 6, имеющее в качестве множества неподвижных точек объединение непересекающихся простой дуги и простой замкнутой кривой; строится также односвязная двумерная гомологическая сфера, на которой действует преобразование периода 6 с множеством неподвижных точек, состоящим из простой замкнутой кривой и двух не лежащих на ней точек.

Кроме этого, строится трехмерный компакт, являющийся абсолютным ретрактом, и действующее в нем отображение периода 6, множество неподвижных точек которого не является локально связным. А. С. Шварц

4676. О понятии зависимости для непрерывных отображений. Борсук (On a concept of dependence for continuous mappings. Borsuk K.), Fundam. math., 1956, 43, № 1, 95—113 (англ.)

Доказываются сформулированные ранее результаты (РЖМат, 1956, 5780). Приводятся дальнейшие результаты, касающиеся понятия зависимости отображений.

Пусть Y_0 — абсолютный окрестностный ретракт (ANR) и $f_1, f_2, \ldots, f_k \in Y_0^{X_0}$ — система непрерывных отображений компактного пространства X_0 в пространство Y_0. Отображения $f_1, f_2, \ldots, f_k$ называются разделенными, если существуют такие попарно не пересекающиеся открытые подмножества $G_1, G_2, \ldots, G_k \subset X_0$ и такая точка $y_0 \in Y_0$, что $f_i(x_0) = y_0$ для каждой точки $x_0 \in X_0 \setminus G_i$. Система $f_1, f_2, \ldots, f_k \in Y_0^{X_0}$ называется разделимой, если отображения $f_1, f_2, \ldots, f_k$ соответственно гомотопны разделенным отображениям $f_1', f_2', \ldots, f_k'$. В этом случае мы можем отображениям $f_1, f_2, \ldots, f_k$ поставить в соответствие отображение f, определенное следующим образом:

$$f(x) = f_i'(x) \text{ при } x \in G_i,\ i = 1,2,\ldots,k;$$

$$f(x) = y_0 \text{ при } x \in X_0 \setminus \bigcup_{i=1}^{k} G_i;$$

это отображение называется соединением отображений $f_1, f_2, \ldots, f_k$. Все соединения отображений $f_1, f_2, \ldots, f_k$ гомотопны между собой.

Важную роль играет здесь следующая теорема: Каждая конечная система отображений компактного пространства X_0 размерности $< 2n$ в n-мерную сферу S_n разделима.

Обозначая через $\mathfrak{N}_m(f_1, f_2, \ldots, f_k)$ множество функций $g \in Y_0^{X_0}$, зависимых в размерности m от системы $f_1, f_2, \ldots, f_k \in Y_0^{X_0}$ (см. цитированную выше статью), мы получаем следующую теорему: Если

функции $f_1, f_2, \ldots, f_k \in Y^{X_0}$ разделимы и $\dim X_0 \leqslant m$, $\dim Y_0 \leqslant m+1$, то каждая функция $g \in \mathfrak{R}_{m+1}(f_1, f_2, \ldots, f_k)$ является соединением некоторых кратных отображений $f_1, f_2, \ldots, f_k$ (РЖМат, 1956, 2049).

Эта теорема позволяет в некоторых случаях различать отображения, зависимые от системы $f_1, f_2, \ldots, f_k$, с точки зрения гомологий. Если $Y_0 = S_n$ и $\dim X_0 < m < 2n$, то множество $\mathfrak{R}_m(f_1, f_2, \ldots, f_k)$ в точности совпадает с множеством всех соединений кратных отображений $f_1, f_2, \ldots, f_k$. Отсюда следует теорема о множестве $\mathfrak{R}(f_1, f_2, \ldots, f_k)$ в так называемом хопфовском случае: Если $Y_0 = S_n$ и $n < m < 2n$, то множество $\mathfrak{R}(f_1, f_2, \ldots, f_k)$ является подгруппой хопфовской группы пространства X_0, а именно подгруппой, порожденной гомотопическими классами $(f_1), (f_2), \ldots, (f_k)$.

Наконец, автор вводит понятие индекса пары X_0, Y_0, несколько отличающееся от понятия, введенного в цитированной в начале реферата статье. Индекс $I(X_0, Y_0)$ определяется здесь как нижняя грань мощностей таких множеств $\Phi \subset Y_0^{X_0}$, для которых $\mathfrak{R}(\Phi) = Y_0^{X_0}$. Автор ставит проблему: является ли число $I(X_0, Y_0)$ конечным, если X_0 — полиэдр.

Эта проблема была недавно решена отрицательно Хилтоном в статье, которая сдана в печать.

I. W. Jaworowski

4677. О расслоении пространств отображений. Болтянский В. Г., Успехи матем. наук, 1955, **10**, № 2, 215

Резюме доклада на Московском математическом обществе (РЖМат, 1957, 1245).

4678. Нестационарные гомотопические группы сфер. Яманосита (On the unstable homotopy groups of spheres. Yamanoshita Tsuneyo), Proc. Japan Acad., 1955, **31**, № 9, 610—611 (англ.)

Излагается метод вычисления гомотопических групп сфер, основанный на рассмотрении пространств, уничтожающих гомотопические группы. В частности, повторены результаты Тода (РЖМат, 1956, 292). Получающиеся результаты расходятся с результатами Тода только для группы $\pi_{22}(S^9)$. В реферируемой работе утверждается, что 2-компонента этой группы циклична.

М. М. Постников

4679. Обобщение группы Абэ. Накамура (Abe Group の擴張について. 中村得之), 數學, Сугаку, 1953, **5**, № 3, 36—39 (япон.)

4680. Абстрактные гомотопии. I. Кан (Abstract homotopy. I. Kan Daniel M.), Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1955, **41**, № 12, 1092—1096 (англ.)

Вводятся «кубические комплексы», представляющие собой кубическую аналогию полных полусимплициальных комплексов Эйленберга — Зильбера. В кубических комплексах, удовлетворяющих некоторому естественному условию («аксиома распространения») строится абстрактная теория гомотопий, в частности, определяются «гомотопические группы».

Множество K некоторых элементов σ (называемых кубами), каждому из которых поставлено в соответствие неотрицательное целое число (размерность), называется кубическим комплексом, если для каждого n-мерного куба σ определены $(n-1)$-мерные кубы $\sigma 0^i$, $\sigma 1^i$, $i = 1, \ldots, n$ («грани») и $(n+1)$-мерные кубы $\sigma\eta^j$, $j = 1, \ldots, n+1$ («вырожденные кубы»), удовлетворяющие обычным естественным условиям, выражающим поведение индексов при взаимных перестановках операторов 0^i, 1^j, η^k. Подмножество $K' \subset K$, замкнутое относительно операторов 0^i, 1^j, η^k, называется подкомплексом. Сохраняющее размерности отображение $f: K \to L$, коммутирующее с операторами 0^i, 1^j, η^k, называется кубическим отображением. Совокупность всех кубических комплексов и их кубических отображений является категорией (обозначаемой через C).

Множество $K \otimes L$ всех символов вида $\sigma \otimes \tau$, $\sigma \in K$, $\tau \in L$, с естественно определенными в нем операторами 0^i, 1^j, η^k является кубическим комплексом, который называется тензорным произведением кубических комплексов K и L. Через I обозначается кубический комплекс, содержащий только три невырожденных куба ζ, ζ_0, ζ_1, соответственно размерностей 1, 0, 0, причем $\zeta 0^1 = \zeta_0$, $\zeta 1^1 = \zeta_1$. Кубические отображения $f_\varepsilon: K \to L$, $\varepsilon = 0, 1$, называются гомотопными между собой $(f_0 \simeq f_1)$, если существует такое кубическое отображение $f_I: I \otimes K \to L$ («гомотопия»), что $f_I(\zeta_\varepsilon \otimes \sigma) = f_\varepsilon \sigma$, $\sigma \in K$, $\varepsilon = 0,1$. Гомотопность не является, вообще говоря, отношением эквивалентности. Дается (теорема 3) достаточное условие для того, чтобы гомотопность кубических отображений была отношением эквивалентности; это условие, в частности, выполнено, если рассматриваемые кубические комплексы удовлетворяют упоминаемой ниже аксиоме распространения.

Обычным образом определяется цепной комплекс кубического комплекса K (группа цепей получается, если группу, порожденную всеми кубами, профакторизовать по подгруппе, порожденной вырожденными кубами), после чего определяются гомологии и когомологии кубических комплексов.

Автор называет E-комплексами кубические комплексы, удовлетворяющие «аксиоме распространения». Эта аксиома может быть сформулирована следующим образом: пусть σ_ε^i, $i = 1, \ldots, n$, $\varepsilon = 0,1$ — такие $2n-1$ кубов размерности $n-1$ кубического комплекса K, которые «примыкают» друг к другу так же, как (все, кроме некоторой одной) грани n-мерного куба; тогда существует n-мерный куб, имеющий эти $2n-1$ кубов своими соответствующими гранями (формулировка автора несколько иная, формально более слабая; эквивалентность этих формулировок устанавливается теоремой 5). Все E-комплексы и их кубические отображения (называемые E-отображениями) образуют категорию, обозначаемую через C_E.

Два n-мерных куба кубического комплекса называются сравнимыми, если все их грани соответственно совпадают. Сравнимые n-мерные кубы σ_0 и σ_1 называются гомотопными между собой $(\sigma_0 \sim \sigma_1)$, если существует такой $(n+1)$-мерный куб σ, что $\sigma\varepsilon^1 = \sigma_\varepsilon$ и $\sigma\varepsilon^i = \sigma_0\eta^1\varepsilon^i$, $i > 1$, $\varepsilon = 0,1$. Гомотопность кубов не является, вообще говоря, отношением эквивалентности, но является таковым в случае E-комплексов (теорема 6).

Далее автор вводит гомотопические группы. Пусть ψ — произвольный $(n-1)$-мерный куб E-комплекса E. Множество всех n-мерных кубов σ, удовлетворяющих условиям $\sigma\varepsilon^1 = \psi$, $\sigma\varepsilon^i = \psi\eta^1\varepsilon^i$, $i > 1$, $\varepsilon = 0, 1$, распадается, согласно теореме 6, на гомотопические классы; через 0 обозначается гомотопический класс куба $\psi\eta^1$. Пусть a и b — два гомотопических класса и $\sigma \in a$, $\tau \in b$. Согласно аксиоме распространения существует $(n+1)$-мерный куб λ, удовлетворяющий условиям: $\lambda 0^1 = \sigma$, $\lambda 0^2 = \psi\eta^1$, $\lambda 1^2 = \tau$, $\lambda\varepsilon^i = \sigma\eta^1\varepsilon^i$ при $i > 2$, $\varepsilon = 0, 1$. Гомотопический класс куба $\lambda 1^1$ (который однозначно определяется классами a и b) автор называет суммой $a + b$ гомотопических классов a и b. При фиксированном кубе ψ множество всех определенных выше гомотопических классов является относительно этой операции сложения группой (теорема 7). Она называется n-й гомотопической группой комплекса K относительно базисного $(n-1)$-мерного куба ψ и обозначается через $\pi_n(K; \psi)$.

Всякое E-отображение $f: K \to L$ индуцирует гомоморфизмы $f_*: \pi_n(K; \psi) \to \pi_n(L; f\psi)$ для всех n. Если E-комплекс K связен (любые два нульмерных куба являются гранями некоторого одномерного куба), то для любых двух $(n-1)$-мерных кубов ψ, $\chi \in E$ группы $\pi_n(K; \psi)$ и $\pi_n(K; \chi)$ изоморфны между собой (теорема 8). При $n > 1$ группа $\pi_n(K; \psi)$ абелева (теорема 9). Автор замечает, что в этих терминах могут быть также формулированы и доказаны гомотопические аддиционные теоремы.

В заключение автор отмечает двойственность, заключающуюся, по-существу, в замене для n-мерного куба σ грани $\sigma\varepsilon^i$ гранью $\sigma\omega^{n+1-i}$ («симметрия» куба относительно плоскости, перпендикулярной к главной диагонали). В результате такой замены граней комплекс K заменяется новым комплексом DK, а каждое кубическое отображение $f: K \to L$ — кубическим отображением $Df: DK \to DL$. Таким образом, получается инволютивный функтор $D: C \to C$; он удовлетворяет соотношению $D: C_E \to C_E$. Отношение гомотопности, вообще говоря не двойственно самому себе в смысле функтора D, однако это имеет место в категории C_E. В. Г. Болтянский

4681. Понтрягинские кольца некоторых пространств петель. Копленд (The Pontrjagin ring for certain loop spaces. Copeland Arthur H., Jr), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, 7, № 3, 528—534 (англ.)

Пусть A — кольцо главных идеалов, C — некоторый A-модуль. Тензорным кольцом над модулем C называется A-модуль $T(C) = \sum_{n=0}^{\infty} C^{(n)}$, где $C^{(0)} = A$, $C^{(n)} = C \otimes C^{(n-1)}$, $n > 0$, в котором введено естественное умножение: $c \cdot c' = c \otimes c' \in C^{(n+m)}$, если $c \in c^{(n)}$, $c' \in c^{(m)}$. Если C — дифференциальный градуированный модуль, то дифференциал и градуировка продолжаются в $T(C)$. Пусть G — некоторый градуированный A-модуль. Автор показывает, что существует такой свободный дифференциальный градуированный A-модуль C, что его модуль гомологий $H(C)$ изоморфен G. Градуированное кольцо гомологий $H(T(C))$ зависит только от модуля G и обозначается через $T^*(G)$.

Доказывается, что если X — односвязное пространство категории 2 (по Люстернику—Шнирельману), а Ω — его пространство петель, то кольцо Понтрягина пространства Ω с коэффициентами в A изоморфно $T^*(H(X))$, где $H(X)$ — модуль гомологий пространства X с коэффициентами в A.

А. Л. Онищик

4682. К когомологической теории пространств и групп. Экман (Zur Cohomologietheorie von Räumen und Gruppen. Eckmann Beno), Proc. Internat. Congr. Math. 1954. Vol. 3. Groningen — Amsterdam, 1956, 170—177 (нем.)

Приводятся основные определения теории гомологий групп и комплексов с операторами. А. С. Шварц

4683. Расслоенное алгебраическое пространство и теория модулей. Серр (Algebraic fibre space and theory of modules. Serre J.-P.), 數學, Сугаку, 1956, 7, № 4, 256—257 (япон.)

4684 К. Топологические группы. Понтрягин (Grupuri topologice. Vol. 1. Ed. a 2-a rev. şi compl. Pontreaghin L. S. Acad. R. P. R. Inst. studii rom.-sov., Bucureşti, 1956, 389 p., 20 lei.-Litogr.), Bul. bibliogr., 1956, А, № 17, 639 (рум.)

См. также: 4534, 4661, 5147, 5150 К.

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

4685. Кольцо с мерой для куба произвольной размерности. Фелл (The measure ring for a cube of arbitrary dimension. Fell J. M. G.), Pacif. J. Math., 1955, 5, № 4, 513—517 (англ.)

Кольцом с мерой автор называет такую структуру R, что: 1) множество R_x элементов, подчиненных любому данному элементу $x \in R$, есть булева алгебра, на которой может быть задана счетноаддитивная действительная функция, равная нулю только в нуле; 2) всякое счетное множество элементов имеет в R точную верхнюю грань (это определение отличается от общепринятого; ср. Халмош П., Теория меры (РЖМат, 1954, 3653К)). Кольцо с мерой, в котором имеется наибольший элемент, называется алгеброй с мерой. Пусть α — бесконечное кардинальное число; I^α — топологическое произведение α экземпляров отрезка $[0, 1]$; $B^{(\alpha)}$ — класс борелевских подмножеств куба I^α; $R^{(\alpha)}$ — совокупность типов Хеллингера конечных мер, определенных на $B^{(\alpha)}$. Если ввести в $R^{(\alpha)}$ частичное упорядочение, определяемое отношением абсолютной непрерывности, то $R^{(\alpha)}$ превратится в кольцо с мерой. Опираясь на теорему Махарам (Maharam D., Proc. Mat. Acad. Sci. U. S. A., 1942, 28, 108—111), автор указывает для произвольного кольца с мерой мощностную характеристику, определяющую это кольцо с точностью до изоморфизма, и вычисляет эту характеристику для кольца $R^{(\alpha)}$.

В. А. Рохлин

4686. n-значные иррегулярные меры Бореля. Свифт (n-valued irregular Borel measures. Swift George), Duke Math. J., 1956, 23, № 3, 393—407 (англ.)

Борелевская мера, заданная в топологическом пространстве X (определения см. РЖМат, 1956, 4402), называется n-значной, если она принимает на борелевских множествах из X ровно n различных значений. В работе изучаются условия существования n-значных иррегулярных борелевских мер и общие методы их задания. В. А. Рохлин

4687. О некоторых вопросах непрерывности измеримых функций. Синдаловский Г. Х., Уч. зап. Моск. ун-та, 1956, вып. 181, 175—182

Пусть

$$\Delta_2^\varphi(x, h) = f[x - \varphi(h) + h] - 2f[x - \varphi(h)] + f[x - \varphi(h) - h],$$

где функция $\varphi(h) \to 0$ при $h \to 0$, $h > 0$.

В работе показывается:

1. Если $f(x)$ измерима по Лебегу на $(0,1)$ и $\Delta_2^\varphi(x, h) \to 0$ при $h \to 0$ в каждой точке x множества E с $\operatorname{mes} E > 0$ и если функция $\varphi(h)$ удовлетворяет условию Липшица в окрестности нуля, то $f(x)$ непрерывна почти всюду на E.

Отсюда, в частности, при $\varphi(h) \equiv 0$ получается, что измеримая функция $f(x)$, для которой

$$f(x+h) - 2f(x) + f(x-h) = \Delta_2(x, h) \to 0$$

при $h \to 0$ и $x \in E$, $\operatorname{mes} E > 0$, непрерывна почти всюду на множестве E.

При $\varphi(h) \equiv h$ такой результат принадлежит Ф. А. Кабакову.

2. Если $f(x)$ измерима по Лебегу на (0,1) и $\Delta_2^{\varphi}(x, h) \to 0$ при $h \to 0$ равномерно на $(\delta, 1-\delta)$, где δ — любое малое число, причем $\lim_{h\to 0} \varphi(h) = 0$, то $f(x)$ непрерывна на (0.1).

В ходе доказательства утверждения 2 показано, что если x — точка разрыва, то необходимо существует целый интервал, содержащий x и состоящий из точек разрыва $f(x)$.

Так как при этом не предполагается измеримость $f(x)$, то функция, неизмеримая ни на каком интервале, у которой $\Delta_2(x, h) \to 0$ равномерно, может иметь лишь нигде не плотное множество точек непрерывности. Ф. И. Шмидов

4688. Замечания об интегралах и линейных функционалах. Хаупт, Пок (Bemerkungen über Unterteilungsintegrale und lineare Funktionale. Haupt Otto, Pauc Christian. Y.), Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss. Math.-naturwiss. Kl., 1955, München, 1956, 347—369 (нем.)

Объемом $j|q$ называется неотрицательная аддитивная функция j, определенная на булевом кольце q подмножеств некоторого основного множества. Если q и j счетноаддитивны, то объем называется мерой. Каждому объему отвечает своя операция интегрирования. Интеграл, рассматриваемый как функционал, непрерывен в том и только в том случае, если функция j счетноаддитивна на q. Если это условие выполнено, то объем $j|q$ может быть продолжен в меру, что приводит к соответствующему расширению интеграла. Кроме того, интеграл может быть расширен просто как линейный функционал. Рассматриваются соотношения между этими расширениями. В. А. Рохлин

4689. Непрерывные функции, рассматриваемые с точки зрения условий Дини. Тарнавский (Continuous functions considered from the standpoint of Dini's conditions. Tarnawski E.), Fundam. math., 1956, 43, № 1, 3—22 (англ.)

Пусть $w(t)$ — неубывающая функция, определенная для $t > 0$, причем $w(t) \to 0$ при $t \to 0$ и $\int_0^1 dt/w(t) = \infty$ (эти условия удовлетворяются также для функций $w_1(t)$ и $w_2(t)$, рассматриваемых ниже). Автор рассматривает класс D_w функций $f(x)$, для которых

$$\sup_x \int_0^1 \frac{|f(x+t) - f(x)|}{w(t)}\, dt < \infty,$$

и класс D_w^{∞} функций, удовлетворяющих для каждого x условию

$$\int_0^1 \frac{|f(x+t) - f(x)|}{w(t)}\, dt = \infty.$$

В частности, исследуется связь между классами D_{w_1} и $D_{w_2}^{\infty}$ с различными w_1 и w_2.

Основной результат: Если

$$\lim_{t\to 0+} \frac{w_1(t)}{t} \int_t^1 \frac{ds}{w_1(s)} > 1, \quad \overline{\lim_{t\to 0+}} \frac{w_2(2t)}{w_2(t)} < \infty,$$

то для существования $f \in D_{w_1} \cap D_{w_2}^{\infty}$ необходимо, чтобы $\overline{\lim}_{t\to 0+} w_2(t)/w_1(t) = 0$, и достаточно, чтобы $\lim_{t\to 0+} w_2(t)/w_1(t) = 0$. Функцию $f(x)$ можно получить эффективно (выбирая подходящие коэффициенты a_n и b_n) в виде

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi(b_n x), \tag{1}$$

где $\varphi(x)$ — произвольная периодическая функция, отличная от константы и удовлетворяющая условию Липшица, и $a_n > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$, $0 < b_n \nearrow \infty$.

Даны достаточные условия для a_n и b_n, при которых функция (1) принадлежит классу D_w или классу D_w^{∞}.

Далее рассматривается случай, когда $w(t) = t^{1+\delta} |\log t|^{\gamma}$. В этом случае классы D_w и D_w^{∞} обозначаются соответственно $D(\delta, \gamma)$ и $D^{\infty}(\delta, \gamma)$. Даются достаточные условия для a_n и b_n, при которых функция (1) принадлежит $D(\delta, \gamma)$ или $D^{\infty}(\delta, \gamma)$. Например, если $0 \leqslant \delta \leqslant 1 < \gamma$, $0 < a < 1$, $ab^{\delta} = 1$, то функция

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \varphi(b^n x) \tag{2}$$

принадлежит $D(\delta, \gamma)$. Если $0 < \delta_1 < \delta_2 \leqslant 1$, то можно выбрать числа a и b так, что (2) принадлежит $D(\delta_1, 0) \cap D^{\infty}(\delta_2, 0)$. В заключение приводится пять конкретных примеров функций с различными особенностями. Укажем два из них. Если $0 < p_n \to \infty$, $p_{n+1} < 2p_n$, $0 < \alpha \leqslant \beta$, $k \geqslant 0$, $B > 1$, $a_n = (p_1 p_2 \ldots p_n)^{-\alpha}$, $b_n = B^{(p_1 p_2 \ldots p_{n+k})^{\beta}}$, то функция (1) принадлежит $D(0, \gamma) \cap D^{\infty}(0, \gamma_1)$, где $0 \leqslant (\beta - \alpha)/\beta < \gamma \leqslant 1$, $\gamma_1 < (\beta - \alpha)/\beta$. Если $\alpha > 1$, $B > 1$, $a_n = (n!)^{-\alpha}$, $b_n = B^{((n-1)!)^{\alpha}}$, то функция (1) принадлежит $D(0, 0) \cap D^{\infty}(0, \gamma)$ для каждого $\gamma < 0$. A. Alexiewicz

4690. О пространствах функций, удовлетворяющих условию Дини. Тарнавский (On the spaces of functions satisfying Dini's condition. Tarnawski E.), Fundam. math., 1956, 43, № 2, 141—147 (англ.)

Пусть $w(t)$ и $w_1(t)$ — неубывающие функции, определенные для $t > 0$, отличные от нуля и стремящиеся к 0 при $t \to 0+$. Вводятся функции

$$W(\tau) = \int_{\tau}^{1} \frac{dt}{w(t)}, \quad W_1(\tau) = \int_{\tau}^{1} \frac{dt}{w_1(t)}.$$

и предполагается, что

$$\lim_{\tau\to 0+} W_1(\tau) = \infty, \tag{1}$$

$$\int_0^1 \frac{t}{w(t)}\, dt < \infty, \quad \int_0^1 \frac{t}{w_1(t)}\, dt < \infty, \tag{2}$$

$$\lim_{t\to 0+} W(t)\, w(t)\, t^{-1} > 1, \tag{3}$$

$$\overline{\lim_{t\to 0+}}\, w_1(2t)/w_1(t) < \infty. \tag{4}$$

Пусть D_w — пространство непрерывных функций $f(x)$ периода 1, удовлетворяющих обобщенному условию Дини

$$\int_0^1 \frac{|f(x+t) - f(x)|}{w(t)}\, dt \leqslant 1.$$

Это пространство с метрикой $\rho(f_1, f_2) = \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f_1(x) - f_2(x)|$ будет полным.

Теорема. Пусть

$$\lim_{t \to 0+} w_1(t)/w(t) = 0. \qquad (5)$$

Тогда множество S тех функций из D_w, которые удовлетворяют для каждого x условию

$$\int_0^1 \frac{|f(x+t) - f(x)|}{w_1(t)}\, dt = \infty,$$

будет резидуальным в пространстве D_w. То же заключение справедливо, если предположить, что выполняются (1), (3), (4), (5) и

$$\lim_{t \to 0+} t^2 |\log t|^\gamma / w(t) = 0 \text{ с } \gamma > 1.$$

При условиях (1), (4) множество S будет резидуальным в пространстве C непрерывных функций периода 1. A. Alexiewicz

4691. Компактность классов $H_p^{(r_1, \ldots, r_n)}$ функций многих переменных. Никольский С. М., Изв. АН СССР, сер. матем., 1956, 20, № 5, 611—622

Рассматриваются классы $H_p^{(r_1, \ldots, r_n)}(G, M)$ и $H_{*p}^{(r_1, \ldots, r_n)}(M)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, введенные автором в предыдущих работах (см., например, Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1951, 38, 244—278; РЖМат, 1954, 4381), с нормой $\|f\|_{L_p(G)}^{(r_1, \ldots, r_n)} = \|f\|_{L_p(G)} + M_f$ (соответственно $\|f\|_{*p}^{(r_1, \ldots, r_n)} = \|f\|_{*p} + M_f$), где M_f — наименьшая постоянная M, для которой $f \in H_p^{(r_1, \ldots, r_n)}(G, M)$ (соответственно $f \in H_{*p}^{(r_1, \ldots, r_n)}(M)$). Изучается также пространство функций $W_p^{(\rho)} H^{(\alpha)}(G)$ (ρ — целое, $0 < \alpha < 1$), состоящее из всех функций f, интегрируемых в p-й степени вместе со своими обобщенными частными производными (смешанными и несмешанными) до порядка ρ включительно, причем предполагается, что частные производные ψ порядка ρ функции f удовлетворяют неравенству $\|\psi(\overline{Q} + \overline{h}) - \psi(\overline{Q})\|_{L_p(G')} \leqslant M |\overline{h}|^\alpha$ для любой области $G' \subset G$ и всех допустимых векторов $\overline{h}$, сдвигающих G' в пределах G. Полагается $\|f\|_{L_p(G)}^{(\rho+\alpha)} = \|f\|_{L_p(G)} + M_f$, где M_f — снова наименьшая постоянная, для которой при всех G' и допустимых $\overline{h}$ выполняется вышеуказанное неравенство. Доказывается теорема: Пусть $\{f_m\}$ — последовательность функций ($m = 1, 2, \ldots$), обладающих одним из следующих свойств: а) $f_m \in H_{*p}^{(r_1, \ldots, r_n)}$, $\|f_m\|_{*p}^{(r_1, \ldots, r_n)} \leqslant K$; б) $f_m \in H_p^{(r_1, \ldots, r_n)}(G)$, $\|f_m\|_{L_p(G)}^{(r_1, \ldots, r_n)} \leqslant K$; в) $f_m \in W_p^{(\rho)} H^{(\alpha)}(G)$, $\|f_m\|_{L_p(G)}^{(\rho+\alpha)} \leqslant K$, причем в случае в) предполагается, что область G ограничена и ее граница S непрерывно дифференцируема $\rho + 1$ раз. Тогда существует последовательность $\{f_{m_k}\}$ и функция f, удовлетворяющая соответственно условиям а), б) и в), такие, что каковы бы ни были числа r_i' и α', для которых $0 < r_i' < r_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), $0 < \alpha' < \alpha$, имеет место в случае а) $\lim \|f_{m_k} - f\|_{*p}^{(r_1', \ldots, r_n')} = 0$; в случае б) $\lim \|f_{m_k} - f\|_{L_p(G')}^{(r_1', \ldots, r_n')} = 0$, какова бы ни была ограниченная область G', для которой $\overline{G'} < G$; в случае в) $\lim \|f_{m_k} - f\|_{L_p(G)}^{(\rho+\alpha')} = 0$.

В работе указывается связь сформулированной теоремы с ранее проводившимися исследованиями других авторов по изучению свойств компактности семейств функций (в частности, см. РЖМат, 1954, 5100). Л. Д. Кудрявцев

4692. О дифференцируемых отображениях. Родниянский А. М., Тр. Моск. авиац. ин-та, 1956, вып. 61, 58—67

Пусть G — открытое множество евклидова пространства R^n ($n \geqslant 2$), f — дифференцируемое отображение G в R^n, J — якобиан отображения f. Пусть $a \in G$, $J(a) > 0$ (соответственно $J(a) < 0$) и U — связная ограниченная окрестность точки a, $\overline{U} \subset G$. Тогда существует такая связная ограниченная окрестность $V = V(f(a))$, что для всякой связной окрестности $O_y = O_y(f(a)) \subseteq V$ существует одна и только одна связная окрестность $O_x = O_x(a)$ со свойствами: $\overline{O}_x \subset U$, $\overline{O}_x \cap f^{-1} f(a) = \{a\}$, $fO_x = O_y$, $[f(O_x)]_g = (O_y)_g$ (E_g — обозначает границу множества E). Из этой теоремы следует, в частности, что если существует такая точка $a \in G$, что $J(a) > 0$ (соответственно $J(a) < 0$), то множество $[J > 0]$ (соответственно $[J < 0]$) и его образ имеют положительную меру. Эти результаты были ранее опубликованы автором без доказательств. (Докл. АН СССР, 1950, 72, № 1, 15—17). Л. Д. Кудрявцев

4693 К. Интегрирование. Гиллеспи (Integration. 6 th ed. Gillespie Robert Pollock. Edinburgh — London, Oliver & Boyd, 1955, viii, 132 pp., ill., 6 sh.) (англ.)

4694 К. Интеграл Лебега—Стилтьеса. Камке (Das Lebesgue-Stieltjes-Integral. Kamke E. Leipzig, Teubner, 1956, VI, 226 S., ill., 20 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1956, A, № 49, 3510 (нем.)

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМАМИ И ИХ ОБОБЩЕНИЯМИ

4695. Приближение дифференцируемых функций, заданных на конечном отрезке, алгебраическими многочленами. Тиман А. Ф., Тучинский Л. И., Докл. АН СССР, 1956, 111, № 4, 771—772

Функция $f(x)$, заданная на отрезке $[-1, 1]$, по определению принадлежит классу $W^{(r)} H^{(\alpha)} M$, если она имеет на $[-1, 1]$ производную $f^{(r)}(x)$, удовлетворяющую условию Липшица степени α ($0 \leqslant \alpha < 1$) с константой M.

Пусть $S_n(f, x) = \sum_1^n c_k T_k(x)$ — частная сумма n-го порядка разложения f по ортогональным и нормированным с весом $(1 - x^2)^{-1/2}$ алгебраическим многочленам.

Доказывается асимптотическое равенство

$$\sup_{f \in W^{(r)} H^{(\alpha)} M} |f(x) - S_n(f, x)| = \frac{2^{\alpha+1} M}{\pi^2} \frac{\ln n}{n^{r+\alpha}} \times$$

$$\times (\sqrt{1 - x^2})^{r+\alpha} \int_0^{\pi/2} t^\alpha \sin t dt + \varepsilon_n$$

где $|\varepsilon_n| < C_{r\alpha} n^{-r-\alpha}$ ($n = 1, 2, \ldots$).

Авторы отмечают, что при $\alpha=1$ и $r=0$, это результат референта (Изв. АН СССР, сер. матем., 1946, 10, 295).

(Следует также отметить, что при $\alpha=1$ и любом $r=0, 1, 2, \ldots$ указанный результат получила затем С. Г. Селиванова (РЖМат, 1956, 6514) с более точной оценкой остаточного члена. *Реф.*).

С. М. Никольский

4696. О теоремах типа Джексона в метрике L_p. **П о т а п о в М. К.,** Докл. АН СССР, 1956, 111, № 6, 1185—1188

Рассматриваются:

1) Класс функций, определенных на отрезке $[-1, 1]$, обладающих абсолютно непрерывной производной порядка $r-1$ ($r=1, 2, \ldots$) и производной $f^{(r)}(x)\in L_p$ $(-1, 1)$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$; обозначим его через $W_p^{(r)}$ $(-1, 1)$.

2) Класс функций $H_p^{(r+\alpha)}(-1, 1)$, каждая из которых принадлежит классу $W_p^{(r)}(-1, 1)$ $(r=1, 2, \ldots)$ и удовлетворяет неравенству

$$\left(\int_c^d |f^{(r)}(x+h)-f^{(r)}(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\leqslant M|h|^\alpha,$$

где M не зависит от h, c и d $(-1\leqslant c<d\leqslant 1$, $-1\leqslant x+h\leqslant 1$.

Доказывается:

Л е м м а 1. Если функция f обладает производной f', для которой

$$\left(\int_{-1}^{1}\left|\frac{f'(x)}{(\sqrt{1-x^2}+1/n)^s}\right|^p dx\right)^{1/p}\leqslant M,$$

то существует алгебраический многочлен $Q_n(x)$ степени не выше n такой, что

$$\left(\int_{-1}^{1}\left|\frac{f(x)-Q_n(x)}{(\sqrt{1-x^2}+1/n)^{s+1}}\right|^p dx\right)^{1/p}\leqslant\frac{CM}{n^\rho},\qquad(1)$$

где C не зависит от n, $n\geqslant[s]+2$ и $\rho=1$.

При $p=\infty$ и $s=0$ это частный случай теоремы А. Ф. Тимана (Докл. АН СССР, 1951, 77, № 6, 969), обобщившего соответствующий результат референта (Изв. АН СССР, сер. матем., 1946, 10, 207).

С помощью этой леммы автор доказывает, что если 1) $f\in W_p^{(r)}$ $(-1, 1)$ или 2) $f\in H_p^{(r+\alpha)}$ $(-1, 1)$, то существуют многочлены Q_n такие, что имеет место неравенство (1) при 1) $s+1=\rho=r$ и 2) $s+1=r$, $\rho=r+\alpha$. Случай 1) при $p=\infty$ содержится в упомянутой выше работе А. Ф. Тимана. (Что касается случая 2), то есть основание считать, что он может быть далее усилен; во всяком случае при $p=\infty$ соответствующий результат А. Ф. Тимана сильнее (*Реф.*)).

Подобные результаты автор получает также в случаях, когда в интегралах вида (1) фигурирует вес $(1-x^2)^{-1/2}$. Заметим, что в статье нигде не отмечено, что полученные там результаты рассматриваются для $1\leqslant p\leqslant\infty$.

С. М. Никольский

4697. Об интегрируемости некоторых тригонометрических рядов. А л я н ч и ч, Б о я н и ч, Т о м и ч (Sur l'intégrabilité de certaines séries trigonométriques. A l j a n č i ć S., B o j a n i ć R., T o m i ć M.), Publs Inst. math. Acad. serbe sci., 1955, 8, 67—84 (франц.)

Пусть $L(x)$ — функция с медленным ростом (РЖМат, 1956, 2100),

$$g(x)\sim\sum_1^\infty\lambda_n\sin nx,$$

$$f(x)\sim\lambda_0/2+\sum_1^\infty\lambda_n\cos nx.$$

Тогда:

1) Если $\lambda_n\downarrow 0$ и $0<\gamma<2$ (соответственно $0<\gamma<1$), то $x^{-\gamma}L(1/x)\,g(x)\in L(0, \pi)$ (соответственно $x^{-\gamma}L(1/x)\,f(x)\in L(0, \pi)$) тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum n^{\gamma-1}L(n)\lambda_n$.

2) Пусть $L(x)$ не убывает и $\Delta^2L(x)$ сохраняет знак. В этом случае: а) если $\lambda_n\downarrow 0$, то $L(1/x)\,g(x)\in L(0, \pi)$ тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum n^{-1}L(n)\lambda_n$; б) если, начиная с некоторого места, λ_n убывают, $\sum\lambda_n$ сходится и $f(0)=0$, то $x^{-1}L(1/x)\,f(x)\in L(0, \pi)$ тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum n^{-1}L(n)\Lambda_n$, где $\Lambda_n=\sum_n^\infty\lambda_\nu$.

3) Если, начиная с некоторого места $\lambda_n\geqslant 0$, ряд $\sum\lambda_n$ сходится, $f(0)=0$ и $1<\gamma<3$, то $x^{-\gamma}L(1/x)\times f(x)\in L(0, \pi)$ тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum n^{\gamma-1}L(n)\lambda_n$.

Приведенные теоремы обобщают результаты Янга, Боаса и Хейвуда, вытекающие (частично) из 1) при $L(x)\equiv 1$.

В. К. Дзядык

4698. Об интегрируемости функций, определенных тригонометрическими рядами. Ч ж э н ь Ю н - м и н (On the integrability of functions defined by trigonometrical series. C h e n Y u n g - M i n g), Math. Z., 1956, 66, № 1, 9—12 (англ.)

Пусть $g(x)=\sum_{n=1}^\infty\lambda_n\sin nx$, где $\lambda_n\downarrow 0$. Доказывается, что если $p>1$, $0<Y<1$, то $x^{-Y}|g(x)|^p\in L(0, \pi)$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n=1}^\infty n^{Y+p-2}\lambda_n^p<\infty.\qquad(1)$$

Условие (1) имеет место и для $f(x)\sim\sum_{n=1}^\infty\lambda_n\cos nx$, $\lambda_n\downarrow 0$. При дополнительных условиях относительно $\{\lambda_n\}$ условие (1) для $g(x)$ устанавливается и при $0<p<1$, $Y>0$. Необходимость и достаточность условия (1) при $Y=0$, $p>1$ была доказана Харди и Литлвудом (Зигмунд А., Тригонометрические ряды, М., 1939, § 9, 501), а при $p=1$, $0<Y<1$ — Боасом (Boas R. P., Quart. J. Math., 1952, 3, 217—221). Результаты Боаса дополнил Хейвуд, рассмотрев некоторые $Y>1$ (РЖМат, 1955, 5720).

А. А. Конюшков

4699. Преобразования коэффициентов Фурье. Р у д и н (Transformations des coefficients de Fourier. R u d i n W a l t e r), C. r. Acad. sci., 1956, 243, № 7, 638—640 (франц.)

Комплекснозначную функцию $\varphi(z)$ от комплексного переменного z называют функцией типа (L^1, L^1), если из того, что $\sum_{n=-\infty}^\infty c_ne^{in\theta}$ — некоторый произвольный ряд Фурье, вытекает, что ряд $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\varphi(c_n)e^{in\theta}$ также является рядом Фурье.

Показывается, что справедливы утверждения:

1. Если

$$\varphi(z)=\varphi(x, y)=\sum_{n, m=0}^\infty a_{n, m}x^ny^m$$

$$(z=x+iy,\quad a_{0, 0}=0),\qquad(1)$$

где ряд (1) абсолютно сходится при $|z|<\delta$ ($\delta>0$), то $\varphi(z)$ — функция типа (L^1, L^1).

2. Если $\varphi(z)$ — функция типа (L^1, L^1), то существуют числа $M>0$ и $\delta>0$ такие, что

$$|\varphi(z_1)-\varphi(z_2)|<M|z_1-z_2|$$

при $|z_1|<\delta$ и $|z_2|<\delta$. П. Л. Ульянов

4700. О равномерной сходимости тригонометрических рядов. Черейская В. И., Уч. зап. Моск. ун-та, 1956, вып. 181, 159—163

Доказывается теорема: Если $f(x)$ непрерывна на $[0, 2\pi]$, имеет период 2π и для ее интеграла $F(x)=\int_0^x f(u)\,du$ имеет место равенство

$$\omega_2(\delta, F)=o(\delta/\lg\delta^{-1}) \text{ при } \delta\to 0,$$

то ряд Фурье от $f(x)$ сходится равномерно на $[0, 2\pi]$. Здесь $\omega_2(\delta, F)=\max|F(x+h)+F(x-h)-2F(x)|$, $0<h\leqslant\delta$, $0\leqslant x\leqslant 2\pi$.

Эта теорема была доказана С. Б. Стечкиным методами конструктивной теории функций. Автор доказывает ее непосредственно, аналогично тому, как доказывается признак Дини—Липшица, обобщением которого она является.

Заметка была сдана в печать в марте 1954 г.; отметим статью Салема (РЖМат, 1955, 4341), где дано совершенно другое доказательство этой теоремы. Н. К. Бари

4701. О пределах подпоследовательности частных сумм тригонометрических рядов. Меньшов Д. Е., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1. М., АН СССР, 1956, 89—90

Функция $f(x)$ называется предельной функцией в смысле сходимости почти всюду на E для множества $M=\{\varphi(x)\}$, составленного из измеримых функций, если существует последовательность функций $\varphi_m(x)\in M$ $(m=1, 2, \ldots)$, которая сходится к $f(x)$ почти всюду на E. Множество M называется замкнутым в смысле сходимости почти всюду на E, если оно содержит все свои предельные функции.

Формулируется теорема: Пусть E — любое измеримое множество на $[-\pi, \pi]$. Для того чтобы множество M измеримых функций, определенных почти всюду на E, было множеством всех предельных функций в смысле сходимости почти всюду на E для частных сумм некоторого тригонометрического ряда, необходимо и достаточно, чтобы множество M было замкнутым в смысле сходимости почти всюду на E. Н. К. Бари

4702. О сильной суммируемости рядов Фурье. II. Кинукава (Some strong summability of Fourier series. II. Kinukawa Masakiti), Proc. Japan Acad., 1956, **32**, № 6, 377—382 (англ.)

В заметке продолжаются исследования Идзуми и автора (РЖМат, 1957, 1299).

Пусть

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad (z=re^{i\varphi}) \qquad (1)$$

— аналитическая функция в круге $|z|<1$, $f(e^{i\varphi})$ — ее предельные значения на окружности $|z|=1$, а $\sigma_n^\delta(\varphi)$ — чезаровские средние порядка δ от ряда (1) при $z=e^{i\varphi}$.

По определению, функция $f(z)\in \mathrm{Lip}(\alpha, \beta, p)$, если

$$\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f'(re^{i\varphi})|^p\,d\varphi\right)^{1/p}=O\left\{(1-r)^{-1+\alpha}\left(\ln\frac{1}{1-r}\right)^{-\beta}\right\}.$$

Характерный результат:

Теорема 1. Если $f(z)\in \mathrm{Lip}(\alpha, \beta, p)$, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\sigma_n^\delta(\varphi)-f(e^{i\varphi})\right|^{1/\alpha} \qquad (2)$$

сходится для почти всех $\varphi\in[0, 2\pi]$ при $2\geqslant p\geqslant 1/\alpha>1$, $\beta>\alpha$ $(\beta>1/p+\alpha)$ для $\delta>1/p-1$ (для $\delta=1/p-1$).

Аналогичного типа теорема доказывается и для случая, когда в ряде (2) под знаком суммы стоят еще некоторые множители.

Далее рассматривается вопрос сходимости рядов вида

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\tau_n^\delta(\varphi)\right|^k$$

и им подобных, где

$$\tau_n^\delta(\varphi)=\frac{1}{A_n^\delta}\sum_{\nu=0}^{n}A_{n-\nu}^{\delta-1}\nu c_\nu e^{i\nu\varphi}\quad(\delta>0),$$

т. е. с точностью до множителя, чезаровские средние порядка $(\delta-1)$ от продифференцированного по φ ряда (1) при $z=e^{i\varphi}$. П. Л. Ульянов

4703. Выпуклая емкость и ряды Фурье. Темко К. В., Докл. АН СССР, 1956, **110**, № 6, 943—944

Рассматриваются меры μ, т. е. неотрицательные вполне аддитивные функции множеств, определенные на всех борелевских множествах B, лежащих на $[0, 2\pi]$, и такие, что $\mu([0, 2\pi])=1$. Говорят, что $\mu\lesssim B$, если $\mu(B)=1$.

Пусть $\{\lambda_n\}$ — такая выпуклая последовательность положительных чисел, что $\lambda_n\downarrow 0$ и $\sum\lambda_n=+\infty$. Скажем, что множество B имеет положительную выпуклую емкость, порожденную последовательностью $\{\lambda_n\}$, если существует мера $\mu\lesssim B$ такая, что интеграл

$$\int_B Q(r, x-y, \lambda)\,d\mu(y)$$

ограничен равномерно по x при $r\to 1-0$, где

$$Q(r, x, \lambda)=\lambda_0/2+\sum_{n=1}^{\infty}r^n\lambda_n\cos nx.$$

Формулируются теоремы:

1. Для того чтобы множество B имело положительную выпуклую емкость, необходимо и достаточно, чтобы существовала мера $\mu\lesssim B$ такая, что если a_n и β_n — коэффициенты Фурье—Стилтьеса меры μ, то ряд $\sum(\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx)\lambda_n$ есть ряд Фурье ограниченной функции.

2. Все борелевские множества положительной меры имеют положительную выпуклую емкость, порожденную любой последовательностью $\{\lambda_n\}$ с указанными выше свойствами. С другой стороны, для любой последовательности $\{\lambda_n\}$ с этими свойствами можно найти совершенное множество лебеговой меры нуль, имеющее положительную выпуклую емкость, порожденную этой последовательностью.

3. Если $\{\lambda_n\}$ — последовательность указанного класса и $n\Delta\lambda_n$ не возрастает, то из сходимости ряда

$$\sum(a_n^2+b_n^2)/(n\Delta\lambda_n)$$

следует, что ряд $\sum(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ и его сопряженный могут расходиться не более, чем на множестве нулевой выпуклой емкости, порожденной последовательностью $\{\lambda_n\}$.

Теорема 3 обобщает результат Бёрлинга (Beurling A., Acta math., 1940, 72, 1), а теоремы 1 и 3 результаты Зигмунда и Салема (Salem R., Zygmund A., Trans. Amer. Math. Soc., 1946, 59, 23), касающиеся логарифмической емкости и α-емкости. Н. К. Бари

4704. *A*-интеграл и сопряженные функции. Ульянов П. Л., Уч. зап. Моск. ун-та, 1956, вып. 181, 139—157

Основные результаты этой статьи без доказательств были сформулированы в сообщении автора (РЖМат, 1956, 313). Здесь дается доказательство теоремы 1 указанного сообщения (обобщение равенства Рисса), как следствие этого — доказательство того, что ряд, сопряженный к ряду Фурье, есть ряд Фурье (*A*) от функции $\overline{f}(x)$. Доказываются теорема 2 — представление сопряженной функции через *A*-интеграл, и теорема 3 — представление данной функции через сопряженную функцию.

Кроме опубликования доказательств ранее сформулированных теорем, автор показывает, что (*A*)-интеграл и интеграл Данжуа в широком смысле частично перекрываются, т. е. существуют функции, интегрируемые (*A*), но не интегрируемые (*D*), и наоборот.

Н. К. Бари

4705. Суммируемые тригонометрические ряды. Джеймс (Summable trigonometric series. James R. D.), Pacif. J. Math., 1956, 6, № 1, 99—110 (англ.)

Пусть

$$a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) \quad (1)$$

— тригонометрический ряд, а

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin nx - b_n \cos nx) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) \quad (2)$$

— его сопряженный ряд.

Решается проблема представления коэффициентов a_n, b_n ряда (1) по формулам, аналогичным формулам Фурье, для того случая, когда ряд (1) суммируем каким-то методом Чезаро целого порядка. Работа непосредственно примыкает к предыдущим исследованиям автора (РЖМат, 1956, 3746), где рассматривался случай суммируемости ряда (1) методом $(C, 2)$. Случай, когда ряд (1) суммируем методом Абеля, рассматривался Тейлором (РЖМат, 1957, 313).

Положим:

$$A_n^k(x) = \sum_{m=0}^{n} C_{n-m}^k a_m(x), \quad B_n^k(x) = \sum_{m=1}^{n} C_{n-m}^k b_m(x),$$

где $a_m(x)$ и $b_m(x)$ взяты из (1) и (2), а

$$C_s^k = (s+k)!/(s!\,k!).$$

Давая несколько новое определение P^{k+2}-интеграла, автор получает следующий основной результат:

Теорема 6. 2. Пусть ряд (1) суммируем методом Чезаро (C, k) к конечной функции $f(x)$ для всех $x \in [0, 2\pi] - E$, где множество E не более чем счетно. Пусть далее $f(x) = 0$ при $x \in E$. Если $A_n^{k-1}(x) = o(n^k)$ при $x \in E$, а $B_n^{k-1} = o(n^k)$ для всех $x \in [0, 2\pi]$, то коэффициенты a_n, b_n ряда (1) выражаются через функцию $f(x)$ по формулам, аналогичным формулам Фурье. При этом, конечно, интегрирование берется в новом смысле.

П. Л. Ульянов

4706. О линейных множествах, не несущих псевдомеры. Кахан, Салем (Sur les ensembles linéaires ne portant pas de pseudomesures. Kahane Jean-Pierre, Salem Raphaël), C. r. Acad. sci., 1956, **243**, № 17, 1185—1187 (франц.)

Спектр ограниченной последовательности $\{c_n\}$ коэффициентов ряда

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \quad (1)$$

считается лежащим на замкнутом множестве $E \subset (0, 2\pi)$, если почленно проинтегрированный ряд представляет константу на каждом смежном интервале к E.

E называется множеством без истинной псевдомеры, если для всякой $\{c_n\}$, спектр которой лежит на E, ряд (1) будет рядом Фурье—Стилтьеса. Говорят, что для E возможно спектральное обобщение, если для всякой $\{c_n\}$, спектр которой лежит на E, и любого абсолютно сходящего ряда $\sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_n e^{inx}$ с суммой, равной нулю E, будет $\sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_n c_{-n} = 0$.

Замкнутое множество E называется множеством Карлесона (соответственно Хелсона), если всякую непрерывную на E функцию можно продолжить вне E так, что она будет суммой абсолютно сходящегося ряда вида $\sum_0^{\infty} \gamma_n e^{inx}$ $\left(\text{соответственно } \sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_n e^{inx}\right)$.

Устанавливается существование совершенных нигде не плотных множеств без истинной псевдомеры. Указываются следующие свойства:

1. Для множества без истинной псевдомеры возможно спектральное обобщение.

2. Множество без истинной псевдомеры будет множеством Хелсона.

3. Множество Хелсона, для которого возможно спектральное обобщение, будет множеством без истинной псевдомеры.

4. Множество без истинной псевдомеры будет множеством единственности для тригонометрических рядов.

5. Если E — множество Хелсона, то всякая арифметическая прогрессия из N членов имеет не более $[A \log N]$ членов, принадлежащих E (константа A зависит только от E).

А. А. Шнейдер

4707. О множествах Карлесона и Хелсона. Кахан, Салем (Sur les ensembles de Carleson et de Helson. Kahane Jean-Pierre, Salem Raphaël), C. r. Acad. sci., 1956, **243**, № 22, 1706—1708 (франц.)

Доказывается свойство 5, указанное в предыдущей заметке авторов (реф. 4706), причем устанавливается, что в этом свойстве множитель $\log N$ нельзя заменить на функцию, растущую медленнее, чем $\log N$. Доказывается, что всякое симметричное совершенное множество не является множеством Хелсона (этот результат получается как следствие несколько более общей теоремы).

А. А. Шнейдер

4708. О суммировании сопряженных рядов и рядов Фурье-Данжуа. Джваршейшвили А. Г., Тр. Тбилис. матем. ин-та, 1955, 22, 203—225

Рассматриваются ряды Фурье от 2π-периодических функций f, интегрируемых по Данжуа-Перрону $(f \in D^*(0, 2\pi))$.

По определению Харди и Рогозинского, регулярный метод суммирования T, определенный с помощью матрицы $\|c_{m,n}\|$, называется K-методом, если

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \,|\, c_{m,n} \,| \leqslant A(m) \quad (m = 0, 1, \ldots),$$

где $A(m)$ — конечная величина для каждого m.

Сформулируем характерные результаты:

Теорема 3. Пусть $f(x) \in D^*(0, 2\pi)$ имеет ряд Фурье

$$f(x) \sim a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad (1)$$

Если T — некоторый K-метод суммирования, удовлетворяющий условию

$$\int_0^{\pi} t \left| K_m'(t) \right| dt < C \quad (m = 0, 1, \ldots; \ C \text{ — постоянная}),$$

где ядро

$$K_m(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{m,n} \frac{\sin(n + 1/2)t}{2 \sin t/2}$$

абсолютно непрерывно на отрезке $[\eta, \pi]$ для любого $\eta > 0$, то ряд (1) суммируем методом T в точке x_0 к значению $f(x_0)$, как только $\left[\int_0^x f(u)\,du\right]'_{x=x_0} = f(x_0)$.

Аналогичного типа теорема (теорема 4) доказывается и для ряда, сопряженного к ряду (1).

Из этих теорем автор получает, что ряд Фурье—Данжуа (а также и его сопряженный ряд) почти всюду суммируем методом Абеля к функции $f(x)$ (к $\overline{f}(x)$).

В § 3 доказывается равенство Рисса для класса функций f, интегрируемых по Данжуа—Перрону. При этом за дополнительный класс берется множество функций с ограниченной вариацией. В § 4 рассматривается вопрос суммируемости ряда (1) методом (R_2).

Примечание референта. Некоторые из результатов автора известны. В статье не цитируются известные результаты Фату, Привалова, Марцинкевича, Зигмунда и др. Так из теоремы Фату (из теоремы Привалова) вытекает суммируемость почти всюду ряда Фурье—Данжуа $f \in D^*$ методом Абеля (методом (C, r), $r > 1$) к $f(x)$ (см., например, Зигмунд А., Тригонометрические ряды, М.—Л., 1939, 58—63; 68, задача 9). Такого же типа результаты имеют место и для сопряженных рядов (см. вышеуказанную книгу, стр. 166—167, задачи 11—13).

Отметим еще наиболее интересный случай. Ядро Фейера ее удовлетворяет требованиям теоремы 3 и тем не менее известно (Marcinkiewicz J., Fundam. math., 1936, 27, 42, теор. 5), что ряд Фурье—Данжуа почти всюду суммируем методом $(C, 1)$, а стало быть и сопряженный ряд почти всюду суммируем методом $(C, 1)$ (Marcinkiewiz J., Zygmund A., Fungam. math., 1936, 26, 6, теор. 3 (случай α)).

В работе имеется несколько опечаток.

П. Л. Ульянов

4709. Об абсолютной суммируемости рядов Фурье функций двух переменных. Тиман М. Ф., Сообщ. АН ГрузССР, 1956, 17, № 6, 481—488

Рассматривается $|C, \alpha, \beta|$-суммирование (РЖМат, 1955, 3277) рядов Фурье функций двух переменных. Основной результат.

Теорема 2. Необходимым и достаточным условием $|C, \alpha, \beta|$-суммируемости ряда Фурье функции $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) является существование конечных и интегрируемых в квадрате $(0, \pi; 0, \pi)$ частных производных

$$\frac{\partial^2 \varphi_{\alpha,\beta}(u, v)}{\partial u \partial v}, \quad \frac{\partial \varphi_{\alpha,0}(u, v)}{\partial u}, \quad \frac{\partial \varphi_{0,\beta}(u, v)}{\partial v}$$

(при некоторых $\alpha, \beta \geqslant 0$), где $\varphi_{\alpha,\beta}(u, v)$ интегральные средние (определяются сложными формулами).

При доказательстве использована серия оценок, взятых из одной статьи Бозанке.

В работе много опечаток (в большинстве случаев, легко поправимых), встречаются неясные формулировки.

М. П. Щеглов

4710. Об одном свойстве и новом определении обобщенных почти-периодических функций А. С. Безиковича. Кованько А. С., Укр. матем. ж., 1956, 8, № 3, 273—288

Пусть B_p — почти периодические функции Безиковича, т. е. замыкание множества тригонометрических многочленов в метрике

$$D_{B_p}(f, g) = \overline{\lim_{T\to\infty}} \left[\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |f(x) - g(x)|^p\,dx\right]^{1/p}$$

Далее пусть A_p есть класс функций $f(x)$ $(-\infty < x < \infty)$, удовлетворяющих следующим условиям:

1. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$, что

$$\overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{2T} \int_{E\cap(-T, T)} |f(x)|^p\,dx < \varepsilon, \text{ если}$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\operatorname{mes}[E\cap(-T, T)]}{2T} < \eta.$$

2. Для любого $\varepsilon > 0$ существуют $\eta > 0$ и относительно плотное множество почти периодов τ таких, что

$$|f(x+t) - f(x)| < \varepsilon$$

для $\tau - \eta < t < \tau + \eta$ и любого x, исключая, быть может такое множество E_t, что

$$\overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{\operatorname{mes}[E_t\cap(-T, T)]}{2T} < \eta.$$

3. Каково бы ни было a, существует такая периодическая функция $f^{(a)}(x)$ периода a, почти всюду конечная, что последовательность

$$\sigma_{na}[f(x)] = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x + ka)$$

сходится «$\tilde{B}$ по мере» к $f^{(a)}(x)$ (последовательность $\{f_n(x)\}$ называется сходящейся «$\tilde{B}$ по мере» к $f(x)$, если для любого $\varepsilon > 0$ множество точек $E_{n\varepsilon}$, где $|f(x) - f_n(x)| \geqslant \varepsilon$, таково, что

$$\lim_{n\to\infty} \overline{\lim_{T\to\infty}} \left(\frac{\operatorname{mes}[E_{n\varepsilon}\cap(-T, T)]}{2T} = 0\right),$$

В работе доказана теорема: Классы A_p и B_p совпадают.

Результаты работы тесно соприкасаются с результатами работы Досса (РЖМат, 1955, 677).

Б. М. Левитан

4711 К. Тригонометрические ряды (обзор). Джефри (Trigonometric series: a survey; presidential address, Royal Society of Canada, section 3, 1953. Jeffery Ralph Lent. Toronto, Univ. Press; London, Oxford Univ. Press, 1956, iv. 39 pp., ill, 20 sh.) (англ.)

См. также: 4550, 4926 К, 4952, 4953, 4957, 4983, 4986, 4987

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

4712. Комплексные числа. Алгоритм и его основное применение в электротехнике. Монтальто (I numeri complessi. L'algoritmo e le principali applicazioni nella elettrotecnica circuitale. Montalto Ennio), Elettrificazione, 1956, №11, 527—533 (итал.)

4713. Об определении сопряженных гармонических функций. Таргонский, Богнар (Über die Bestimmung konjugierter harmonischer Funktionen. Targonszky G., Bognar Z.), Publs mat., 1954, 3, № 3—4, 215—216 (нем.)

Авторы показывают, каким образом по вещественной

части может быть восстановлена аналитическая функция без использования интегрирования. Новых результатов работа не содержит (см., например, М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, Методы теории функций комплексного переменного, М.—Л., 1951, стр. 181).

Г. Н. Положий

4714. О значениях некоторых определенных интегралов. Митрович (Sur les valeurs de certaines intégrales définies. Mitrović, Dragiša), Glasnik mat.-fiz. i astron., 1955, **10**, № 4, 259—263 (франц.; рез. сербо-хорв.)

Вычисляются некоторые определенные интегралы по комплексному переменному. В результате вычислений получаются формулы, частными случаями которых являются формула Иенсена и теорема Руше.

Н. А. Давыдов

4715. О некотором степенном ряде. Штейнхаус (O pewnym szeregu potęgowym. Steinhaus H.), Roczn. Polsk. towarz. mat., 1955, Ser. 1, **1**. № 2, 276—284 (польск.; рез. русс., англ.)

Функция

$$f_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2^n} \qquad (1)$$

удовлетворяет на полуинтервале $[0,1)$ функциональному уравнению

$$f(x) + f(x^2) = x. \qquad (2)$$

Доказывается, что f_0 — единственная аналитическая функция, которая удовлетворяет (2). Строится класс функций, дифференцируемых на $(0,1)$ и удовлетворяющих (2) на $[0,1)$; всякое решение уравнения (2), отличное от f_0, разрывно в точке 0.

Доказывается, что может существовать не более одного решения уравнения (2), непрерывного в точке 1, но неизвестно, существует ли такое решение f_1; во всяком случае $\lim_{x\to 1-0} f_0(x)$ не существует, следовательно $f_1 \neq f_0$.

Ряд (1) изучается также в комплексной области. Ставится ряд проблем, не решенных до сих пор.

K. Tatarkiewicz

4716. Альтернативное доказательство леммы Харди. Шах (An alternativ-proof of Hardy's lemma. Shah G. T.), J. Univ. Poona Sci. and Technol., 1953, № 4, 105—107 (англ.)

Пусть

$$f(z) = z\{(1-z)(1-z^2)\ldots(1-z^n)\ldots\}^{24}.$$

Харди (Hardy, Proc. Cambridge Philos. Soc., 1927, **23**, 675—680) доказал, что $f(z) = f(re^{i\theta}) = 0\,(1-r)^6$ — равномерно относительно θ. В работе приводится новое доказательство этой леммы.

Примечание референта. Представив θ в виде $\theta = 2\pi p/q + \varphi$, автор указывает лишь, что $0 < p < q < [\sqrt{n}] + 1$. По-видимому, целые p и q нужно выбрать так, чтобы выполнялись неравенства $|q\theta/2\pi - p| < n^{-0,5}$, $0 < q \leqslant n^{0,5}$, что, как известно, всегда возможно. На стр. 107 автор выбирает $r = 1 - 1/n$. Это невозможно, так как на стр. 106 установлено, что $r = \exp(-1/n)$. Правда, $\exp(-1/n) = 1 - 1/n + O(1/n^2)$, так что доказательство остается верным. В работе имеются опечатки.

Н. И. Фельдман

4717. Униформизированная комплексная функция Минковского освещает происхождение действительных канонических непрерывных дробей. Данжуа (La fonction minkowskienne complexe uniformisée éclaire la genèse des fractions continues canoniques réelles. Denjoy Arnaud), C. r. Acad. sci., 1956, 242, № 15, 1817—1823 (франц.)

Функция Минковского $\xi = \xi(x)$ определена первоначально равенствами

$$x = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}}$$

$$\xi = 2\left(\frac{1}{2^{a_1}} - \frac{1}{2^{a_1+a_2}} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{a_1+a_2+\ldots+a_n}}\right)$$

при любых целых положительных n, a_1, a_2, …, a_n и условием непрерывности на сегменте $[0,1]$. Она обобщается и изучается как функция двух действительных переменных (x, α), $-\infty < x < +\infty$ и распространяется на верхнюю полуплоскость плоскости комплексного переменного $z = x + iy$ как аналитическая функция, имеющая своими предельными значениями при $z \to x$ значения функции Минковского при $z = x$ (Denjoy A., C. r. Acad. sci., 1932, 194, 44; 1934, 198, 44). В реферируемой статье изучаются свойства разрезов, которые необходимо сделать в верхней полуплоскости для обеспечения однозначности построенной функции, и полученные результаты прилагаются к некоторым вопросам теории непрерывных дробей.

Н. В. Ламбин

4718. О коэффициентах некоторых функций, мероморфных в единичном круге. Шанфи (Sur les coefficients de certaines fonctions méromorphes dans le cercle unité. Chamfy Christiane), C. r. Acad. sci., 1956, **243**, № 3, 225—227 (франц.)

Пусть функция $f(z)$, мероморфная в $|z| \leqslant 1$, действительная для действительных z, имеет в $|z| < 1$ p полюсов, отличных от нуля, различных или совпадающих, и на $|z| = 1$ удовлетворяет условию $|f(z)| \leqslant 1$. Пусть $f(z) = u_0 + u_1 z + \ldots + u_n z^n + \ldots$ $(u_0 \neq 0)$ в окрестности точки $z = 0$.

Указывается метод, с помощью которого можно получить неравенства для коэффициентов u_n функции $f(z)$, являющиеся необходимыми и достаточными условиями для того, чтобы функция $f(z)$ имела p полюсов в $|z| < 1$.

Построение аналогично методу Дюфренуа и Пизо (РЖМат, 1956, 980), изучавших случай функции $f(z)$ с одним простым полюсом в $|z| < 1$.

Б. Н. Рахманов

4719. О максимуме модуля и коэффициентах целого ряда Дирихле. Рахман (On the maximum modulus and the coefficients of an entire Dirichlet series. Rahman Qazi Ibadur), Tôhoku Math. J., 1956, 8, № 1, 108—113 (англ.)

Рассматривается ряд Дирихле

$$f(s) = \sum_1^{\infty} a_n e^{s\lambda_n} \quad (s = \sigma + it,\ 0 \leqslant \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n \to \infty)$$

при условии $\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\lambda_n} < \infty$ с абсциссой абсолютной сходимости $\sigma_a = \infty$ (следовательно, функция $f(s)$ — целая). Вводятся величины: $\mu(\sigma)$ — максимум $|a_n e^{\sigma\lambda_n}|$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $M(\sigma)$ — верхняя грань $|f(\sigma + it)|$ $(-\infty < t < \infty)$ и $\lambda(\sigma)$ — такое λ_n, которое соответствует максимальному (по модулю) члену ряда при данном σ. Выводится ряд соотношений между величинами σ, $\mu(\sigma)$, $M(\sigma)$ и $\lambda(\sigma)$.

Г. Л. Лунц

4720. Заметка о рядах Дирихле (XIV). Об особенностях ряда Дирихле (VI.) Танака (Note on Dirichlet series (XIV). On the singularities of Dirichlet series (VI). Tanaka Chuji.), Tôhoku Math. J., 1955, **7**, № 3, 229—239 (англ.)

Если абсцисса сходимости σ_s ряда Дирихле

$$F(s)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}\ (s=\sigma+it,\ 0\leqslant\lambda_1<\ldots<\lambda_n\to\infty)$$

равна нулю, то точка s_0 на прямой $\sigma=0$ называется точкой Пикара, если в любом правом полукруге с центром в этой точке $F(s)$ принимает все значения, кроме, быть может, двух.

Доказывается основная теорема, устанавливающая условия для $\{a_n\}$, при которых $s=0$ будет точкой Пикара. С помощью основной теоремы доказывается ряд других теорем такого же типа, например, следующая: Если $\sigma_s=0$, то для того чтобы точка $s=0$ была точкой Пикара, достаточно, чтобы существовала такая последовательность $\{x_k\}$ $(0<x_k\to\infty)$, что

$$\text{а)}\ \overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{\ln|\Delta_k|}{x_k}=0,\ \overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{\ln^+\ln^+|\Delta_k|}{\ln x_k}>\frac{1}{2},$$

где

$$\Delta_k=\sum_{[x_k]\leqslant\lambda_n<x_k}\operatorname{Re} a_n;$$

б) $\operatorname{Re} a_n\geqslant 0$ при $[x_k](1-\alpha)\leqslant\lambda_n\leqslant[x_k](1+\alpha)$ $(k=1,2,\ldots)$, где $0<\alpha<1$.

Из доказанных теорем следует, в частности, такое утверждение: Если абсцисса сходимости $\sigma_s=0$, $\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}>1$ и

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln^+\ln^+|a_n|}{\ln\lambda_n}>\frac{1}{2},$$

то все точки на прямой $\sigma=0$ являются точками Пикара. Г. Л. Лунц

4721. Сходимость общего ряда многочленов. Гасанов А. Д., Тр. Азерб. гос. заоч. пед. ин-та, 1956, 3, 165—169

Изучается сходимость ряда многочленов

$$a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\prod_{k=1}^{n}(z-z_{nk}),$$

где z_{nk} — числа треугольной таблицы, подчиненные некоторым ограничениям. В работе имеются опечатки. Б. А. Рымаренко

4722. О взвешенно-полиномиальном приближении дифференцируемых функций на вещественной оси. Тонян В. А., Докл. АН СССР, 1955, 105, № 4, 656—658

Рассматривается наилучшее взвешенное приближение дифференцируемых на всей вещественной оси функций с весовой функцией $h(x)$, от которой требуется лишь, чтобы она удовлетворяла условиям

$$\varphi(x)=\frac{1}{|x|}\ln\frac{1}{h(x)}\to\infty\ \text{при}\ x\to\infty;\ h(-x)=h(x).$$

Обозначим через

$$E_n(f,h)=\inf_{\{P_n\}}\sup_{-\infty<x<\infty}h(x)|f(x)-P_n(x)|,$$

где нижняя грань берется по всем полиномам $P_n(x)$ степени $\leqslant n$, и через $x=\mathfrak{D}(y)$ — функцию, обратную к $y=x\varphi^{-1}(x)$.

Теорема. Пусть $f(x)$ — дифференцируемая на всей оси функция, такая, что

$$\max_{-x\leqslant t\leqslant x}|f(t)|\leqslant M_1(x),\quad\max_{-x\leqslant t\leqslant x}|f'(t)|\leqslant M_2(x).$$

Если положить $M_1(x)\,h(x)=M_3(x)$, то

$$E_n(f,h)\leqslant A\{M_3[M_2^{-1}([\mathfrak{D}(n)]^{1-\varkappa})]+[\mathfrak{D}(n)]^{-\varkappa}\},$$

где $0<\varkappa<1$ — любое, A — не зависит от n.

Доказательство подробно не проведено, кратко намечена лишь его идея. В. С. Виденский

4723. О наилучшем приближении целыми функциями в комплексной области. Джрбашян М. М., Тамадян А. П., Изв. АН СССР, сер. матем., 1956, 20, № 4, 485—512

Доказываются прямые и обратные теоремы наилучшего приближения целыми функциями в бесконечной области, которая является суммой двух произвольных вертикальных углов или же углом данного раствора.

Пусть для данного $\rho\geqslant 1$ области $D_1^{(\rho)}$ и $D_2^{(\rho)}$ определяются соответственно из условий:

$$|\arg z|<\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{\rho}\right),\ |\arg z+\pi|<\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{\rho}\right)$$

и

$$D^{(\rho)}=D_1^{(\rho)}+D_2^{(\rho)}.$$

Результаты настоящей работы относительно наилучшего приближения функции в области $D^{(\rho)}$ посредством целых функций порядка $\rho\geqslant 1$ и типа $\sigma>0$ обобщают соответствующие результаты С. Н. Бернштейна о наилучшем приближении функции на вещественной оси посредством целых функций конечной степени. При $\rho=1$ $\overline{D}^{(\rho)}$ превращается в действительную ось (Бернштейн С. Н., Собр. соч., том II, М., 1954, статьи 84, 89). Основные утверждения работы следующие:

1. Если функция $f(z)$ голоморфна в $D_1^{(\rho)}$ и $D_2^{(\rho)}$, непрерывна и ограничена на $\overline{D}^{(\rho)}$ $(\rho\geqslant 1)$ вместе со своими производными до порядка $p-1$ $(p\geqslant 1)$ включительно, причем

$$\sup_{z\in\overline{D}^{(\rho)}}|f^{(p)}(z)|\leqslant M_p<+\infty,$$

то $A_\sigma^{(\rho)}(f;\ D^{(\rho)})\leqslant C_p\frac{M_p}{\sigma^{p/\rho}}$, где постоянная C_p не зависит от $\sigma>0$ и функции $f(z)$.

Здесь $A_\sigma^{(\rho)}(f)=\inf_{\{g_\sigma\}}\{\sup_{\overline{D}}|f(z)-g_\sigma(z)|\}$, причем нижняя грань берется в семействе всех целых функций $g_\sigma(z)$ порядка ρ и типа $\leqslant\sigma$.

2. Если функция $f(z)$ голоморфна в $D_1^{(\rho)}$ и $D_2^{(\rho)}$, непрерывна и ограничена на $\overline{D}^{(\rho)}$ вместе со своими производными до порядка p $(p\geqslant 1)$ включительно, причем

$$\omega(h;\ f^{(p)})=\sup_{|z'-z''|\leqslant h}|f^{(p)}(z')-f^{(p)}(z'')|$$

— модуль непрерывности функции $f^{(p)}(z)$ на $D^{(\rho)}$, то при $\sigma\geqslant 1$ $A_\sigma^{(\rho)}(f;\ D^{(\rho)})\leqslant C_p^*\frac{\omega\left(\frac{1}{\sigma^{1/\rho}};\ f^{(p)}\right)}{\sigma^{p/\rho}}$, где постоянная C_p^* не зависит от σ и функции $f(z)$.

3. Пусть $f(z)$ — ограниченная функция комплексного переменного z, определенная на замкнутом множестве $\overline{D}^{(\rho)}$ $(\rho\geqslant 1)$, и пусть для любого $\sigma>0$ имеет место неравенство

$$A_\sigma(f;\ \overline{D}^{(\rho)})\leqslant\frac{C}{\sigma^r}\ (r>0),$$

где $C>0$ — постоянная, не зависящая от σ. Тогда справедливо следующее: если $\rho \geqslant 1$ и $r=p+\alpha$, где $p \geqslant 0$ — целое число и $0<\alpha \leqslant 1$, то функция $f(z)$ голоморфна при $\rho>1$ на $D_1^{(\rho)}$ и $D_2^{(\rho)}$ и непрерывна вместе со своими производными до порядка p включительно на всякой конечной части замкнутого множества $\overline{D}^{(\rho)}$. Кроме того, как функция от длины дуги на всякой конечной части границы $D^{(\rho)}$ при $0<\alpha<1$, $f^{(p)}(z) \in \operatorname{Lip}\alpha$, а при $\alpha=1$

$$\omega(h;\ f^{(p)}) \leqslant Mh \ln \frac{1}{h} \quad (0<h<1).$$

Подобные же утверждения доказаны в области угла $G^{(\rho)}$:

$$\left|\arg z - \frac{\pi}{2}\right| < \pi\left(1-\frac{1}{2\rho}\right),\ \rho>\frac{1}{2}.$$

Приводятся также результаты, показывающие, что при достаточно быстром стремлении к нулю чисел $A_\sigma^{(\rho)}(f)$ при $\sigma \to +\infty$ приближаемая функция $f(z)$ необходимо будет голоморфной и ограниченной в более широкой области, чем та угловая область, где происходит аппроксимация.

Доказательства вышеприведенных утверждений базируются на ряде лемм Кобера (Kober H., Trans. Amer. Math. Soc., 1943, 54, 70—82; 1944, 56, 7—31).

И. И. Ибрагимов

4724. Последовательности производных и нормальные семейства. Мак-Лейн (Sequences of derivatives and normal families. MacLane G. R.), J. Analyse Math., 1952—1953, 2, 72—87 (англ.; рез. евр.)

Пусть $f(z)$ — голоморфная функция в области D и $\{f^{(n)}(z)\}$ — семейство всех производных этой функции. В работе дается необходимое и достаточное условие компактности семейства $\{f^{(n)}(z)\}$. Строятся примеры функций $f(z)$, для которых семейство $\{f^{(n)}(z)\}$ не является компактным. Доказывается также следующая теорема: Существует целая функция $u(z)$, удовлетворяющая условию

$$|u(z)| = O\left(e^{(1+\varepsilon)|z|}\right)$$

при любом $\varepsilon>0$, такая, что для любой односвязной области D и любой голоморфной функции $\varphi(z)$ в D существует возрастающая последовательность $\{n_j\}$ натуральных чисел, так что

$$u^{(n_j)}(z) \to \varphi(z)$$

равномерно внутри D. Т. И. Краснощекова

4725. Теория однолистных функций в Китае. Чэнь Цзянь-гун (單葉函數論在中國. 陳建功), 科學通報, Кэсюэ тунбао, 1955, № 11, 87—92, 58 (кит.)

Краткий обзор результатов по теории однолистных функций, полученных китайскими математиками за несколько последних лет. Статья содержит следующие восемь частей: 1) Искажение однолистного отображения; 2) Оценка коэффициентов определенных членов ряда; 3) Коэффициенты функций, принадлежащих классу S; 4) Специальные однолистные функции; 5) Отрезки однолистных функций; 6) Максимум произведения конформных радиусов; 7) Обобщение однолистных функций; 8) Функции, родственные однолистным.

Большая часть результатов, упомянутых в этой статье, содержится в следующих работах: Гун Шэн Kung Sun, Science Record, 1951, 4, 333—341; 343—349; РЖМат, 1955, 174, 175, 694, 1163, 3166, 3708; 1956, 7282), Ся Дао-син (Shah Tao-shing, Science Record, 1951, 4, 209—212; РЖМат, 1955, 172), Чжан Мин-юн (Zhang Ming-yung, Science Record, 1952, 5, 17—21; РЖМат, 1953, 689; РЖМат, 1955, 1927, 3707).

Чжэнь Мин-дэ

4726. Топологическое доказательство одной теоремы комплексного анализа. Планкетт (A topological proof of a theorem of complex analysis. Plunkett Robert L.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1956, 42, № 7, 425—426 (англ.)

Приводится новое топологическое доказательство теоремы: Если $f(z)$ — функция, аналитическая в области E комплексной плоскости z, однолистная в некоторой окрестности точки $z_0 \in E$, то $f'(z_0) \neq 0$.

Г. Д. Суворов

4727. О непрерывности в замкнутом круге функций, регулярных в открытом круге. Суворов Г. Д., Успехи матем. наук, 1956, 11, № 3, 177—179

Даются необходимые и достаточные условия для того, чтобы конформное отображение $w=f(z)$, $f(0)=0$ круга $|z|<1$ на область G могло быть продолжено до непрерывного отображения замкнутого круга $|z| \leqslant 1$. Условия формулируются в терминах геометрических свойств области G. Аналогичным образом даются необходимые и достаточные условия для того, чтобы каждый член последовательности конформных отображений $f_n(z)$, $f_n(0)=0$, $f_n'(0)>0$, $n=1, 2, \ldots$, можно было продолжить до непрерывного отображения замкнутого круга $|z| \leqslant 1$ таким образом, чтобы последовательность полученных отображений сходилась равномерно в $|z| \leqslant 1$. Л. Д. Кудрявцев

4728. Теорема о простых концах. Коллингвуд (A theorem on prime ends. Collingwood E. F.), J. London Math. Soc., 1956, 31, № 3, 344—349 (англ.)

Пусть D — произвольная ограниченная односвязная область плоскости, E — множество всех простых концов D и E_1, E_2, E_3, E_4 — множества простых концов D соответственно 1-, 2-, 3-, 4-го типа (по Каратеодори).

В работе доказывается, что для всякой области D множество $E_1 \cup E_3$ — II категории в E (следовательно, $E_2 \cup E_4$ — I категории). При конформном отображении D на $|z|<1$ это множество переходит во множество точек на $|z|=1$ также II категории. Доказательство получается сопоставлением теоремы Линделёфа (Lindelöf, Acta Soc. scient. Fenn., 1915, 46, № 4, 28) с теоремой автора об одном граничном свойстве мероморфной в единичном круге функции (РЖМат, 1956, 1279, первая из приведенных в реферате теорем).

Таким образом в работе (с учетом прочих результатов, установленных Каратеодори) содержится исчерпывающий ответ на вопрос о существовании и мощности простых концов любого типа. В частности, из теоремы автора следует известный результат Урысона и Вениаминова (если $E_3 \cup E_4$ пусто, то E_1 — II категории, следовательно, $E \setminus E_2$ не пусто).

Автор приводит несколько исправлений к своей прежней (цитированной выше) работе. Г. Д. Суворов

4729. О конформном отображении полос. Лелон-Ферран (Sur la représentation conforme des bandes. Lelong-Ferrand J.), J. Anylse Math., 1952—1953, 2, 51—71 (франц.; рез. евр.)

Пусть Δ — односвязная область плоскости w с бесконечно-удаленной достижимой граничной точкой α, $v=g(u)$ — кривая, определенная для $u \geqslant u_0$ с концом в α, $\theta(u)$ — длина отрезка вертикали с абсциссой u, отделяющего точку $u_0+ig(u_0)$ от α. Пусть $z=\varphi(w)$ отображает конформно Δ на полосу $D\left(|y|<\frac{a}{2}\right)$ пло-

скости $z=x+iy$, причем a соответствует $x=+\infty$. В одной из предыдущих работ (J. math. pures et appl., Paris, 1952, 103—126) автор изучал вопрос о сходимости последовательности функций $\varphi_n(w)=\varphi(w+w_n)-\varphi(w_n)$ $(w_n\to a)$ в зависимости от сходимости в смысле Каратеодори областей Δ_n, D_n, получающихся из областей Δ, D сдвигом соответственно на вектора $-w_n$, $-\varphi(w_n)$, и отображающихся друг на друга конформно с помощью функций $\varphi_n(w)$. В реферируемой работе получены некоторые геометрические характеристики области Δ, обеспечивающие сходимость областей Δ_n; кроме этого, делаются оценки разности $\underline{X}(u'')-\overline{X}(u')$, $u''>u'$, обобщающие известные оценки Альфорса и предыдущие результаты автора (см., например, Мандельбройт, Примыкающие ряды, Изд-во ин. лит., 1955, стр. 39; РЖМат, 1956, 6553). Из-за громоздкости формулировок ограничимся приведением двух более частных, но характерных результатов:

1 (Теорема 13). Пусть область Δ определена неравенствами $u>u_0$, $g_1(u)<v<g_2(u)$, и пусть существует последовательность u_n $(u_n\to+\infty)$, для которой

$$\frac{1}{l}\Big[g_i(u_n+l)-g_i(u_n)\Big]\to\operatorname{tg}\mu\qquad(i=1,2)$$

для всякого фиксированного l. Тогда

$$\varphi(w+w_n)-\varphi(w_n)\sim\frac{aw}{\theta_n\cos\mu}\,e^{-i\mu},$$

$$\varphi'(w+w_n)\sim\frac{ae^{-i\mu}}{\theta_n\cos\mu},$$

где

$$\theta_n=g_2(u_n)-g_1(u_n)\qquad w_n=u_n+\frac{i}{2}\,[g_1(u_n)+g_2(u_n)].$$

Если $\theta_n>k>0$, то $\varphi^{(p)}(w+w_n)\to0$ для всякого $p>1$.

2 (Теорема 15). Пусть область Δ содержит область Δ', ограниченную кривыми $v=g_1(u)$, $v=g_2(u)$, $g_2>g_1$, причем $\int^{\infty}g_i'^2(u)\,du<\infty$ $(i=1,2)$ и $0<\alpha<g_2-g_1<\beta$. Тогда

$$\underline{X}(u'')-\overline{X}(u')<\int_{u'}^{u''}\frac{a\,du}{g_2(u)-g_1(u)}+o(u')$$

$(u''>u')$, $o(u')\to0$ при $u'\to+\infty$.

Библ. 12 назв. И. Н. Песин

4730. О тейлоровых коэффициентах однолистных функций. Бернацкий М., Бюл. Польской АН, 1956, Отд. 3, 4, № 1, 5—8

Пусть S — класс функций

$$f(z)=z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n+\ldots$$

голоморфных и однолистных в круге $|z|<1$.

Доказывается теорема: Имеет место неравенство

$$\big||a_{n+1}|-|a_n|\big|<C(\ln n)^{3/2}\qquad(n=2,3,\ldots),$$

где C — числовая постоянная.

Голузиным ранее было показано (Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, М.—Л., Гостехиздат, 1952, 207), что

$$\big||a_{n+1}|-|a_n|\big|\leqslant Cn^{1/4}\ln n\qquad(n=2,3,\ldots),$$

где C — числовая постоянная. Б. Н. Рахманов

4731. К теории однолистных функций и функций Бибербаха-Эйленберга. Аленицын Ю. Е., Докл. АН СССР, 1956, 109, № 2, 247—249

Доказывается (теорема 1): Если функция $f(z)$, $f(0)=0$, регулярная в круге $|z|<1$, и функция $F(z)$, $F(0)=\infty$, мероморфная в нем, однолистно отображают этот круг на взаимно не налегающие области, то для любых точек z и z' из круга $|z|<1$ имеем

$$\left|\ln\left(1-\frac{f(z)}{F(z')}\right)\right|\leqslant-\frac{1}{2}\ln(1-|z|^2)(1-|z'|^2).$$

При любых z и z' с $|z|=|z'|<1$ оценка является точной. Теорема непосредственно следует из леммы, основанной на одном результате Нехари (РЖМат, 1955, 5756). Теорема 1 переносится на класс C функций $f(z)$, регулярных в круге $|z|<1$, удовлетворяющих в нем условиям $f(0)=0$, $f(z_1)\cdot f(z_2)\neq1$ (класс функций Бибербаха—Эйленберга), $|z_1|<1$, $|z_2|<1$ и на его подкласс C_* однолистных функций.

Теорема 2. Если $f(z)\in C$, то в круге $|z|<1$ имеем точные оценки

$$|\ln(1-f^2(z))|\leqslant-\ln(1-|z|^2),$$

$$\left|\frac{f^2(z)\,f'(z)\,f'(0)}{1-f^2(z)}\right|\leqslant\frac{|z|^2}{1-|z|^2}.$$

Если $f(z)\in C_*$, то в круге $|z|<1$ имеем точную оценку

$$\left|\ln\frac{z^2f'(z)\,f'(0)}{f^2(z)}\pm\ln(1-f^2(z))\right|\leqslant-\ln(1-|z|^2).$$

Приводятся и некоторые другие оценки.

Б. Н. Рахманов

4732. О некоторых свойствах аналитических функций специальных классов. Дундученко (Про деякі властивості аналітичних функцій спеціальних класів. Дундученко Л. О.), Доповіді АН УРСР, 1956, № 2, 119—123 (укр.; рез. русс.)

Приводятся точные оценки $|w(z)|$, $|w'(z)|$, $|\arg w'(z)|$ для класса p-листных выпуклых функций вида $w(z)=z^p+\sum_{n=2}^{\infty}b_nz^{n+p-1}$, отображающих каждую окружность $|z|=r<1$ в замкнутую кривую, касательная к которой вращается в одном направлении при перемещении точки касания в определенном направлении вдоль кривой. Аналогичные результаты получены и для класса p-листных звездообразных относительно точки $w=0$ функций. В предположении s-кратной симметрии указываются точные оценки коэффициентов обоих классов. Для класса p-листных выпуклых функций указаны точные границы изменения радиуса кривизны образа окружности $|z|=r<1$ при отображении функциями этого класса. Кроме того, рассмотрены классы выпуклых и звездообразных функций, однолистных в круговом кольце $0<q<|z|<1$. Получены следующие точные неравенства для класса функций $f_*(z)$, $\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\rho}\frac{f_*(z)}{z}\,dz=1$, отображающих каждую окружность $|z|=\rho$, $q<\rho<1$ в замкнутую кривую, звездообразную относительно начала координат:

$$m\cdot r\leqslant|f_*(re^{i\varphi})|\leqslant M\cdot r,$$

$$m\left[F(-r)+F\left(-\frac{q}{r}\right)-1\right]\leqslant\left|f_*'(re^{i\psi})\right|\leqslant M\left[F(r)+F\left(\frac{q}{r}\right)-1\right],$$

где

$$m=\left\{\frac{\vartheta_0\left[\frac{\ln(-r)}{2\pi i};\ q\right]}{\tilde{\vartheta}_1\left[\frac{\ln(-r)}{2\pi i};\ q\right]}\right\}^2,\qquad M=\left\{\frac{\vartheta_0\left[\frac{\ln r}{2\pi i};\ q\right]}{\tilde{\vartheta}_1\left[\frac{\ln r}{2\pi i};\ q\right]}\right\}^2,$$

$$\vartheta_0\left(\frac{\ln z}{2\pi i};\ q\right)=A\prod_{k=0}^{\infty}(1-q^{2k-1}z)\left(1-\frac{q^{2k-1}}{z}\right);$$

$$\tilde{\vartheta}_1\left(\frac{\ln z}{2\pi i};\ q\right)=A(1-z)\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^{2k}z)\left(1-\frac{q^{2k}}{z}\right),$$

$$A=\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^{2k});\ F(z)=\frac{1+z}{1-z}+$$

$$+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{q^{2k}}{1-q^{2k}}\left(z^k-\frac{1}{z^k}\right).$$

Приведены некоторые аналогичные оценки и для других классов функций.

Автор указывает, что для получения этих оценок использованы структурные формулы для рассматриваемых классов, установленные в работах В. А. Зморовича. Б. Н. Рахманов

4733. Простое доказательство теоремы Бибербаха-Грунского. Цудзи (A simple proof of Bieberbach-Grunsky's theorem. Tsuji Masatsugu), Comment. math. Univ. St. Pauli, 1956, 5, № 1, 29—32 (англ.)

Дается сравнительно простое доказательство следующей теоремы Бибербаха-Грунского: Пусть D — область плоскости z, ограниченная n континуумами Γ_j, $j=1,2,\ldots,n$. Тогда D может быть конформно отображена на n-листный круг $|w|<1$, так что n заранее предписанных точек $\zeta_j^0\in\Gamma_j$, $j=1,2,\ldots,n$, переходят в точки, лежащие над $w=1$, причем при указанных условиях отображающая функция определяется единственным образом.

Для доказательства существования функций $w=f(z)$, конформно отображающих D на n-листный круг $|w|<1$, показывается, что вблизи любых граничных точек $\zeta_j\in\Gamma_j$, $j=1,2,\ldots,n$, найдутся точки $z_j^0\in D$ такие, что будут иметь место равенства $\sum_{j=1}^{n}u_i(z_j^0)=2\pi$, $i=1,2,\ldots,n$, где $u_i(z)=\int_{\Gamma_i}\frac{\partial g(\zeta,z)}{\partial\nu}|d\zeta|$, а $g(\zeta,z)$ — функция Грина области D.

Это обеспечивает однозначность функции $w=e^{-(u+iv)}=f(z)$, где $u(z)=\sum_{j=1}^{n}g(z,z_j^0)$, а $v(z)$ — функция, сопряженная к $u(z)$. Тогда с помощью принципа аргумента сразу проверяется, что построенная функция $w=f(z)$ отображает D на n-листный круг. Далее легко устанавливается возможность получения отображения с требуемой нормировкой. При доказательстве первой части теоремы существенно используется одна алгебраическая лемма элементарного характера. Г. Ц. Тумаркин

4734. Звездообразные функции p-го порядка в одном направлении. Сакагути (一方向に p 次星型なる函數. 坂口呆一), 數學, Сугаку, 1953, 5, № 3, 20—21 (япон.)

4735. Минимальный модуль и минимальное искажение для класса типично вещественных функций. Сюй Сяо-бай (典型實照函數的最小模和最小偏差. 徐小伯), 數學學報, Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica, 1956, 6, № 2, 313—319 (кит.; рез. англ.)

Пусть T_r есть класс типично вещественных функций и части I, II, III круга $|z|<1$ определены соответственно неравенствами

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1+z^2}{z}\right)\geqslant 2,\quad\left|\mathrm{Re}\left(\frac{1+z^2}{z}\right)\right|\leqslant 2,\quad\mathrm{Re}\left(\frac{1+z^2}{z}\right)\leqslant -2,$$

части IV, V, VII того же круга — неравенствами

$$\left|\frac{1+z^2}{z}\right|<2,\quad\mathrm{Re}\left(\frac{1+6z^2+z^4}{z+z^3}\right)\geqslant 4,$$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1+6z^2+z^4}{z+z^3}\right)\leqslant -4,$$

а часть VI тремя неравенствами:

$$\left|\frac{1+z^2}{z}\right|\geqslant 2,\quad\left|\mathrm{Re}\left(\frac{1+6z^2+z^4}{z+z^3}\right)\right|\leqslant 4,\quad|z|<1.$$

Части I, II, III вместе покрывают весь круг $|z|<1$, так же, как и части IV—VII.

Теорема 1. Если $f(z)\in T_r$, то в I, II, III соответственно верны точные оценки:

$$|f(z)|\geqslant\left|\frac{z}{(1+z)^2}\right|,\quad\left|\left(\frac{z}{(1-z)^2}\right)^2\mathrm{Im}\left(\frac{1+z^2}{z}\right)\right|,$$

$$\left|\frac{z}{(1-z)^2}\right|$$

Теорема 2. Если $f(z)\in T_r$, то в IV, V, VI, VII соответственно верны точные оценки:

$$|f'(z)|\geqslant 0,\quad\left|\frac{1-z}{(1+z)^3}\right|,$$

$$\left|\frac{z+z^3}{(1-z^2)^3}\mathrm{Im}\left(\frac{1+6z^2+z^4}{z+z^3}\right)\right|,\quad\left|\frac{1+z}{(1-z)^3}\right|.$$

Выписываются экстремальные функции, являющиеся, исключая случай IV, единственными.

Примечание референта. Г. В. Улина (в совместной работе с И. Я. Ашневич, РЖМат, 1956, 7272) нашла область значений $f(z)$ в классе T_r — результат, по существу содержащий теорему 1. Ю. Е. Аленицын

4736. Полнота системы собственных функций некоторого класса операторов в линейном топологическом пространстве с несчетным базисом. Евграфов М. А., Докл. АН СССР, 1956, 108, № 1, 13—15

В пространстве $\mathfrak{A}(\sigma(r))$ (РЖМат, 1957, 2221) рассматриваются оператор

$$A(F(x))=\rho(x)F(x)+\int_0^x\varepsilon_\lambda(x)F(\lambda)\,d\lambda$$

и союзный к нему

$$A^*(F(x))=\rho(x)F(x)+\int_x^\infty\varepsilon_x(\lambda)F(\lambda)\,d\lambda,$$

$\rho'(x)\neq 0$, $\rho(x_1)\neq\rho(x_2)$ при $x_1\neq x_2$.

Указываются условия (ввиду их громоздкости они не приводятся), при выполнении которых существует единственное решение уравнений

$$A(\varphi_\mu(x))=\rho(\mu)\varphi_\mu(x)\quad\text{и}\quad A^*(\psi_\mu(x))=\rho(\mu)\psi_\mu(x),$$

а также дополнительные условия, при которых система $\{\varphi_\mu(x)\}$ образует базис в $\mathfrak{A}(\sigma(r))$.

Доказательства не приводятся. Результаты аналогичны ранее полученным автором для счетного базиса (РЖМат, 1956, 8731). М. Г. Хапланов

4737. О некоторых классах аналитических функций в круговом кольце. Зморович В. А., Матем. сб., 1956, 40, № 2, 225—238

В теореме 1 автор устанавливает параметрическое представление для класса $B(r, R)$ аналитических в кольце $K(r, R)$, $0<r<|z|<R$, функций, удовлетворяющих условию $\int_{-\pi}^{\pi}|\operatorname{Re} f(\rho e^{i\varphi})|\,d\varphi<C(f), r<\rho<R$, аналогичное известному представлению такого же класса функций в круге с естественной заменой ядра Шварца на комплексное ядро Вилля.

Ранее автором было отмечено подобное представление для более узкого класса функций, у которых в $K(r, R)$ $\operatorname{Re} f(z)>0$ (РЖМат, 1953, 691).

Далее в теореме 2 дается параметрическое представление для класса $B_1(q, 1)$ однозначных мероморфных в кольце $K(q, 1)$ функций, имеющих в этом кольце конечное число полюсов первого порядка, каждая из которых входит при достаточно малом $\delta>0$ в классы $B(q, q+\delta)$ и $B(1-\delta, 1)$. Получающееся при этом представление имеет вид:

$$f(z)=\sum_{k=1}^{n}\omega(z; a_k, c_k)+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(ze^{-i\varphi})\,d\mu_1(\varphi)+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F\left(\frac{q}{z}e^{i\varphi}\right)d\mu_2(\varphi)-\alpha+i\beta, \qquad (1)$$

где $F(z)$ определялось ранее (РЖМат, 1953, 691), а $\Phi(z)=\sum_{k=1}^{n}\omega(z; a_k, c_k)$ — «функция особенностей», составленная по полюсам a_k $f(z)$: если a_k — полюс $f(z)$, а c_k вычет $f(z)$ относительно этого полюса, то

$$\omega(z; a_k, c_k)=-\frac{c_k}{2a_k}F\left(\frac{z}{a_k}\right)+\frac{\bar{c}_k}{2\bar{a}_k}F\left(\frac{1}{z\bar{a}_k}\right).$$

Использованная автором «функция особенностей» $\Phi(z)$, обладающая свойством:

$\operatorname{Re}\Phi(e^{i\varphi})=0$, $\operatorname{Re}\Phi(qe^{i\varphi})=\text{const}$, $-\pi\leqslant\varphi\leqslant\pi$, позволяет получить важное свойство представления (1), заключающееся в том, что граничные значения $\operatorname{Re} f(z)$ совпадают почти всюду на граничных окружностях $|z|=1$ и $|z|=q$ кольца $K(q, 1)$ соответственно с $\mu_1'(\varphi)$ и $\mu_2'(\varphi)$.

В теореме 3 указывается представление для аналитической в круге $|z|<R$ функции, имеющей в этом круге конечное число особых точек (полюсов или существенно особых точек) и входящей в класс $B(R-\delta, R)$ при некотором $\delta>0$.

Установленные в теореме 2 представления позволяют автору дать в теоремах 4 и 5 структурные формулы для классов $B^*(q, 1)$ и $B^0(q, 1)$ функций $f(z)$, для которых соответственно $f_1(z)=\frac{zf'(z)}{f(z)}\in B_1(q, 1)$ или $f_2(z)=1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\in B_1(q, 1)$.

При $q\to 0$ полученные формулы переходят в формулы, установленные ранее в работах автора, Гудмана и Паатеро. В качестве простого следствия из теорем 4 и 5 получается результат, обобщающий теорему Александера из теории однолистных в круге функций. Г. Ц. Тумаркин

4738. Граничные теоремы для аналитических функций. Лехто (Boundary theorems for analytic functions. Lehto Olli), Suomalais. tiedeakat. toim. mituks., 1955, Sar. A1, № 196, 8 pp. (англ.)

Доказаны следующие теоремы:

Теорема 1. Пусть $w=f(z)$ мероморфна в круге $|z|<1$ и пусть E — замыкание множества ее радиальных граничных значений (в плоскости w): $w=\lim_{r\to 1}f(re^{i\varphi})$, $0\leqslant\varphi<2\pi$. В зависимости от того будет ли множество значений $f(z)$ всюду плотно на плоскости w или нет, возможны следующие два случая: 1) $f(z)$ может выпускать не более двух значений, лежащих вне E; 2) $f(z)$ принимает или выпускает все значения в произвольной области, лежащей вне E.

Теорема 2. Пусть $w=f(z)$ — функция ограниченного вида в круге $|z|<1$ и пусть замыкание множества ее значений совпадает со всей плоскостью w. Тогда $f(z)$ может выпускать не более одного значения, лежащего вне E (см. теорему 1).

Приведены примеры, показывающие, что теоремы 1 и 2 не могут быть улучшены. С. Я. Хавинсон

4739. Несколько замечаний о граничном поведении аналитических и мероморфных функций. Багемихл, Зейдель (Some remarks on boundary behavior of analytic and meromorphic functions. Bagemihl F., Seidel W.), Nagoya Math. J., 1955, 9, oct., 79—85 (англ.)

Рассматривая аналитическую в единичном круге функцию

$$f(z)=\prod_{j=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{1-3^{-j}}\right)^{3^{2j}},$$

авторы устанавливают ее следующие свойства:

Теорема 1. Для каждого θ, $0\leqslant\theta<2\pi$, $f(z)\to\infty$ когда $z\to e^{i\theta}$ вдоль почти всех хорд, кончающихся в $e^{i\theta}$. Более точно это означает, что, если φ, $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$, угол, образованный хордой с радиусом, проведенным в $e^{i\theta}$, тогда множество значений φ, для которых $f(z)\to\infty$ вдоль соответствующей хорды, имеет лебегову меру π.

Теорема 2. Существует множество спиралей S_t, $0\leqslant t<1$, в $|z|<1$, каждая из которых асимптотически приближается к $|z|=1$, такое, что каждая точка $|z|<1$ принадлежит одной и только одной из этих спиралей, и для каждого t $\lim f(z)=\infty$, $|z|\to 1$, $z\in S_t$.

Делаются очевидные следствия из этих теорем для мероморфной функции $g(z)=\frac{1}{f(z)}$. Отмечается, что результат, аналогичный следствию из теоремы 1, не может иметь места для регулярных функций в силу одной теоремы Мейера.

Показывается, что теорема 2 не может иметь места для мероморфной функции, если спирали заменить жордановыми дугами, кончающимися на $|z|=1$.

Пусть Q — точка в $|z|<1$. Рассмотрим семейство жордановых дуг I_θ, $0\leqslant\theta<2\pi$, начинающихся в Q, кончающихся в точках $e^{i\theta}$ и таких, что через каждую точку $|z|<1$ (кроме Q) проходит одна и только одна кривая I_θ. Множество K назовем множеством предельных значений $h(z)$ вдоль I_θ, если для всякого

$w_0 \in K$ существует последовательность $\{z_n\} \subset I_\theta$, $z_n \to e^{i\theta}$, $h(z_n) \to w_0$.

Теорема 3. Пусть H — не пустое множество расширенной плоскости Z, имеющее гармоническую меру нуль. Пусть A — дуга на окружности $|z|=1$ и $h(z)$ — мероморфная в круге $|z|<1$ функция, $h(z) \not\equiv \text{const}$. Предположим, что P — подмножество A положительной меры на каждой дуге, лежащей на A, и что для каждой $e^{i\theta} \in P$ $\lim h(z) = \lambda(\theta)$, $z \to e^{i\theta}$, $z \in I_\theta$, существует и принадлежит H. Тогда существует множество $R \subset A$ такое, что $A-R$ первой категории на A и для каждого $e^{i\theta} \in R$ множество предельных значений $h(z)$ вдоль I_θ есть вся расширенная плоскость Z. С. Я. Хавинсон

4740. О классе H_p функций, аналитических в единичном круге. Танака (On the class H_p of functions analytic in the unit circle. Tanaka Chuji), Yokohama Math. J., 1956, 4, № 1, 47—53 (англ.)

Известно, что аналитическая в круге $|z|<1$ функция $f(z) \in H_p$ имеет угловые граничные значения $f(e^{i\theta})$ почти всюду на $|z|=1$ (см., например, Привалов И. И. Граничные свойства аналитических функций, изд. 2-е, М.—Л., 1950).

Усиливая этот результат, автор устанавливает теорему.

Теорема 1. Если $f(z) \in H_p$, $p>0$, то почти для всех θ существует простая замкнутая жорданова кривая C_θ (зависящая от θ и $f(z)$), лежащая, за исключением $z=e^{i\theta}$, в $|z|<1$ и имеющая в $z=e^{i\theta}$ общую касательную с $|z|=1$, такая, что будет существовать $\lim\limits_{z \to e^{i\theta}, z \in D_\theta} f(z) = f(e^{i\theta})$, где D_θ — замкнутая область, ограниченная C_θ.

Далее доказывается следующая теорема, распространяющая на функции класса H_p классическую теорему Линделёфа: Если $f(z) \in H_p$, $p>0$, и $\lim\limits_{\varphi \to \theta+0} f(e^{i\varphi}) = \alpha$, $\lim\limits_{\varphi \to \theta-0} f(e^{i\varphi}) = \beta$, (1) то $\alpha = \beta$ и $f(z)$ стремится равномерно к α при $z \to e^{i\theta}$ в единичном круге.

Примечание референта. Теорема 1 будет справедлива не только для функций $f(z)$ класса H_p, но и вообще для любых функций, имеющих почти всюду угловые граничные значения. Это следует из того, что для таких функций, как это было доказано Н. Н. Лузиным и И. И. Приваловым, возможно построить область $G \subset |z|<1$, ограниченную спрямляемой кривой γ, имеющей с окружностью $|z|=1$ общее множество точек E, меры сколь угодно близкой к 2π, причем $f(z)$ будет непрерывна в $\bar{G}$. Точно так же теорема Линделёфа легко распространяется не только на функции $f(z)$ класса H_p, но и на функции более широкого класса D, введенного В. И. Смирновым, так как если $f(z) \in D$, то

$$\ln^+ |f(re^{i\theta})| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-\varphi)} \ln^+ |f(e^{i\varphi})|\, d\varphi$$

(см. цитированную выше монографию И. И. Привалова). Откуда из выполнения условий (1) следует ограниченность $f(z)$ вблизи $e^{i\theta}$ и дело сводится к известной форме теоремы Линделёфа.

Г. Ц. Тумаркин

4741. О функции Литтлвуда-Пели $g^*(\theta)$. Зигмунд (On the Littlewood-Paley function $g^*(\theta)$. Zygmund A.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1956, 42, № 4, 208—212 (англ.)

Пусть

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \tag{1}$$

— аналитическая функция в круге $|z|<1$ и (согласно Литтлвуда-Пели)

$$g^*(\theta) = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^1 (1-\rho) \int_0^{2\pi} |f'(\rho e^{i(\theta+t)})|^2 \times \right.$$

$$\left. \times \frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos t+\rho^2}\, dt\, d\rho \right\}^{1/2} \tag{2}$$

Функция (2) играет важную роль в теории тригонометрических рядов. При $p>1$ для $f(z) \in H^p$

$$\|g^*\|_p \leqslant A_p \|f(e^{i\theta})\|_p \tag{3}$$

$$\left(\|g^*\|_p = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g^*(\theta)|^p\, d\theta \right\}^{1/p} \right),$$

A_p зависит только от p. Неравенство (3) для четных p было доказано Литтлвудом и Пели, а для любого $p>1$ — Зигмундом.

В реферируемой статье автор снова дает доказательство неравенства (3), а также показывает, что

$$\|g^*\|_p \leqslant A_p \|f(e^{i\theta})\|_1 \quad (0<p<1), \tag{4}$$

$$\|g^*\|_1 \leqslant A \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})| \ln^+ |f(e^{i\theta})|\, d\theta + B, \tag{5}$$

где A и B — постоянные. Если положить

$$g_\alpha^*(\theta) = \left\{ \int_0^1 (1-\rho)^{2\alpha} \int_{-\pi}^{\pi} |1-\rho e^{it}|^{-2\alpha} \times \right.$$

$$\left. \times |f'(\rho e^{i(\theta+t)})|^2\, dt\, d\rho \right\}^{1/2},$$

то показывается, что

$$\|g_{1/p}^*\|_{\eta p} \leqslant A_\eta \|f(e^{i\theta})\|_p^p \quad (0<\eta<1,\ 0<p\leqslant 1), \tag{6}$$

$$\|g_{1/p}^*\|_p^p \leqslant A_p \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^p \ln^+ |f(e^{i\theta})|\, d\theta. \tag{7}$$

В конце статьи рассматривается суммируемость рядов.

Примечание референта. Неравенства (4) — (7) доказал также Сунуоти (реф. 4742).

В статье имеются опечатки. П. Л. Ульянов

4742. Теоремы о степенных рядах класса H^p. Сунуоти (Theorems on power series of the class H^p. Sunouchi Gen-ichirô), Tôhoku Math. J., 1956, 8, № 1, 125—146 (англ.)

Излагаются известные основные результаты относительно функции $g_\alpha^*(\theta)$ (обозначения взяты из реф. 4741), показывается ее связь с суммируемостью рядов. Кроме этого, доказывается ряд новых теорем относительно свойств функции $g_\alpha^*(\theta)$.

Сформулируем некоторые результаты.

Теорема 1. Если $0<p\leqslant 2$, то $\|g_\alpha^*\|_p \leqslant A_{p,\alpha} \|f(e^{i\theta})\|_p$ при $\alpha > \frac{1}{p}$, где $A_{p,\alpha}$ — конечная величина.

Теорема 2. Если $\infty > p > 2$, то $\|g_\alpha^*\|_p \leqslant A_{p,\alpha}\|f(e^{i\theta})\|_p$ при $\alpha > \frac{1}{2}$.

Из этих теорем автор получает, например, что

$$\int_0^{2\pi}\left\{\sup_{0<n<\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left|\sigma_k^{\alpha-1}(\theta)-f(e^{i\theta})\right|^2\right\}^{p/2}d\theta \leqslant$$

$$\leqslant A_{p,\alpha}\int_0^{2\pi}|f(e^{i\theta})|^p\,d\theta$$

при $0<p\leqslant 2$ и $\alpha > 1/p$, а если $p>2$, то при $\alpha > 1/2$, где $\sigma_k^{\alpha-1}(\theta)$ — чезаровские средние порядка $(\alpha-1)$ от ряда (1) при $z=e^{i\theta}$.

Теорема 3. Если $f(z)\in H^p$ $(0<p\leqslant 1)$, то

$$\int_0^{2\pi}\left\{\sup_{0<n<\infty}\frac{|\sigma_n^\alpha(\theta)|}{(\ln(n+2))^{1/p}}\right\}^p d\theta \leqslant A_p\int_0^{2\pi}|f(e^{i\theta})|^p\,d\theta$$

при $\alpha=\frac{1}{p}-1$.

В статье имеются опечатки. П. Л. Ульянов

4743. О некоторых теоремах Литтлвуда и Пели. Флетт (On some theorems of Littlewood and Paley. Flett T. M.), J. London. Math. Soc., 1956, **31**, № 3, 336—344 (англ.)

Пусть

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$$

— аналитическая функция в круге $|z|<1$. Положим

$$g(\theta)=\left\{\int_0^1(1-\rho)\,|f'(\rho e^{i\theta})|^2\,d\rho\right\}^{1/2}$$

и $g^*(\theta)$ как в реф. 4741. Основное содержание статьи состоит в доказательстве известных неравенств Литтлвуда—Пели и Зигмунда способом, отличным от уже известных. Доказывается, например, что

$$\|g\|_p \leqslant A_p\|f(e^{i\theta})\|_p \quad (\text{при } p>0),$$

$$\|g^*\|_p \leqslant A_p\|f(e^{i\theta})\|_p \quad (\text{при } p>1),$$

где A_p — конечная величина, зависящая лишь от p.

П. Л. Ульянов

4744. Теорема Лузина о площадях конформного отображения. Пиранян, Рудин (Lusin's theorem on areas of conformal maps. Piranian G., Rudin W.), Michigan Math. J., 1955—1956, **3**, № 2, 191—199 (англ.)

Н. Н. Лузин доказал, что для любой аналитической в круге $|z|<1$ функции $f(z)$ класса H_2 почти для каждой точки $\zeta=e^{i\theta}$ найдется замкнутая кривая γ, касающаяся в точке $e^{i\theta}$ окружности $|z|=1$, такая, что площадь римановой поверхности, на которую функция $w=f(z)$ отображает область, ограниченную γ, будет конечна (Лузин Н. Н., Собр. соч. Т. I, М., 1953, 319—330; РЖМат, 1954, 3989).

Авторы реферируемой работы, несколько дополняя рассуждения, примененные Лузиным, устанавливают, что если $f\notin H_2$, то существует область $D\subset|z|<1$, граница которой касается $|z|=1$ в точке $z=1$ такая, что $\int_0^{2\pi}A(f,D,\theta)<\infty$, где $A(f,D,\theta)=\iint_{D_\theta}|f'|^2\,d\sigma$, а D_θ — область, полученная из D вращением около 0 на угол θ. В работе строятся примеры, показывающие, что теорема Лузина не будет иметь места даже в ослабленной форме, считая D треугольной областью, если условие $f\in H_2$ заменить условием достаточно медленного роста при $r\to 1$ функции $\max_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi}|f(re^{i\theta})|$. Другой приведенный авторами пример говорит о том, что область D в указанной ими формулировке теоремы Лузина нельзя считать одной и той же для всех функций $f\in H_2$. Более того, доказано, что если D — какая-либо область, граница которой касается $|z|=1$ в точке $z=1$, то существует функция $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n$, $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|<\infty$ такая, что $A(f,D,\theta)=\infty$ для всех θ. Далее, используя теорему А. И. Плеснера о предельных значениях мероморфных функций (Привалов И. И., Граничные свойства аналитических функций, изд. 2, М.—Л., 1950, гл. IV), авторы доказывают теорему 5: Пусть $f(z)$ мероморфна в $|z|<1$, тогда на $|z|=1$ существует множество E, $mE=2\pi$, такое, что для любой его точки $e^{i\theta}$ выполняется одно из следующих утверждений: 1) если A — угол с вершиной в $e^{i\theta}$, то множество предельных значений функции $w=f(z)$ при $z\to e^{i\theta}$, $z\in A$, заполняет всю плоскость; 2) существует выпуклая область $D(\theta)$ с границей, касающейся $|z|=1$ в $e^{i\theta}$, образ которой при отображении $w=f(z)$ будет римановой поверхностью конечной площади.

В конце статьи приводятся некоторые замечания о множестве исключительных точек для теоремы Лузина, т. е. тех точек $e^{i\theta}$, для которых $A(f,D,\theta)=\infty$ для любой выпуклой области D круга $|z|<1$, граница которой касается $|z|=1$ в $z=e^{i\theta}$. В частности, устанавливается, что в случае, когда ряд Тейлора для функции $f(z)$ сходится абсолютно на $|z|=1$, исключительное множество является пустым, и в этом случае существует такая выпуклая область D, касающаяся $|z|=1$, что соответствующая ей функция $A(f,D,\theta)$ будет непрерывной функцией от θ.

Примечание референта. Авторы не упоминают о работе Зигмунда и Марцинкевича (Duke Math. J., 1938, **4**, 473—485). Между тем, некоторые результаты авторов содержатся в этой работе (например, замечание о том, что рассуждения Лузина дают возможность установить оценку

$$c_1\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2\leqslant\int_0^{2\pi}A(f,D,\theta)\,d\theta<c_2\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2$$

для любой треугольной области D) либо могут быть легко выведены из данного Зигмундом и Марцинкевичем обобщения теоремы Лузина для функций, имеющих угловые граничные значения (например, теорема 5). В качестве нерешенной проблемы авторы ставят вопрос о том, может ли существовать аналитическая в круге функция $f(z)$, для которой имелось бы множество E_1, $mE_1>0$, такое, что для точек $e^{i\theta}\notin E$ одновременно выполнялись бы утверждения 1 и 2 теоремы 5. С помощью результата Спенсера (Spencer, Amer, J. Math., 1943, 65, 147—160), установившего, что если функция $f(z)$ обладает на множестве

точек E, $mE>0$, окружности $|z|=1$ свойством Лузина, то она имеет почти всюду на E угловые граничные значения, можно на поставленный автором вопрос немедленно дать отрицательный ответ.

Г. Ц. Тумаркин

4745. **Об интегралах типа Коши-Стилтьеса.** Тумаркин Г. Ц., Успехи матем. наук, 1956, **11**, № 4, 163—166

Доказаны следующие две теоремы:

1. Пусть $f_1(z)$ и $f_2(z)$ — аналитические функции соответственно в $|z|<1$ и в $|z|>1$, причем $f_2(\infty)=0$. Для того чтобы эти функции были представимы одним интегралом типа Коши-Стилтьеса

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}\,d\sigma(\theta)}{e^{i\theta}-z}, \qquad (1)$$

необходимо и достаточно, чтобы существовало такое $C>0$, что для всех r $(0<r<1)$

$$\int_0^{2\pi}\left|f_1(re^{i\theta})-f_2\left(\frac{1}{r}e^{i\theta}\right)\right|d\theta<C.$$

2. Для того, чтобы функцию $f(z)$, аналитическую в $|z|<1$, можно было представить интегралом типа Коши—Стилтьеса (I), необходимо и достаточно, чтобы существовала такая последовательность $\{\Pi_n(\theta)\}$ линейных комбинаций функций системы $\{e^{-ik\theta}\}$ $(k=1, 2, \ldots)$, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_0^{2\pi}|f(r_ne^{i\theta})-\Pi_n(\theta)|\,d\theta<\infty,$$

где $\lim\limits_{n\to\infty} r_n=1$.

Н. А. Давыдов

4746. **Радиальные граничные значения одного класса аналитических функций в верхней полуплоскости.** **Штейнер** (Die radialen Randwerte einer Klasse analytischer Funktionen in der oberen Halbebene. Steiner Antonio), Rend. Circolo mat. Palermo, 1955, 4, № 3, 323—336 (нем.)

Рассматривается класс K функций $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ $(z=x+iy)$, голоморфных в полуплоскости $y\geqslant 0$ и таких, что нормальные граничные значения $u(x)$ и $v(x)$ существуют почти для всех x и интегрируемы с квадратом на $(-\infty, \infty)$, причем $u(x, y)$ и $v(x, y)$ представимы в полуплоскости $y\geqslant 0$ интегралом Пуассона по своим граничным значениям. Этот класс совпадает с классом функций, для которых равномерно ограничены интегралы $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x+iy)|^2dx$, $y>0$ (Титчмарш, Введение в теорию интегралов Фурье, М.—Л., ОГИЗ, 1948). Выводится интегральное представление для K-функций:

$$f(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-yx}\{[\gamma_1(\alpha)-i\gamma_2(\alpha)]\cos\alpha x+$$
$$+[\gamma_2(\alpha)+i\gamma_1(\alpha)]\sin\alpha x\}\,d\alpha,$$

где $\gamma_1(\alpha)$ и $\gamma_2(\alpha)$ — соответственно Планшереля косинус и синус преобразования $u(t)$:

$$\gamma_1(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{d\alpha}\int_{-\infty}^{\infty}u(t)\frac{\sin\alpha t}{t}\,dt,$$

$$\gamma_2(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{d\alpha}\int_{-\infty}^{\infty}u(t)\frac{1-\cos\alpha t}{t}\,dt,$$

которые существуют почти всюду на $(0, \infty)$ и интегрируемы с квадратом на этом же интервале.

Рассматривая в гильбертовом пространстве, состоящем из всех интегрируемых с квадратом комплексных функций $f(x)$, $(-\infty<x<\infty)$, взаимно обратные операторы Фурье

$$F=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty}d\alpha\,\frac{e^{i\alpha x}-1}{i\alpha},$$

$$F^{-1}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty}d\alpha\,\frac{1-e^{i\alpha x}}{i\alpha},$$

вместе с проекционными операторами

$$Pf=\begin{cases}0 & \text{на } (-\infty, 0)\\ f & \text{на } (0, +\infty)\end{cases}, \qquad Qf=\begin{cases}f & \text{на } (-\infty, 0)\\ 0 & \text{на } (0, +\infty)\end{cases},$$

автор решает некоторые простые граничные задачи для K-функций Shen Yu-cheng.

4747. **О теореме Монтеля.** **Каваками** (On Montel's theorem. Kawakami Yoshiro), Nagoya Math. J., 1956, **10**, June, 125—127 (англ.)

Доказывается теорема: Пусть $f(z)=f(x+iy)$ регулярна и ограничена в полуплоскости $x>0$, непрерывна на измеримом множестве E, расположенном на положительной части оси OY, для которого точка 0 является точкой положительной нижней плотности $\left(\varliminf\limits_{r\to 0}\frac{mE(0, r)}{r}>0, \text{ где } E(0, r)=E\cap[0, ir]\right)$. Тогда если существует $\lim f(z)=A$, когда $z\to 0$ вдоль E, то $\lim f(z)=A$ равномерно при $z\to 0$ в области $|y|\leqslant kx$, где k — любое положительное число.

Эта теорема обобщает теорему Монтеля, рассмотревшего случай, когда E совпадает с целым интервалом (Монтель, Нормальные семейства аналитических функций, М.—Л., ОНТИ, 1936, стр. 156).

Примечание референта. Подобные обобщения теоремы Монтеля делались и ранее в работе М. Картрайт (Cartwright M., Proc. Cambridge Philos. Soc., 1935, **31**, 26—30). Аналогичный результат был получен референтом как следствие из одного простого критерия сходимости последовательности аналитических функций (РЖМат, 1956, 7989). При этом не делалось никаких предположений о непрерывности $f(z)$ на множестве E.

Г. Ц. Тумаркин

4748. **Двойственные экстремальные проблемы в теории функций.** **Бонсалл** (Dual extremum problems in the theory of functions. Bonsall F. F.), J. London Math. Soc., 1956, **31**, № 1, 105—110 (англ.)

Ряд авторов в последнее время применяли к исследованию экстремальных задач теории аналитических функций следующие утверждения. Пусть G — подпространство пространства V типа B и пусть $G^\perp$ — аннулятор G в дуальном пространстве V^*, т. е. $G^\perp$ — множество всех линейных в V функционалов, обращающихся в нуль на G. Если $\Phi_0\in V^*$, то $\sup\limits_{x\in G,\ \|x\|\leqslant 1}|\Phi_0(x)|=\min\limits_{\psi\in G^\perp}\|\Phi_0+\psi\|$. Автор доказывает двойственное утверждение:

$$\max_{\Phi\in G^\perp,\ \|\Phi\|\leqslant 1}|\Phi(x_0)|=\inf_{y\in G}\|x_0+y\|.$$

Заметим, что более специальные формы приведенных соотношений применялись в теории аппроксимации С. М. Никольским еще в 1946 г. (Изв. АН СССР, сер. матем., 1946, **10**, № 3).

Доказана также следующая теорема 3: Пусть V, W — нормированные пространства и $W \subset V^*$. Пусть G — подпространство V такое, что $\Gamma = G^\perp \subset W$. Тогда: 1) Если $\Phi_0 \in W$, то $\max_{\Phi \in \Gamma^\perp,\ \|\Phi\| \leqslant 1} |\Phi(\varphi_0)| = \min_{\varphi \in \Gamma} \|\varphi_0 + \psi\|$; 2) Если $\Phi_0 \in \tilde{V}$, тогда $\max_{\varphi \in \Gamma,\ \|\varphi\| \leqslant 1} \Phi_0(\varphi) = \min_{\Psi \in \Gamma^\perp} \|\Phi_0 + \Psi\|$ (здесь $\tilde{V}$ — то подпространство из W^*, которое изоморфно V). Значение этой теоремы состоит в гарантии достижения экстремальных значений в обеих частях равенств.

Даются применения (теорема 4) к экстремальным задачам теории аналитических в единичном круге функций. Содержание теоремы 4 полностью имеется в работе референта 1951 г. (Уч. зап. МГУ, 1951, 148, 133—143).

Автор не упоминает о работе референта, где двойственность экстремальных задач о теории аналитических функций была установлена раньше, чем в упоминаемой им работе Рогозинского и Шапиро.

В заключение обсуждается следующая проблема: каково должно быть подпространство $\Gamma \subset V^*$, чтобы для любого $x_0 \in V$ было бы:

$$\sup_{\Phi \in \Gamma,\ \|\Phi\| \leqslant 1} |\Phi(x_0)| = \inf_{y \in \Gamma_\perp} \|x_0 + y\|$$

($\Gamma_\perp$ — аннулятор Γ в V). Исчерпывающего решения проблемы не получено. С. Я. Хавинсон

4749. О максимальном члене и центральном индексе целой функции. Сингх (On the maximum term and the rank of an entire function. Singh S. K.), Acta math., 1955, 94, 1—11 (англ.)

Через $\mu(r)$ и $\nu(r)$ обозначены максимальный член и центральный индекс целой функции $f(z)$, а через $\mu^k(r)$ и $\nu^k(r)$ — максимальный член и центральный индекс ее k-й производной $f^{(k)}(z)$.

Теорема 1. Если целая функция $f(z)$ имеет порядок $\rho < 1$, то

$$\lim_{r \to \infty} \frac{r^p \mu^k(r)}{\mu(r)} = 0$$

при $k = 1, 2, \ldots$ и $p < k(1-\rho)$. При $p = k(1-\rho)$ теорема неверна, как показывает пример функции $f(z) = \cos\sqrt{z}$.

Из доказательства теоремы вытекает ряд следствий. Например, для целой функции $f(z)$ порядка $\rho\ (0 \leqslant \rho \leqslant \infty)$ справедливы соотношения:

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\ln [r\mu'(r)/\mu(r)]}{\ln r} = \rho,$$

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\ln [rM'(r)/M(r)]}{\ln r} = \rho,$$

где $M(r)$ и $M'(r)$ — модуль-максимумы $f(z)$ и $f'(z)$.

Теорема 2. Если $f(z)$ — целая функция нижнего порядка $(\lambda > 1)$, то

$$\lim_{r \to \infty} \frac{\mu^k(r)}{r^p \mu(r)} = \infty$$

при $k = 1, 2, \ldots$ и $p < k(\lambda - 1)$.

Из доказательства теоремы в качестве следствия вытекает равенство

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\ln [r\mu'(r)/\mu(r)]}{\ln r} = \lambda,$$

справедливое для любой целой функции $f(z)$ нижнего порядка $\lambda\ (0 \leqslant \lambda \leqslant \infty)$.

Пусть $\overline{\lim} r^{-\rho} \ln \mu(r) = \alpha$, $\underline{\lim} r^{-\rho} \ln \mu(r) = \beta$, $\overline{\lim} r^{-\rho} \nu(r) = \gamma$, $\underline{\lim} r^{-\rho} \nu(r) = \delta$ при $r \to \infty$. Было известно (Shah S. M., Quart. J. Math., 1948, 19, 220—223), что $\gamma \leqslant e\rho\alpha$, $\delta \leqslant \rho\alpha$.

Теорема 3. Имеет место неравенство $\gamma + \delta \leqslant e\rho\alpha$, причем одновременно не могут выполняться равенства $\delta = \rho\alpha$ и $\gamma + \delta = e\rho\alpha$.

Теорема 4. Существует целая функция порядка $\rho\ (0 < \rho \leqslant \infty)$, для которой

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\ln \mu(r)}{\nu(r) \ln r} = 1,$$

и существует целая функция нулевого порядка, для которой

$$\lim_{r \to \infty} \frac{\ln \mu(r)}{\nu(r) \ln r} = 1.$$

Теорема 5. Справедливы соотношения:

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\ln \mu(r)}{\nu(r)} \geqslant \frac{1}{\lambda} \qquad (0 \leqslant \lambda \leqslant \infty),$$

$$\underline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\ln \mu(r)}{\nu(r)} \leqslant \frac{1}{\rho} \qquad (0 \leqslant \rho \leqslant \infty).$$

В. С. Виденский

4750. О некоторых вопросах глобального характера, связанных с теоремой Пикара. Дженкинс (Sur quelques aspects globaux du théorème de Picard. Jenkins James A.), Ann. scient. École norm. supér., 1955, 72, № 2, 151—161 (франц.)

Автор исследует поведение мероморфной функции «в целом» в связи с числом ее исключительных значений в окрестностях существенно особых точек. Для существенно особых точек теорема Пикара гарантирует не более двух исключительных значений (включая ∞). В работе Дюге (Dugué, Ann. scient École norm. supér., 1952, 69, 65—81) утверждалось, что функция $f(z)$, имеющая n существенно особых точек, может иметь не более $n+1$ различных исключительных значений. Однако в рассуждениях Дюге, как отмечает автор, содержалась ошибка, в результате которой цитированный результат оказался неверным. В противовес утверждению Дюге автор доказывает следующую теорему:

Теорема 3. Существует функция, однозначная на комплексной сфере, имеющая n существенных особенностей, в каждой из которых число исключительных значений $\nu_j = 0, 1, 2\ (j = 1, \ldots, n)$, а также величины исключительных значений могут быть взяты совершенно произвольно.

Приведем еще один результат автора в том же направлении:

Теорема 5. Существует функция, однозначная на комплексной сфере, имеющая счетное множество существенных особенностей с единственной точкой сгущения, такая, что в каждой существенно особой точке она имеет два исключительных значения, причем для разных точек эти значения различны.

С. Я. Хавинсон

4751. Замечание к предыдущей статье. Дюге (Note sur l'article précédent. Dugué Daniel), Ann. scient. Ecole norm. supér., 1955, 72, № 2, 163 (франц.)

В связи с появлением работы Дженкинса (реф. 4750), показавшего ошибочность одного результата автора, делается ряд замечаний, анализирующих допущенную автором ошибку. С. Я. Хавинсон

4752. Направление Бореля мероморфной в единичном круге функции. Цудзи (Borel's direction of a meromorphic function in a unit circle. Tsuji Masat-

s u g u), J. Math. Soc. Japan, 1955, 7, № 3, 290—311 (англ.)

Доказывается следующая теорема: Пусть $f(z)$ — мероморфная функция порядка $\rho > 0$ в круге $|z| < 1$. Тогда существует точка z_0 на окружности $|z| = 1$ и ния J, направленная из z_0 внутрь $|z| < 1$ (возможно сание $|z| = 1$ в точке z_0), такие, что для сколь одно малого угла ω, содержащего J и ограничен- ого двумя линиями, выходящими из z_0, и всех ероморфных в круге $|z| < 1$ функций $g(z)$ порядка ρ, исключая не более двух, ряд $\Sigma_\nu (1 - |z_\nu(f = g, \omega)|)^{\rho+1-\varepsilon}$, где $\varepsilon > 0$ — произвольно малое число $z_\nu(f = g, \omega)$ — нули $f(z) - g(z)$ в ω (кратные нули итаются один раз), расходится. Если $f(z)$ из класса исходимости (Неванлинна Р., Однозначные аналитические функции, 1941, гл. VIII, § 1) и функция $g(z)$ кова, что $\int_0^1 T(r, g)(1-r)^{\rho-1} dr < \infty$, то $\Sigma_\nu (1 - |z_\nu(f = g, \omega)|)^{\rho+1} = \infty$: исключение может быть не более м для двух функций g. Эта теорема является аналогом теорем Бернацкого и Рауха (Biernacki M., cta math., 1930, 56, 197—204; Rauch A., J. math., série, 1934, 12), обобщающих для функций, мероморфных в плоскости $|z| < \infty$, одну из теорем Валиона. Аналогичные теоремы автор получает в тех лучаях, когда $\overline{\lim_{r\to 1}} T(r, f)/\ln \frac{1}{1-r} = \infty$ и $\lim_{r\to 1} T(r, f) = \infty$ направлениях Бореля см. Valiron G., Direction de orel des fonctions méromorphes, Paris, 1938).

Л. И. Волковыский

4753. Обобщение формулы Стирлинга. Хейман (A generalisation of Stirling's formula. H a y m a n W. K.), J. reine und angew. Math., 1956, 196, № 1—2, 67—95 (англ.)

Регулярную в круге $|z| < R$ $(R \leqslant \infty)$, положительную при $R_0 < z < R$ функцию $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ автор азывает допустимой, если для некоторой функции $\delta(r)$, определенной при $R_0 < r < R$ $(0 < \delta(r) < \pi)$, ыполняются соотношения: при $|\theta| \leqslant \delta(r)$ равномерно по θ

$$f(re^{i\theta}) \sim f(r)\, e^{i\theta a(r) - \frac{1}{2}\theta^2 b(r)} \quad (r \to R),$$

де $a(r) = r\frac{f'(r)}{f(r)}$, $b(r) = ra'(r)$; при $\delta(r) \leqslant |\theta| \leqslant \pi$ авномерно по θ

$$f(re^{i\theta}) = \frac{o(f(r))}{\sqrt{b(r)}} \quad (r \to R).$$

Доказывается, что вместе с функциями $f(z)$, $f_1(z)$ ри $|z| < R$ допустимы функции $e^{f(z)}$, $f(z) f_1(z)$. Найены условия, при которых допустимы функции $(z) + P(z)$, $f(z) + g(z)$, $P(f(z))$, $e^{P(z)}$, где $f(x)$ допустима при $|z| < R$, $P(z)$ — полином, а $g(z)$ регулярна ри $|z| < R$. Целая функция рода 0, положительная ри больших положительных z, допустима в плокости, если она имеет не более конечного числа улей в некотором угле $|\arg z| \leqslant \frac{\pi}{2} + \delta$ $(\delta > 0)$ и $(r) \to +\infty$ $(r \to \infty)$. Подробно изучены свойства роста опустимых функций, в частности, доказано, что $\sup_{|z|=r} |f(z)| = f(r)$ $(R_0 < r < R)$ и что

$$f^{(k)}(r) \sim f(r) \left(\frac{a(r)}{r}\right)^k \quad (r \to R).$$

Для допустимой $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ $(|z| < R)$ установлена формула

$$a_n \sim \frac{f(r_n)}{r_n^n \sqrt{2\pi b(r_n)}},$$

где r_n — корень уравнения $a(r) - n = 0$. При $f(r) = e^r$ эта формула переходит в формулу Стирлинга.

А. А. Нудельман

4754. Новое доказательство формулы для действительного арифметическо-геометрического среднего. Шт ёр (Neuer Beweis einer Formel über reelle arithmetisch-geometrische Mittel. S t ö h r A l f r e d), Jahresber. Dtsch. Math. Ver., 1956, 58, № 3, 73—79 (нем.)

Автор дает новый вариант доказательства формулы

$$\lim_{n\to\infty} 2^{-n} \ln \frac{4a_n}{c_n} = \frac{\pi}{2} \frac{M(a_0, b_0)}{M(a_0, c_0)},$$

где $a_0 > b_0 > 0$ — действительные числа и

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n), \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \quad c_n = \sqrt{a_n^2 - b_n^2},$$

$M(a_0, b_0)$ — общий предел a_n и b_n (т. е. арифметическо-геометрическое среднее a_0 и b_0). Для доказательства используются методы теории конформного отображения (в отличие от других доказательств, где используются дифференциальные уравнения или разложение в ряд)

$$\frac{4|\ln k|}{2\pi i} = \pm \int_{c_1} \frac{dz}{\sqrt{z(z-c_0)(c_0 z - a_0^2)}} :$$

$$: \int_{c_2} \frac{dz}{\sqrt{z(z-c_0)(c_0 z - a_0^2)}} = \frac{M(a_0, b_0)}{iM(a_0, c_0)},$$

и $|\ln k| = 2^{-n} \ln \frac{4a_n}{c_n} + 2^{-n} O\left(\frac{c_n}{a_n}\right)$, где k — риманов модуль круга $|z| < a_0$, разрезанного вдоль отрезка $0 \leqslant z \leqslant c_0$.

Tsung-Pan B. Yang

4755. Элементарное доказательство соотношения $\theta_3^4 = \theta_0^4 + \theta_2^4$ между различными функциями Якоби. Ван-дер-Поль (Démonstration élémentaire de la relation $\theta_3^4 = \theta_0^4 + \theta_2^4$ entre les différentes fonctions de Jacobi. V a n d e r P o l B a l t h), Enseing. math., 1956, 1, № 4, 258—261 (франц.)

Приводится элементарное доказательство известного соотношения $\theta_3^4 = \theta_0^4 + \theta_2^4$, где

$$\theta_3 = \theta_3(0, \tau) = \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{n^2}, \quad \theta_0 = \theta_0(0, \tau) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{n^2},$$

$$\theta_2 = \theta_2(0, \tau) = \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}, \quad q = e^{i\pi\tau}, \quad \operatorname{Im}\tau > 0.$$

Отмечается, что примененный в этой работе метод позволяет получить ряд других подобных соотношений.

Н. И. Фельдман

4756. Вариационные свойства модулярных форм, регулярных в вершинах фундаментальной области. Коэн (Variational property of cusp forms. C o h n H a r v e y), Trans. Amer. Math. Soc., 1956, 82, № 1, 117—127 (англ.)

Пусть G — конгруэнцподгруппа модулярной группы. Обозначим через k число неэквивалентных рациональ-

ных точек $r_1, r_2, \ldots, r_k$. Рассмотрим k рядов Эйзенштейна

$$E(z; r_t) = \sum_{p/q \sim r_t} (qz-p)^{-4}, \quad t = 1, 2, \ldots, k.$$

Легко показать, что $\varphi(z) = E(z; r_t)$ удовлетворяет следующим условиям, означающим, что $\varphi(z)$ — модулярная форма размерности —4:
1) $(cz+d)^{-4}\varphi(Tz) = \varphi(z)$, $Tz = (az+b)(cz+d)^{-1}$;
2) $\varphi(z) = O((qz-p)^{-4})$ при $z \to p/q$ (включая 1/0);
3) $\varphi(z)$ регулярна в верхней полуплоскости.

Если $\varphi(z)$ удовлетворяет вместо 2) более сильному ограничению 2') $\varphi(z) = o((qz-p)^{-4})$ при $z \to p/q$ (включая 1/0), то мы говорим, что $\varphi(z)$ регулярна в вершинах фундаментальной области. В работе доказана следующая теорема: Пусть $\varphi(z)$ — модулярная форма размерности —4, принадлежащая к группе G. $\varphi(z)$ можно выразить в виде линейной комбинации рядов Эйзенштейна с вещественными коэффициентами тогда и только тогда, когда существует такая функция $P(z)$, что

$$P'''(z) = \varphi(z) \quad \text{и} \quad q_T(z) = (cz+d)^2 P(Tz) - P(z)$$

— квадратичный многочлен с вещественными коэффициентами. И. И. Пятецкий-Шапиро

4757. Современные исследования по теории римановых поверхностей. Волковыский Л. И., Успехи матем. наук, 1956, 11, № 5, 77—84

Дается изложение обзорного доклада по некоторым вопросам современной теории римановых поверхностей, сделанного автором на конференции по теории функций комплексного переменного в МГУ. Автор касается следующих вопросов: 1) понятие и идея римановой поверхности; 2) функции и дифференциалы на римановых поверхностях; 3) классификация римановых поверхностей; 4) топологические и вариационные методы на римановых поверхностях. Сформулированы некоторые не решенные пока полностью проблемы. Библ. 39 назв. Г. Ц. Тумаркин

4758. Лорановское разделение и двусторонние бесконечные фаберовские системы. Тиц (Laurent-Trennung und zweifach unendliche Faber-Systeme. Tietz H.), Math. Ann., 1955, 129, № 5, 431—450 (нем.)

Пусть C — аналитическая жорданова кривая на замкнутой римановой поверхности $\mathfrak{A}$ рода p, разбивающая ее на области G (условно внутренняя) и $\overline{G}$ (внешняя, вообще говоря неодносвязная). Каждой функции φ и каждому дифференциалу $d\sigma$, однозначным и регулярным в окрестности C, ставятся в соответствие регулярные в $G+C$, соответственно в $\overline{G}+C$ величины (лораново разделение φ и $d\sigma$):

$$\varphi^i(\mathfrak{z}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{v}(C^a)} \varphi \mathfrak{v} dF(\mathfrak{v}, \mathfrak{z}) \quad \mathfrak{z} \in G+C,$$

$$\varphi^a(\mathfrak{z}) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{v}(C^i)} \varphi(\mathfrak{v}) dF(\mathfrak{v}, \mathfrak{z}) \quad \mathfrak{z} \in \overline{G}+C,$$

$$d\sigma^i(\mathfrak{v}) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{z}(C^a)} d\sigma(\mathfrak{z}) dF(\mathfrak{v}, \mathfrak{z}) \quad \mathfrak{v} \in G+C,$$

$$d\sigma^a(\mathfrak{v}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{z}(C^i)} d\sigma(\mathfrak{z}) dF(\mathfrak{v}, \mathfrak{z}) \quad \mathfrak{v} \in \overline{G}+C,$$

где C^i, C^a — простые контуры в G соответственно в $\overline{G}$ вблизи C и $dF(\mathfrak{v}, \mathfrak{z})$ — элементарный дифференциал 3-го рода с полюсами в $\mathfrak{z}$ (с вычетом +1) и в нейерштрассовой точке $\mathfrak{g} \in \overline{G}$ (с вычетом —1), однозначно определяемый нормировкой

$$dF(\mathfrak{v}, \mathfrak{z}) = \left(-\frac{1}{y} + y^p P(y)\right) dy$$

для $\mathfrak{v}$ вблизи $\mathfrak{g}$ (y — локальный параметр для $\mathfrak{g}$) (Tietz H., J. reine und angew. Math., 1952, 190, 22—33). Из одного результата Тица (РЖМат, 1956, 2944) следует существование функции $\eta = \psi(\mathfrak{v})$, $\psi(\mathfrak{d}) = 0$, отображающей $\overline{G}$ на единичный круг с приклеенными к нему полными плоскостями. Тогда имеют место лорановские разложения (суммирование здесь и дальше от $-\infty$ до $+\infty$):

$$dF(\mathfrak{v}, \mathfrak{z}) = \frac{d\eta}{\eta}\sum \mathfrak{C}_n(\mathfrak{z})\eta^n \quad \mathfrak{v} \text{ вблизи } C, \ \mathfrak{z} \in G,$$

$$dF(\mathfrak{v}, \mathfrak{z}) = \frac{d\eta}{\eta}\sum \mathfrak{e}_n(\mathfrak{z})\eta^n \quad \mathfrak{v} \text{ вблизи } C, \ \mathfrak{z} \in \overline{G},$$

$$dF(\mathfrak{v}, \mathfrak{z}) = \frac{1}{\zeta}\sum d\mathfrak{F}_n(\mathfrak{v})\zeta^n \quad \mathfrak{z} \text{ вблизи } C, \ \mathfrak{v} \in G,$$

$$dF(\mathfrak{v}, \mathfrak{z}) = \frac{1}{\zeta}\sum d\mathfrak{f}_n(\mathfrak{v})\zeta^n \quad \mathfrak{z} \text{ вблизи } C, \ \mathfrak{v} \in \overline{G}.$$

С помощью этих разложений и интегральной формулы Коши (записываемой через $dF(\mathfrak{v}, \mathfrak{z})$ для функций и дифференциалов f_G, dg_G, $f_{\overline{G}}$, $df_{\overline{G}}$ (индекс указывает область задания и регулярности) получаются двусторонние фаберовские разложения:

$$f_G = \sum a_n \mathfrak{E}_n, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C^i} f_G \psi^{n-1} d\psi,$$

$$dg_G = \sum b_n \mathfrak{F}_n, \quad b_n = -\frac{1}{2\pi i}\int_{C^i} \psi^{n-1} dg_G,$$

$$f_{\overline{G}} = \sum c_n \mathfrak{e}_n, \quad c_n = -\frac{1}{2\pi i}\int_{C^a} f_{\overline{G}} \psi^{n-1} d\psi,$$

$$dg_{\overline{G}} = \sum d_n d\mathfrak{f}_n, \quad d_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C^a} \psi^{n-1} dg_{\overline{G}}.$$

Строится теория этих разложений и относящихся к ней вопросов. Прежние исследования по фаберовским разложениям на римановых поверхностях относились к случаю односвязной области $\overline{G}$ (РЖМат, 1954, 1630; 1955, 185; 1956, 2944; Röhrl H., Arch. Math., 1952, 3, 93—102). Л. И. Волковыский

4759. Эффективность ряда Каннона для многих комплексных переменных в областях, ограниченных круговыми областями. Фальга (L'effectivité d'une suite de Cannon à plusieurs variables complexes sur un damaine ou une région cerclés bornés. Falgas Maurice), C. r. Acad. sci., 1955, 240, № 25, 2366—2368 (франц.)

Теория базисных множеств полиномов одного комплексного переменного, построенная Уиттакером (Whittaker) и его учениками, обобщается в настоящей статье на случай многих комплексных переменных. Множество полиномов $\{p_m(z_1, \ldots, z_k)\}$ называется базисным, если любой полином может быть представлен как конечная линейная комбинация полиномов данного множества.

Положим

$$z_1^{n_1} \ldots z_k^{n_k} = \sum_{m=0}^{\infty} \tau_{n_1 \ldots n_k, m} p_m(z_1, \ldots, z_k). \quad (1)$$

Обозначим через $N_{n_1 \dots n_k}$ число $\neq 0$ членов среди $\{\tau_{n_1 \dots n_k, m}\}$. Базисное множество называется базисным множеством Каннона, если $\lim (N_{n_1 \dots n_k})^{1/n_1 + \dots + n_k} = 1$.

Каждой аналитической в области $D \supset (0, \dots, 0)$ функции можно отнести базисный ряд $\sum_{m=0}^{\infty} A_m p_m(z_1, \dots, z_k)$, получающийся из ряда Маклорена с помощью равенства (1). Основной вопрос теории — изучение сходимости таких рядов. Говорят, что базисное множество эффективно в каком-то классе функций, если базисный ряд сходится к соответствующей функции для всех функций данного класса.

Если эта сходимость имеет место для всех аналитических в D функций, то говорят, что $\{p_m(z_1, \dots, z_k)\}$ эффективно в D. Для формулировки результатов введем следующие обозначения и понятия: $\alpha(\nu_1, \dots, \nu_k) = \sup_{(z_1, \dots, z_k) \in D} (\nu_1 \ln |z_1| + \dots + \nu_k \ln |z_k|)$, причем $\alpha(\nu_1, \dots, \nu_k)$ определена для таких ν_i, для которых $\nu_1 + \dots + \nu_k = 1$, $\nu_i \geqslant 0$, $i = 1, \dots, k$. $\alpha(\nu_1, \dots, \nu_k)$ назовем характеристической функцией области D; обозначим через $F_{\nu_1 \dots \nu_k}$ фильтр множества векторов $(n_1, \dots, n_k)$ с неотрицательными целыми координатами, порожденный базой $\{V_{\varepsilon, N}\}$, где $V_{\varepsilon, N}$ ($\varepsilon > 0$, $N > 0$) такое, что $(n_1, \dots, n_k) \in V_{\varepsilon, N}$, если

$$\left| \frac{n_i}{n_1 + \dots + n_k} - \nu_i \right| < \varepsilon, \quad n_1 + \dots + n_k > N, \quad i = 1, \dots, k.$$

Положим еще: $M_m(D) = \max |p_m(z_1, \dots, z_k)|$ в области D, $\omega_{n_1 \dots n_k}(D) = \sum_{m=0}^{\infty} |\tau_{n_1 \dots n_k, m}| M_m(D)$, $\lambda_{\nu_1 \dots \nu_k}(D) = \overline{\lim}_{F_{\nu_1 \dots \nu_k}} \frac{1}{n_1 + \dots + n_k} \ln \omega_{n_1 \dots n_k}(D)$.

Будем рассматривать лишь области D пространства k комплексных переменных, ограниченные круговыми областями.

Представление о характере пяти теорем, сформулированных в заметке, могут дать следующие результаты:

Теорема 2. Если $\{p_m(z_1, \dots, z_k)\}$ — базисное множество Каннона и если $\lambda_{\nu_1 \dots \nu_k}(D) > \alpha(\nu_1, \dots, \nu_k)$ для некоторой комбинации $\nu_1, \dots, \nu_k$, то существует аналитическая в D функция, не представимая базисным рядом.

Теорема 3. Необходимое и достаточное условие эффективности $\{p_m(z_1, \dots, z_k)\}$ в $\overline{D}$ таково: $\alpha(\nu_1, \dots, \nu_k) \equiv \lambda_{\nu_1 \dots \nu_k}(D)$.

С. Я. Хавинсон

4760. Комплексная выпуклость. Бремерман (Complex convexity. Bremermann H. J.), Trans. Amer. Math. Soc., 1956, 82, № 1, 17—51 (англ.)

В первой части работы (§§ 1—3) излагается теория областей голоморфности в пространстве C^n n комплексных переменных $(z_1, \dots, z_n) = \mathfrak{z}$. В частности, изучается характеристическое свойство областей голоморфности — свойство псевдовыпуклости (аналитической выпуклости). Фундаментальной теоремой первой части работы является следующая: Пусть H — область голоморфности, S и T — два множества точек таких, что $\overline{S \cup T} \subset H$, и всякая функция, голоморфная в H, достигает максимума своего модуля относительно $\overline{S \cup T}$ на $\overline{T}$. Пусть $\Delta_H(\mathfrak{z})$ — расстояние точки $\mathfrak{z}$ от границы H, измеренное в произвольной норме. Тогда функция $\Delta_H(\mathfrak{z})$ достигает минимума относительно $\overline{S \cup T}$ на $\overline{T}$.

Как следствия этой теоремы автор получает теорему непрерывности («Kontinuitätssatz») (РЖМат, 1955, 4999), некоторые результаты об аналитической выпуклости, теорему (7.1): В области голоморфности H функция $-\ln \Delta_H(\mathfrak{z})$ для любой нормы есть плюрисубгармоническая функция в H. Эта функция в области голоморфности (и только в области голоморфности) порождает метрику формы

$$ds^2 = \sum_{\mu, \nu=1}^{n} \frac{\partial^2 - \ln \Delta_H(\mathfrak{z})}{\partial z_\mu \partial \bar{z}_\nu} dz_\mu d\bar{z}_\nu .$$

Эта метрика сравнивается с метрикой Бергмана, инвариантной относительно голоморфных преобразований. Далее доказывается: если в области D функция $-\ln \Delta_D(\mathfrak{z})$ есть плюрисубгармоническая для некоторой нормы N, тогда имеет место некоторая «теорема непрерывности» (8.1) и, наоборот, если справедлива эта теорема непрерывности, то функция $-\ln \Delta_D(\mathfrak{z})$ для любой нормы N есть плюрисубгармоническая функция в D. Следовательно, свойство плюрисубгармоничности функции $-\ln \Delta_H(\mathfrak{z})$ в области D зависит только от области D, но не от нормы N.

Области, для которых функция $-\ln \Delta_D(\mathfrak{z})$ будет плюрисубгармонической, автор называет «псевдовыпуклыми». На основании теоремы (7.1) любая область голоморфности есть псевдовыпуклая область. (Как известно, предложение, обратное этому, долгое время являлось проблемой, положительно решенной Ока, Норге и Бремерманом). Здесь всюду область (region) понимается как открытое множество.

Во второй части (§§ 9—12) изучаются псевдовыпуклые области и плюрисубгармонические функции. Устанавливается формальная связь псевдовыпуклых областей и плюрисубгармонических функций с выпуклыми связными областями (domain) и выпуклыми функциями: понятия «псевдовыпуклой области» и «плюрисубгармонической функции» в векторном комплексном пространстве C^n есть формальное перенесение понятий «выпуклой связной области» и «выпуклой функции» из вещественного векторного пространства R^n n вещественных переменных $(x_1, \dots, x_n) = \mathfrak{x}$ ($z_n = x_n + iy_n$). Если выпуклые функции «порождаются» линейными функциями, то плюрисубгармонические функции «порождаются» аналитическими. Многие теоремы, справедливые для выпуклых функций, оказываются справедливыми для плюрисубгармонических функций. Так, псевдовыпуклая область D определяется посредством плюрисубгармонической функции $-\ln \delta_D(\mathfrak{x})$, где $\delta_D(\mathfrak{x})$ — евклидово расстояние. Соответственно этому доказывается, что связная область $B \subset R^n$ будет выпуклой тогда (и только тогда), когда функция $-\ln \delta_B(\mathfrak{x})$ есть выпуклая функция в B. Приводится ряд теорем, имеющих место как для выпуклых связных областей, так и для псевдовыпуклых областей.

Развиваемые в работе методы автор собирается в дальнейшем применить к изучению голоморфных функционалов в бесконечномерном пространстве Банаха.

Имеются опечатки. Например, на стр. 31, строка 10 сверху, под знаком $\sum$ вместо $\frac{\ln K_D(\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}})}{\partial z_\mu \partial \bar{z}_\nu} dz_\mu d\bar{z}_\nu$ должно стоять $\frac{\partial^2 \ln K_D(\mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{z}})}{\partial z_\mu \partial \bar{z}_\nu} dz_\mu d\bar{z}_\nu$; на стр. 42, строка 12 сверху, вместо $\lim_{\nu \to \infty} B_\nu = B_0$ должно стоять $\lim_{\nu \to \infty} B_\nu = B$ и др.

Библ. 36 назв.

А. В. Лебедев

4761. Аналитические автоморфизмы в n-мерном комплексном пространстве. Пешль (Automorphismes holomorphes de l'espace à n dimensions complexes. Peschl Ernst), C. r. Acad. sci., 1956, 242, № 15, 1836—1838 (франц.)

Аналитическим автоморфизмом называется гомеоморфное преобразование n-мерного комплексного пространства на себя, задаваемое с помощью аналитических функций. В реферируемой заметке рассматривается группа Γ аналитических автоморфизмов, переводящих в себя координатные плоскости $x_j = 0$ $(j = 1, \ldots, n)$. Каждый автоморфизм $T \in \Gamma$ можно представить в виде

$$x'_j = x_j \exp F_j(x_1, \ldots, x_n).$$

Автор вводит

$$D(T) = \left| \frac{\partial \ln x'_\nu}{\partial \ln x_\mu} \right|.$$

В статье доказано, что для любого $T \in \Gamma$ $D(T) \equiv 1$. Из этой теоремы выводится следующая теорема: Рассмотрим в n-мерном комплексном пространстве совокупность K из $n+1$ аналитических плоскостей (размерности $n-1$), находящихся в общем положении. Каждый аналитический автоморфизм, переводящий K в себя, является линейным преобразованием.

И. И. Пятецкий-Шапиро

4762. Однородные расширения комплексного пространства. Березин Ф. А., Пятецкий-Шапиро И. И., Докл. АН СССР, 1954, 99, № 6, 889—892

D-многообразием авторы называют компактное комплексно-аналитическое однородное многообразие, в которое аналитически отображается n-мерное комплексное аффинное пространство C так, что его образ всюду плотен. Доказывается, что координаты на C могут быть продолжены на все D-многообразия как мероморфные функции, из чего в силу теоремы Чжоу Вэй-ляна (Chow W. L., Amer. J. Math., 1949, 71, 893) следует, что D-многообразия эквивалентны алгебраическим многообразиям. Доказывается, что эти алгебраические многообразия рациональны и, следовательно, односвязны. Используя результаты Ван Сянь-чжуна (РЖМат, 1956, 3302), авторы доказывают, что D-многообразия эквивалентны пространствам классов смежности комплексных полупростых групп Ли по подгруппам, содержащим максимальную разрешимую подгруппу.

И. Р. Шафаревич

4763. Структура факторов автоморфности. Ганнинг (The structure of factors of automorphy. Gunning R. C.). Amer. J. Math. 1956, 78, № 2, 357—382 (англ.)

В различных вопросах теории автоморфных функций важное значение имеет представление автоморфных функций в виде отношения двух голоморфных функций с многообразием нулей, инвариантным относительно соответствующей дискретной группы. Такие функции удовлетворяют соотношению

$$f(Tz) = \nu_T(z) f(z), \quad T \in \Gamma, \tag{1}$$

где $\nu_T(z)$ — голоморфна и нигде не равна нулю. Система функций $\nu_T(z)$, $T \in \Gamma$ называется множеством факторов автоморфности.

Реферируемая статья посвящена классификации факторов автоморфности для дискретных групп Γ преобразований комплексного келерова многообразия D. В статье предполагается, что фактор-пространство D/Γ компактно.

Вначале вводится понятие системы аддитивных факторов автоморфности как системы функций $\sigma_T(z)$, $T \in \Gamma$, для которых справедливо соотношение

$$\sigma_{ST}(z) = \sigma_S(Tz) + \sigma_T(z). \tag{2}$$

Устанавливается теорема, позволяющая перечислить возможные аддитивные факторы автоморфности.

Если σ_T — система аддитивных факторов автоморфности для дискретной группы Γ, то существует единственный гомоморфизм $\Gamma \to \{a_T\}$ в аддитивную группу действительных чисел, для которого существует голоморфная функция $g(z)$, удовлетворяющая соотношению

$$g(Tz) = g(z) + \sigma_T(z) + 2\pi i a_T. \tag{3}$$

Общий вид функций, удовлетворяющих соотношению (3) со всеми возможными a_T, следующий

$$g^*(z) = g(z) + \sum_{\alpha=1}^{p} \xi_\alpha w_\alpha(z) + a, \tag{4}$$

где p — одномерное число Бетти для D/Γ.

Две системы факторов автоморфности $\nu_T(z)$ и $\mu_T(z)$ называются эквивалентными, если существуют такой характер C_T группы Γ и такая всюду отличная от нуля голоморфная в D функция $h(z)$, что

$$\mu_T(z) = C_T \nu_T(z)\, h(Tz)/h(z). \tag{5}$$

Пусть группа Γ представлена каким-нибудь способом как фактор-группа свободной группы H с конечным числом образующих $t_1, \ldots, t_p$.

Пусть P — ядро гомоморфизма $H \to \Gamma$ и $T_1, \ldots, T_p$ — образы образующих $t_1, \ldots, t_p$.

Если ν — любой фактор автоморфности, то можно выделить ветвь логарифма $\sigma_{t_i}(z) = \ln \nu_{T_i}(z)$ для каждого образующего t_i свободной группы H.

Каждому $t \in H$ можно сопоставить голоморфную функцию $\sigma_t(z)$ с помощью соотношения

$$\sigma_{St}(z) = \sigma_S(Tz) + \sigma_t(z). \tag{6}$$

Очевидно, что $\delta(t) = \frac{1}{2\pi i} \sigma_t(z)$ — целое число для всех $t \in P$ и что δ — определяет гомоморфизм $P/[P, H]$ в аддитивную группу целых чисел.

Далее автор выясняет, когда два гомоморфизма δ и δ^* соответствуют одному фактору автоморфности.

Автор показывает, что каждому фактору автоморфности можно сопоставить гомоморфизм группы $P \cap [H, H]/[P, H]$ в группу Z.

Устанавливается, что факторы автоморфности эквивалентны тогда и только тогда, когда им соответствуют одинаковые гомоморфизмы, которые автор называет характерами классов.

В конце статьи из этой теоремы выводятся известные результаты Аппеля (Appell P., J. math. pures et appl., 1884, 97, 16—48) о структуре факторов автоморфности, если D — все комплексное пространство, а Γ — группа параллельных переносов.

Дается достаточный критерий того, чтобы все факторы автоморфности были эквивалентны целым степеням одного. Отмечается, что этот критерий выполняется в случае одного переменного и, следовательно, все факторы автоморфности эквивалентны $(dT/dZ)^{m/M}$.

И. И. Пятецкий-Шапиро

4764. О модулярных функциях степени два. Лапин А. И., Изв. АН СССР, сер. матем., 1956, 20, № 3, 325—336

Исследуются модулярные функции степени два; доказывается, что образованное ими поле изоморфно полю рациональных функций от трех независимых переменных. Рассмотрены также модулярные функции относительно конгруэнцподгруппы модулярной группы, состоящей из матриц, для которых имеет место сравнение

$$u \equiv E \pmod 2.$$

Доказывается, что поле, образованное ими, является полем рациональных функций от трех независимых переменных.

Доказательство первой теоремы основано на связи модулярных функций с проективными инвариантами бинарной формы

$$f(x_1, x_2) = \prod_{k=1}^{6} (p_1^{(k)} x_1 + p_2^{(k)} x_2).$$

Доказательство второй теоремы использует то, что общие абелевы функции от двух переменных совпадают со специальными абелевыми функциями, возникающими в классической проблеме обращения гиперэллиптических интегралов для кривой

$$y^2 = f(x),$$

где $f(x)$ — многочлен пятой степени без кратных корней. И. И. Пятецкий-Шапиро

4765. Плюрисубгармонические функции в комплексных пространствах. Грауэрт, Реммерт (Plurisubharmonische Funktionen in komplexen Räumen. Grauert Hans, Remmert Reinhold), Math. Z., 1956, 65, № 2, 175—194 (нем.)

Реферируемая работа посвящена в основном доказательству для плюрисубгармонических функций двух теорем, являющихся аналогами известных теорем об устранимых особенностях аналитических функций. Результаты были анонсированы авторами ранее (РЖМат, 1956, 8010).

Доказательства приводятся для случая комплексных пространств общего вида, имеющих, вообще говоря, и неуниформизируемые точки. Понятие комплексного пространства было введено авторами ранее (РЖМат, 1956, 7307). Замкнутое подмножество D n-мерного комплексного пространства X называется (аналитически) редким порядка k ($1 \leqslant k \leqslant n$), если для каждой точки $x \in D$ существуют окрестность U и в этой окрестности не более чем $(n-k)$-мерное аналитическое множество M такое, что $D \cap U \subset M$. Упомянутые выше теоремы гласят:

Теорема 3. Пусть D — редкое множество порядка 1 в комплексном пространстве X и $p(x)$ — плюрисубгармоническая функция в $X-D$. Если для каждой точки $x \in D$ существует окрестность U такая, что $p(x)$ в $U - U \cap D$ ограничена, то $p(x)$ может быть плюрисубгармонически продолжена в X и притом единственным образом.

Теорема 4. Пусть D — редкое множество порядка 2 в комплексном пространстве X. Каждая плюрисубгармоническая в $X-D$ функция может быть плюрисубгармонически продолжена в X и притом единственным образом.

Для комплексных пространств общего вида доказательство довольно сложно, для случая комплексных многообразий оно значительно проще. Следует заметить, что Лелон анонсировал (РЖМат, 1956, 386) для случая комплексных многообразий результат, более общий, чем теорема 3. Е. Д. Соломенцев

4766. О непрерывности однолистных отображений произвольных замкнутых областей. Суворов Г. Д., Докл. АН СССР, 1956, 108, № 5, 777—779

Пусть $T(z) = f_1(x, y) + i f_2(x, y)$ — отображение двумерной области G и пусть $f_{jn} = f_j$, если $|f_j| \leqslant n$ и $f_{jn} = 0$, если $|f_j| > n$, $j = 1, 2$, $n = 1, 2, \ldots$. Отображение $T(z)$ называется отображением класса C'_k, если функции f_1 и f_2 имеют обобщенные частные производные первого порядка с суммируемым квадратом в области G, причем при любом натуральном n имеет место неравенство

$$\iint_G \frac{\sum_{j=1}^{2} \operatorname{grad}^2 f_{jn}}{\left(1 + \sum_{j=1}^{2} f_{jn}^2\right)} dxdy \leqslant k.$$

Изучаются топологические отображения $T(z)$ класса C'_k плоских односвязных областей (вообще говоря, неограниченных) и для них дается оценка равномерной непрерывности, т. е. оценка расстояния $\rho(T(z_1), T(z_2))$ через расстояние $\rho(z_1, z_2)$ в соответствующих сферических метриках. Л. Д. Кудрявцев

4767. К теории дифференцирования функции комплексного переменного. Трохимчук Ю. Ю., Укр. матем. ж., 1956, 8, № 2, 177—190

Множество $\mathfrak{M}_z$ всех производных чисел в точке z называется множеством моногенности. В работе изучается связь множеств моногенности с дифференциальными свойствами функций $u(x, y), v(x, y)$. Если функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ дифференцируемы в некоторой точке $z = x + iy$, то множество $\mathfrak{M}_z$ функции $f(z) = u + iv$ является окружностью или точкой.

Если $f(z)$ непрерывна в области D и в каждой точке множества $M \subseteq D$ по крайней мере одна из функций u, v дифференцируема, то почти в каждой точке $z \in M$ множество $\mathfrak{M}_z$ является окружностью (в частности, точкой) или полной плоскостью.

Для любой непрерывной функции $f(z)$ почти в каждой точке z области либо $\mathfrak{M}_z$ есть полная плоскость, либо $f(z)$ асимптотически дифференцируемая (и, следовательно, «асимптотическое» $\mathfrak{M}_z$ есть окружность).

Если множество $\mathfrak{M}_z$ функции $f(z)$ не зависит от z, то либо $\mathfrak{M}_z$ есть полная плоскость, либо $\mathfrak{M}_z$ есть окружность (в частности, точка); в последнем случае функция $f(z)$ имеет вид

$$f(z) = Az + B\bar{z} + C.$$

В § 6 изучаются дифференциальные свойства функции $f(z)$, аналитической в области D, непрерывно продолжаемой на некоторое всюду разрывное совершенное множество $P \subset D$ своих особых точек.

А. Д. Тайманов

4768 К. Геометрические принципы анализа. Жюлиа (Principes géométriques d'analyse. 1 part. Julia Gaston. Paris, Gauthier-Villars, 1955, vi, 116 p., 800 fr.) Bibliogr. France, 1956, 145, № 21, 485 (франц.)

4769 К. Трактат по теории функций. Т. 1. Принципы, общие методы. Ч. 2. Миййу (Traité de théorie des fonctions. T. 1. Principes, méthodes générales. Fac. 2. Milloux Henri. Paris, Gauthier-Villars, 1956, 304 p., 4 500 fr.), Bibliogr. France, 1956, 145, № 41, 894—895 (франц.)

4770 Д. Функции, имеющие особенности типа полюса в компактных областях и на открытых римановых поверхностях. Баде (Fonctions à singularités polaires sur des domaines compacts et des surfaces de Riemann ouvertes. Bader Roger.— Thèse doct. sci. math. Fac. sci. Univ. Paris, 1954. Paris, Gauthier-Villars, 1954, 58 p.) (франц.)

См. также: 4838, 4926 К, 4967, 5145.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

4771. Об одном специального вида дифференциальном уравнении 2-го порядка. Перчинкова-В'чкова Даница (За една специјална линеарна диференцијална равенка од II ред. Перчинкова-В'чкова Даница). Билтен Друшт. матем. и физ. Нар. Реп. Македонија, 1955, 6, 27—29 (макед.; рез. франц.)

Харди в своей книге (Hardy C. H., A Course of Pure Mathematics, 1948, Cambridge, p. 274) решил такую проблему: решение $y=y(x)$ уравнения $y^3+3xy+2x^3=0$ является одним частным решением уравнения

$$x^2(1+x^3)\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{3}{2}x\frac{dy}{dx}+y=0. \qquad (1)$$

В настоящей работе показывается, что другое частное решение уравнения (1) удовлетворяет уравнению:

$$y^6+18y^4x+81y^2x^2+108x^3(x^3+1)=0.$$

В параметрической форме эти решения имеют вид: $x=-3t/(t^2+2)$, $y_1=-3t^2/(t^3+2)$, $y_2=-3(t^4+8t)^{1/2}/(t^3+2)$. Резюме автора

4772. Некоторые коэффициенты разложения в ряд функции Томаса-Ферми-Дирака. Кобаяси (Some coefficients of the series expansion of the TED function. Kobayashi Shigehiro), J. Phys. Soc. Japan, 1955, 10, № 9, 824—825 (англ.)

Вычислены коэффициенты a_{11}—a_{17} разложения в полусходящийся ряд $\psi=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n/2}$ решения уравнения Томаса—Ферми—Дирака

$$\psi''=x[\varepsilon+(\psi/x)^{1/2}]^3,$$

удовлетворяющего граничному условию $\psi(0)=1$.

4773. Об уравнении Риккати (Sobre a equação de Riccati), Técnica, 1956, 31, № 261, 393 (порт.)

Даётся исправление ошибки в статье Роша (РЖМат, 1957, 1382, 1383). В. В. Немыцкий

4774. Заметка о совместности линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Лерер (Note on simultaneous linear differential equations with constant coefficients. Lehrer Y.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1957, 53, № 1, 256—257 (англ.)

4775. О решении в замкнутой форме системы двух обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Чеботарев Г. Н., Тр. Казанск. авиац. ин-та, 1956, 31, 107—111

Указанная в заглавии система берется в матричной форме: $X'=XP(t)$ (решения — строки). Известно, что для существования решения вида

$$X=\exp\int_a^t P(t)\,dt$$

достаточно, причем не только при $n=2$, чтобы выполнялось условие функциональной коммутативности $P(t)$, т. е.

$$P(t_1)\cdot P(t_2)=P(t_2)\cdot P(t_1)$$

при всех t_1, t_2.

Результат работы: при $n=2$ это условие и необходимо. Р. Э. Виноград

4776. О преобразованиях дифференциальных уравнений. Хаяси (On transformations of differential equations. Hayashi Kyûzô), Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, 1954, A28, № 3, 313—325 (англ.)

В первой части статьи автор исследует условия, при которых система

$$dy_i/dx=f_i(x, y_1, \ldots, y_n)\ (i=1, 2, \ldots, n) \qquad (1)$$

с правой частью непрерывной в

$$E_{n+1}: 0\leqslant x\leqslant a,\ |y_i|<\infty\ (i=1, 2, \ldots, n)$$

обладает следующим свойством P: каждое решение (1) имеет точку на плоскости $x=a$ (продолжаемо до $x=a$).

Теорема. Необходимым и достаточным условием того, чтобы система (1) обладала свойством P, является существование положительной функции $\varphi(x, y_1, \ldots, y_n)$, непрерывной вместе с ее первыми производными внутри области E_{n+1} и равномерно сходящейся в $0\leqslant x\leqslant a$ к нулю, и выполнение неравенства

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\sum_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}f_i\geqslant 0$$

в области E_{n+1}. Для доказательства автор вводит соответствующее преобразование, трансформируя пространство $(y_1, \ldots, y_n)$ в единичную сферу в пространстве $(Y_1, \ldots, Y_{n+1})$ и рассматривает преобразованную систему дифференциальных уравнений, используя некоторые результаты, полученные предварительно Окамура. Во второй части статьи исследуется уравнение второго порядка

$$d^2y/dx^2=f(x, y, dy/dx), \qquad (2)$$

где $f(x, y, z)$ — непрерывна для произвольных z и (x, y), принадлежащих к системе D, определяемой неравенствами $0\leqslant x\leqslant a$, $W(x)\leqslant y\leqslant\overline{W}(x)$, где $\underline{W}(x)$ и $\overline{W}(x)$ принадлежат к классу C^1, $\underline{W}<\overline{W}$. Автор исследует условия, при которых уравнение (2) обладает следующим свойством Q: каждое решение (2), продолженное вправо, сохраняет непрерывность своей производной в конечной точке на границе D. Одна из четырех теорем, относящихся к этой задаче, формулируется следующим образом: Необходимым и достаточным условием для того чтобы уравнение (2) имело свойство Q, является существование для любого положительного числа $\alpha>0$ такого числа $\beta(\alpha)$, что для любого решения $y(x)$ уравнения (2) в произвольной точке $(x_0, y_0)\in D$ с $|y'(x_0)|\leqslant\alpha$ выполнялось бы $|y'(x)|<\beta(\alpha)$ для $x\geqslant x_0$. Для доказательства автор заменяет уравнение (2) системой двух уравнений первого порядка и применяет метод, развитый в первой части статьи. J. Szarski

4777. О линейных дифференциальных уравнениях с постоянными коэффициентами. Херлестам (On linear difference equations with constant coefficients. Herlestam Tore), Medd. Lunds univ. mat. semin., 1954, 12 (англ.)

См. РЖМат, 1957, 3249

4778. О преобразованиях систем линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффици-

ентами. **Миколайская** (Sur les transformations des systèmes d'équations différentielles linéaires aux coefficients variables. Mikołajska Z.), Ann. polon. math., 1956, 3, № 1, 142—146 (франц.)

Доказывается теорема, являющаяся видоизменением прежней теоремы автора (Ann. polon. math., 1950, 23, 272—278).

Теорема. Пусть дано преобразование T: $x_i = F^i(\tau, \xi_1, \ldots, \xi_n)$, $t = \tau$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, где 1) $F^i \in C^{(1)}$; 2) якобиан $\det ||F^i_{\xi_j}|| \neq 0$; 3) существует обратное преобразование T^{-1}; 4) T^{-1} переводит любую систему линейных дифференциальных уравнений

$$x_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\, x_j + b_i(t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

также в линейную систему. В таком случае, преобразование T есть линейное, т. е. имеет вид

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\tau)\, \xi_j + \beta_i(\tau), \quad t = \tau \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Б. П. Демидович

4779. **О предельных системах Σ с критическими фиксированными точками, связанных с задачей Римана для линейных систем порядка ⩾ 2. Гарнье** (Sur les systèmes différentiels Σ, à points critiques fixes, associés au problème de Riemann pour les systèmes linéaires d'ordre ⩾ 2. Garnier René), Rend. Circolo mat. Palermo, 1956, 5, № 1, 73—92 (франц.)

Рассматривается уравнение

$$dy/dx = yA,\ A = \sum_{i=1}^{n+2} \frac{A^i}{x - t_i},\ t_{n+1} = 0,\ t_{n+2} = 1. \quad (1)$$

Здесь A^i — матрицы порядка m, не зависящие от x. Можно A^i взять такими функциями от $t_1, \ldots, t_n$, чтобы группа монодромии G не изменялась при изменении переменных t_i и совпадала бы с заданной группой. Это и есть задача Римана для системы (1) и, как известно, тогда A^i суть решение системы порядка $m^2(n+2)$

$$(t_h - t_i)\, dA^h/dt_i = A^iA^h - A^hA^i \quad (h \neq i),$$

$$\sum_{h=1}^{n+2} \frac{dA^h}{dt_i} = 0. \qquad (\sum)$$

В § 1 и 2 дается обзор работ, посвященных изучению особенностей решений системы (Σ). Отмечается, что в работе автора показывается, что на основании изучения решений системы (Σ) можно получить решение задачи Римана. В § 3 формулируется тема настоящей работы. Цель работы состоит в том, чтобы показать, что решение задачи Римана для системы (1) позволяет изучить все интегралы системы (Σ) вокруг их фиксированных особых точек.

Автор ограничивается случаем, когда подстановка G вокруг точки t_n имеет каноническую диагональную форму $[e^{2\pi i r_1}, \ldots, e^{2\pi i r_m}]$, где числа r_i вещественные и $0 < r_1 < r_2 < \ldots < r_m < 1$. Доказывается, что когда t_n находится вблизи нуля, то A^k голоморфны от $t_j^{r_j - r_h}$ и

$$t_n^{1 - r_i + r_h} \quad (r_j > r_h;\ j, h = 1, \ldots, m;\ k \neq n \text{ и } n+1) \qquad (2)$$

и стремятся к конечным пределам, когда $t_n \to 0$. Матрицы t_nA^n, t_nA^{n+1} также будут голоморфными функциями от величин (2) и будут стремиться к нулю вместе с t_n. Этот результат распространяется на тот случай, когда несколько точек t_i стремятся одновременно к нулю.

При решении задачи используется метод решения проблемы Римана через посредство решения задачи Римана—Гильберта, как это сделано в работах Биркгофа (Birkhoff G. D., Proc. Amer. Acad. Arts and Sci., 1915, 49) и Племеля (Plemelj J., Monatsh. Mat. und Phys., 1908, 19). Н. П. Еругин

4780. **Заметка о применении метода Банаха-Каччиополи-Тихонова в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Белецкий А.** (Une remarque sur la méthode de Banach-Cacciopoli-Tichonov dans la théorie des équations différentielles ordinaires. Bielecki A.), Bull. Acad. Polon. Sci., cl. 3, 1956, 4, № 5, 261—264 (франц.); Бюл. Польской АН, 1956, Отд. 3, 4, № 5, 255—258

При доказательстве теоремы существования и единственности решений обыкновенных дифференциальных уравнений часто применяют теорему Банаха—Каччиополи—Тихонова о неподвижной точке. Если применять эту теорему к обыкновенным дифференциальным уравнениям, вводя, как это обычно делается, пространство функций, непрерывных на интервале с обычной метрикой, то достигается простота вычислений по сравнению с классическим методом последовательных приближений, но при этом необходимо ввести определенные ограничения на интервал, в котором должно быть определено решение. Автор показывает на примере дифференциального уравнения

$$y' = f(x, y), \qquad (1)$$

что можно избежать этих неудобств, введя соответствующую метрику в пространстве непрерывных функций. Предположим, что функция $f(x, y)$ непрерывна в области $0 \leqslant x < \alpha \leqslant +\infty$, $0 \leqslant y < \beta \leqslant +\infty$ и что она удовлетворяет следующим условиям: $|f(x, \bar{y}) - f(x, \bar{\bar{y}})| \leqslant L(x)|\bar{y} - \bar{\bar{y}}|$; $|f(x, 0)| \leqslant L(x)$, где функция $L(x)$ не отрицательна и непрерывна в интервале $[0, \alpha)$. Пусть E пространство Банаха функций $\varphi(x)$, непрерывных в интервале $[0, \alpha)$ и удовлетворяющих условию:

$$||\varphi|| = \sup_{[0, \alpha)} \left[|\varphi(x)| \exp(-\varkappa) \int_0^x L(n)\, dn \right] < +\infty,$$

где $\varkappa$ положительная константа. Рассмотрим в E преобразование

$$\widetilde{\varphi}(x) = F(\varphi) = \int_0^x f(t, \varphi(t))\, dt + \eta. \qquad (2)$$

Это преобразование удовлетворяет следующим свойствам

$$F(E) \subset E;\ ||F(\varphi) - F(\psi)|| \leqslant ||\varphi - \psi|| / \varkappa.$$

Следовательно, если выбрать $\varkappa > 1$, то преобразование (2) удовлетворяет требованиям теоремы Банаха—Каччиополи—Тихонова, согласно которой существует функция $\varphi(x) \in E$, удовлетворяющая уравнению $\varphi(x) = \int_0^x f(t, \varphi(t))\, dt + \eta$, или, что то же самое, дифференциальному уравнению (1), имеющему единственное решение, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0) = \eta$ и определенному во всем интервале $[0, \alpha)$. Если ввести в пространство непрерывных функций обычную нормировку $||\varphi|| = \sup_{[0, \alpha)} |\varphi|$, тогда в случае $L = \text{const}$ необходимо предположить, что $\alpha L < 1$. J. Szarski

4781. **О существовании и единственности решений дифференциально-разностных уравнений нейтраль-**

ного типа. **Каменский Г. А.,** Уч. зап. Моск. ун-та, 1956, вып. 181, 83—89

Рассматривается уравнение

$$\mathbf{y}'(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x), \mathbf{y}(x - \Delta(x)), \mathbf{y}'(x - \Delta(x)), \quad (1)$$

где $\mathbf{y}(x)$ и $\mathbf{f}$ — непрерывные n-мерные вектор-функции, $\Delta(x)$ — непрерывная неотрицательная функция. Устанавливаются условия существования и единственности решения основной начальной задачи для уравнения (1) в так называемом особом случае, когда начальное множество E_{x_0} состоит из одной точки и метод шагов не применим.

Доказывается, что в этом случае существует единственное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$ и $\mathbf{y}'(x_0) = \mathbf{y}'_0$, где $\mathbf{y}'_0$ является действительным корнем векторного уравнения $\mathbf{z} = \mathbf{f}(x_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{y}'_0, \mathbf{z})$, если $\mathbf{f}$ удовлетворяет условию Липшица по всем аргументам, начиная со второго в окрестности начальных значений, причем постоянная Липшица по последнему аргументу удовлетворяет некоторому неравенству.

Устанавливается необходимость некоторых условий теоремы, после чего еще раз доказывается теорема существования и единственности в несколько иных предположениях. Л. Э. Эльсгольц

4782. **О непрерывной зависимости решения задачи Коши от начальных данных. Мышкис А. Д., Гринфельд У. К.,** Успехи матем. наук, 1954, 4, № 3, 171—174

Авторы высказывают несколько общих соображений, подтверждающихся на отдельных примерах, о причинах связи между требованием единственности и непрерывной зависимости решения от изменения краевых условий. В. В. Немыцкий

4783. **К аналитической теории нелинейных дифференциальных уравнений. Еругин Н. П.,** Вестн. Ленингр. ун-та, 1956, № 7, 60—70

Исправление и уточнение одного из результатов работы автора (Прикл. матем. и механика, 1952, 16, вып. 4, 659—670; дальше цитируется [I]). Рассматривается система

$$dx/dz = P(x, y, z), \quad dy/dz = Q(x, y, z), \quad (1)$$

где $P(x, y, z)$ и $Q(x, y, z)$ — аналитические однозначные функции, обладающие свойствами

$$P(x, \zeta^{-1}, z) = \zeta^{-m_1} P_1(x, \zeta, z), \quad P_1(x, 0, z) = \text{const} \neq 0;$$

$$P(\eta^{-1}, y, z) = \eta^{-m_2} P_2(\eta, y, z);$$

$$Q(x, \zeta^{-1}, z) = \zeta^{-n_1} Q_1(x, \zeta, z);$$

$$Q(\eta^{-1}, y, z) = \eta^{-n_2} Q_2(\eta, y, z), \quad Q_2(0, y, z) = \text{const} \neq 0.$$

Данное в [I] доказательство того, что система (1) не имеет подвижных существенно особых точек (точек z_0 таких, что при $z \to z_0$ по крайней мере одна из переменных x, y не стремится к пределу), когда соблюдены условия: а) $m_1 > 0$, $m_1 - n_1 + 2 > 0$, $Q_1(x, 0, z)$ ограничена при конечных значениях x, z или $m_1 > 0$, $Q_1(x, \zeta, z)\, \zeta^{m_1 - n_1 + 2}|_{\zeta=0} = 0$ при конечных x, z; б) $n_2 > 0$, $n_2 - m_2 + 2 > 0$, $P_2(0, y, z)$ ограничена при конечных y, z или $n_2 > 0$, $P_2(\eta, y, z)\, \eta^{n_2 - m_2 + 2}|_{\eta=0} = 0$ при конечных y, z, использовало лемму I в [1], которая не верна (указано В. И. Смирновым). Теперь [для частного случая систем (1)] доказывается теорема: если для решения $x(z)$, $y(z)$ системы

$$dx/dz = Q(y, z), \quad dy/dz = P(x, z),$$

где $Q(y, z)$ и $P(x, z)$ суть полиномы соответственно от y и x, коэффициенты которых являются целыми функциями от z, точка $z = z_0$ есть подвижная особая точка, то $x(z) \to \infty$, $y(z) \to \infty$ при $z \to z_0$.

И. Б. Погребысский

4784. **Качественное поведение интегральных кривых обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка в окрестности особой точки. Кейли** (Das qualitative Verhalten der Integralkurven einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung in der Umgebung eines singulären Punktes. Keil, Karl-August), Jahresber. Dtsch. Math. Ver., 1955, 57, 111—132 (нем.)

Автор исследует поведение характеристик уравнения

$$dy/dx = (ax + by + g(x, y))/(cx + dy + f(x, y)) \quad (1)$$

(где $g(x, y)$ и $f(x, y)$ стремятся к нулю быстрее, чем $\sqrt{x^2 + y^2}$) в окрестности начала, при условии, что определитель $D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$. Качественное исследование уравнения (I) при $D = 0$ было выполнено Н. Б. Хаимовым (Уч. зап. Сталинаб. пед. ин-та, 1952, 2, 3—30) в 1952 г. и, независимо от него, А. Ф. Андреевым в 1955 г. (см. РЖМат, 1956, 7329) в предположении, что функции $g(x, y)$ и $f(x, y)$ являются аналитическими (указанные работы автор не цитирует). В отличие от Н. Б. Хаимова и А. Ф. Андреева автор не предполагает аналитичности функций $g(x, y)$ и $f(x, y)$, но считает эти функции дифференцируемыми в окрестности начала и исчезающими в начале вместе со своими частными производными. Автор приводит уравнение (1) с помощью аффинных преобразований к одному из двух видов

$$dx/dy = (x + f(x, y))/g(x, y) \quad (2)$$

или

$$dx/dy = (y + f(x, y))/g(x, y) \quad (3)$$

и исследует эти уравнения с помощью метода изоклин. Прежде всего автор доказывает, что для уравнения (2) существует одна и только одна изоклина нуля J_0, входящая в начало (такое же предложение доказывается и для уравнения (3)), после чего он доказывает несколько теорем о поведении характеристик уравнений (2) и (3) в окрестности начала. Следует отметить, что эти теоремы не дают полного анализа поведения характеристик в окрестности начала, так как почти в каждой из этих теорем остается нерешенной та или иная проблема различения. Так, например, теорема (4) говорит о том, что, если правая часть уравнения (3) при $x = 0$ и, при возрастающих y, меняет в точке пересечения с изоклиной J_0 знак с минуса на плюс, то выше и ниже J_0 существует, по меньшей мере, по одной характеристике этого уравнения, входящей справа в начало. Это замечание применимо и к другим теоремам.

В работе содержится 13 примеров. Отметим, что в одном из них автором допущена ошибка. Автор утверждает (пример № 10), что все характеристики уравнения $dy/dx = 2xy/(2y - x^2)$, расположенные в окрестности начала, входят в него и начало является узлом. Это неверно, так как в данном случае начало является седлоузлом. И. С. Кукле

4785. **Об одной краевой задаче для нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Кордуняну** (Asupra unei probleme la limită pentru ecuaţiile diferenţiale neliniare de ordinul al doilea. Cordunеanu C.), An. ştiinţ. Univ. Iaşi. Sec. I, 1953, 1, № 1—2, 11—16 (рум.; рез. русск., франц.)

Рассматривается краевая задача

$$y'' = f(x, y, y'), \qquad (1)$$

$$y'(a) = A, \quad y(b) + hy'(b) = B. \qquad (2)$$

Используя идею Каччополи (см., например, В. В. Немыцкий, Успехи матем. наук, 1936, вып. 1, 141—175) и принцип сжатых отображений, автор доказывает теорему: Если при $x \in [a, b]$, $u, v \in (-\infty, \infty)$, $f(x, u, v)$, $f_u(x, u, v)$, $f_v(x, u, v)$ непрерывны, $f_v \leqslant 0$, $|f_u| < 2/[(b-a)^2 + 2h(b-a)]$ и для любого M f_v ограничена снизу при $|u| \leqslant M$, то задача (1)—(2) имеет единственное решение $y(x)$; если, далее, $y_0(x)$ — произвольная непрерывно дифференцируемая на $[a, b]$ функция и $y_n(x)$ $(n \geqslant 1)$ — решение уравнения $y_n'' = f(x, y_{n-1}, y_n')$, удовлетворяющее условию (2), то $\lim_{n\to\infty} y_n^{(i)}(x) = y^{(i)}(x)$, $x \in [a, b]$ $(i = 0, 1)$, причем сходимость равномерная. Отмечается, что аналогичный результат имеет место при краевых условиях вида

$$y(a) + hy'(a) = A, \quad y'(b) = B.$$

Имеется ряд опечаток. На стр. 13, 4 строка снизу, вместо $(b-x)^2 h(x-a)/2$ должно быть $(b-x)^2/2 + h(x-a)$. З. Б. Цалюк

4786. Характеристика сложных особых точек системы двух дифференциальных уравнений при помощи грубых особых точек близких систем. Губарь Н. А., Матем. сб., 1956, 40, № 1, 23—56

Автор рассматривает систему уравнений:

$$dx/dt = P(x, y); \quad dy/dt = Q(x, y) \qquad (1)$$

(где $P = ax + by + X(x, y)$ и $Q = cx + dy + Y(x, y)$; $X(x, y)$ и $Y(x, y)$ — аналитические функции, не содержащие членов ниже второй степени, а из четырех постоянных: a, b, c и d, хотя бы одна отлична от нуля) в некоторой окрестности начала координат. Если определитель $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$, то начало представляет собой простую особую точку. Такая точка будет грубой, если $\Delta < 0$ (грубое седло), или, если $\Delta > 0$ и $\delta = a + d \neq 0$ (грубый узел, или фокус). Если $\Delta = 0$, то начало является сложной особой точкой (Андронов А. А. и Хайкин С. Э. «Теория колебаний», ОНТИ, 1937, стр. 307). Автор предполагает, что начало для системы (1) является сложной особой точкой и ставит задачу исследовать зависимость между поведением характеристик уравнения (1) в окрестности начала и характером грубых особых точек, на которые рассматриваемая сложная точка может расщепляться при малых изменениях системы. Наряду с системой (1), автор рассматривает близкую к ней систему:

$$dx/dt = P(x, y) + p(x, y);$$
$$dy/dt = Q(x, y) + q(x, y) \qquad (1')$$

где p и q — аналитические функции, абсолютные значения которых и их частных производных до порядка r включительно, не превосходят в области G числа ε. Эти функции p и q автор называет ε-добавками ранга r. Можно выбрать такие ε-добавки p и q, чтобы система (I') в области G имела m особых точек, причем все эти точки будут простыми и грубыми. Тогда, как говорит автор, сложная особая точка 0 распалась на несколько грубых точек.

В первом параграфе работы дается несколько вспомогательных предложений. Во втором параграфе изучается случай, когда $\Delta = 0$, но $\delta \neq 0$. Начало в этом случае будет седлом, узлом или седлоузлом. Автор доказывает, что в данном случае начало будет седлом (узлом), если при всех ε-добавках, число грубых узлов (седел), расположенных в δ_1 — окрестности точки 0, на единицу больше числа грубых седел (узлов). Начало будет седлоузлом, если число грубых седел системы (1) равно числу грубых узлов.

В третьем параграфе автор изучает случай, когда $\Delta = \delta = 0$. Система (1) с помощью аналитических преобразований в данном случае может быть приведена к уравнению вида:

$$ydy/dx = a_k x^k + a_{k+1}x^{k+1} + \ldots$$
$$\ldots + y(\beta_s x^s + \beta_{s+1}x^{s+1} + \ldots) + y^2\Phi(x, y), \qquad (2)$$

где $k > 1$, $s > 0$ и Φ — аналитическая функция. Начало для уравнения (2), как показали Н. Б. Хаимов (Уч. зап. Сталинаб. пед. ин-та, 1952, 2, 3—30) и А. Ф. Андреев (РЖМат, 1956, 7329), может быть вырожденным седлом, центром, или фокусом, или точкой, к которой примыкает замкнутая узловая область.

Автор доказывает в этом параграфе несколько теорем, обнаруживающих связь между характером особой точки 0 уравнения (2) и характерами простых особых точек, на которые расщепляется точка 0 при определенных ε-добавках. Так, например, в теореме (4) доказывается, что начало для уравнения (2) будет седлом в том, и, только в том случае, когда при всех ε-добавках сравнительное уравнение имеет грубых седел на одно больше, чем грубых узлов, или фокусов. Аналогичные теоремы доказываются и для других случаев расположения характеристик уравнения (2) в окрестности начала. В работе имеются некоторые неточности. На стр. 24 автор утверждает, что, если начало является фокусом, то число открытых узловых областей, примыкающих к началу, равно единице, в то время как следует считать это число в данном случае равным нулю. И. С. Куклес

4787. О стробоскопическом методе. Минорский (On the stroboscopic method. Minorsky N.), Studies Math. and Mech. New York, Acad. Press, Inc., 1954, 192—199 (англ.)

Рассматривается вопрос исследования нелинейных колебаний, описываемых уравнениями типа

$$dx/dt = P(x, y), \quad dy/dt = Q(x, y) \qquad (1)$$

или

$$dx/dt = P(x, y, t), \quad dy/dt = Q(x, y, t). \qquad (2)$$

Приводится приближенный метод, разработанный автором совместно с Шиффером (Schiffer) и называемый стробоскопическим методом, с помощью которого систему (2) можно привести к (1).

С этой целью, предполагая, что колебания близки к гармоническим, вводят новые переменные ρ и ψ согласно формулам:

$$\rho = r^2 = x^2 + \dot{x}^2 = x^2 + y^2, \quad \psi = \operatorname{arc\,tg}\, y/x \qquad (3)$$

при $x = r\cos\psi$, $y = r\sin\psi$.

Тогда система (2) запишется в виде

$$d\rho/dt = F(\rho, \psi, t), \quad d\psi/dt = G(\rho, \psi, t) \qquad (4)$$

или, учитывая, что колебания близки к гармоническим, в виде

$$d\rho/dt = \mu f(\rho, \psi, t), \quad d\psi/dt = -1 + \mu g(\rho, \psi, t), \qquad (5)$$

где μ — малый параметр.

При определенных условиях уравнения (5) заменяются системой

$$d\rho/d\tau = K(\rho, \varphi), \quad d\varphi/d\tau = L(\rho, \varphi), \qquad \tau = \mu t. \tag{6}$$

Таким образом, первоначальная система (2) заменяется соответствующей ей стробоскопической системой (6). Системы (2) и (6) совершенно различны и имеют разные интегральные кривые в соответствующих (ρ, ψ)- и (ρ, φ)-плоскостях. Однако существует важное соотношение между этими двумя системами: А) существование устойчивой особой точки в «стробоскопической» плоскости (ρ, φ) является критерием для существования устойчивого периодического движения (ρ, ψ)-плоскости. В) координаты (ρ_0, φ_0) особой точки в (ρ, φ)-плоскости являются стационарными амплитудой ρ_0 и фазой φ_0 периодического решения в (ρ, ψ)-плоскости.

Вторая часть работы посвящена иллюстрации метода на конкретных примерах типа

$$\ddot{x} + b\dot{x} + (1 + a\cos 2t)\,x + ex^3 = 0,$$

$$\ddot{x} + e(x^2 - 1)\,\dot{x} + [1 + (a - cx^2)\cos 2t]x = 0$$

и других, для которых построена «стробоскопическая» система и проведен анализ решений.

Ю. А. Митропольский

4788. К вопросу об устойчивости периодических решений квазилинейных систем со многими степенями свободы. Блехман И. И., Докл. АН СССР, 1955, 104, № 6, 809—812

Рассматривается квазилинейная система, которая линейным преобразованием может быть приведена к виду

$$dx_s/dt = \lambda_s x_s + f_s(t) + \mu F_s(x_1, \ldots, x_l, \mu, t), \tag{1}$$

где функции F_s относительно $x_1, \ldots, x_n, \mu$ аналогичны, а относительно t, так же как и функции $f_s(t)$, непрерывны и периодичны с периодом 2π. Постоянные λ_s удовлетворяют следующим условиям: 1) $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$; 2) $\lambda_s = \pm iM_j$ при $s = k + 2(m_1 + \ldots + m_{j-1}) + 1, \ldots, k + 2(m_1 + \ldots + m_j)$; 3) $\lambda_s = \pm iN_\nu$ при $s = k + 2m + 2(n_1 + \ldots + n_{\nu-1}) + 1, \ldots, k + 2(m + n_1 + \ldots + n_\nu)$; 4) $\lambda_s = -u_s + iv_s$, $u_s > 0$ при $s = k + 2(m + n) + 1, \ldots, l$. Здесь M_j — целые числа, m_j — кратность пары корней $\pm iM_j$, $j = 1, \ldots, p$, $m = m_1 + \ldots + m_p$ — сумма кратностей всех корней $\pm iM_j$; N_ν и их разности отличны от целых чисел и от нуля, n_ν — кратность пары корней $\pm iN_\nu$, $\nu = 1, \ldots, r$, $n = n_1 + \ldots + n_r$ — сумма кратностей всех корней $\pm iN_\nu$. Функции $f_s(t)$ удовлетворяют условиям $\int_0^{2\pi} f_s(t)\,e^{-\lambda_s t}dt = 0$ при $s = 1, \ldots, k + 2m$.

При сделанных предположениях система (1) допускает при $\mu = 0$ периодическое решение

$$x_s^0 = a_s e^{\lambda_s t} + \varphi_s(t) \quad a_{k+2m+1} = \ldots = a_l = 0$$

$$(s = 1, \ldots, l), \tag{2}$$

где φ_s — периодические функции периода 2π, содержащие $k + 2m$ произвольных постоянных $a_1, \ldots, a_{k+2m}$. Тогда, как известно, если эти постоянные удовлетворяют уравнениям

$$P_s(a_1, \ldots, a_{k+2m}) = \int_0^{2\pi} F_s(x_1^0, \ldots, x_e^0, 0, t)\,e^{-\lambda_s t}dt = 0$$

$$(s = 1, \ldots, k + 2m)$$

и если при этом $\partial(p_1, \ldots, p_{k+2m})/\partial(a_1, \ldots, a_{k+2m}) \neq 0$, то система (1) при μ, отличном от нуля, но достаточно малом, допускает одно и только одно периодическое решение, обращающееся в (2) при $\mu = 0$. В работе доказывается, что если все корни уравнений относительно $\varkappa$ ($\delta_{s\sigma}$ — символ Кронекера)

$$|\partial P_s/\partial a_s - \delta_{s\sigma}\varkappa| = 0 \quad (\sigma, s = 1, \ldots, k + 2m),$$

$$\left|\int_0^{2\pi} \frac{\partial F_s(x_1^0, \ldots, x_l^0, 0, t)}{\partial x_\sigma^0}\,dt - \delta_{s\sigma}\varkappa\right| = 0$$

$$(\sigma, s = k + 2m + 2(n_1 + \ldots + n_{\nu-1}) + 1, \ldots, k + 2m + 2(n_1 + \ldots + n_\nu);\ \nu = 1, \ldots, r)$$

имеют отрицательные вещественные части, то указанное периодическое решение системы (1) асимптотически устойчиво, и если хотя бы один из этих корней имеет положительную вещественную часть, то оно неустойчиво.

Аналогичный результат установлен независимо от автора в гл. III, § 12 монографии референта (РЖМат, 1957, 3225 К) без приведения уравнений к каноническому виду. И. Г. Малкин

4789. Об устойчивости решения дифференциальных уравнений нелинейных колебаний. Ужоцюны (論非綫性振動微分方程解的穩定性. 伍卓羣), 自然科學學報, Цзыжань кэсюэ сюэбао, Acta sci. natur., 1956, № 2, 15—32 (кит.; рез. русск.)

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x})\,\dot{x} + g(x) = 0,$$

и более общее уравнение

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x})\,\dot{x} + g(x, \dot{x}) = 0,$$

которые эквивалентны соответственно

$$dx/dt = y, \quad dy/dt = -f(x, y)\,y - g(x); \tag{1}$$

$$dx/dt = y, \quad dy/dt = -f(x, y)\,y - g(x, y). \tag{2}$$

Пусть $f(x, y)$, $g(x)$ и $g(x, y)$ непрерывны и системы (1) и (2) удовлетворяют условиям единственности при любых начальных значениях.

Теорема I. Если 1) $xg(x) > 0$ $(x \neq 0)$; 2) $f(x, y) > 0$; 3) $\lim_{|x|\to\infty} \int_0^x (g(x) + F_1(x)\operatorname{sign} x)\,dx = \infty$, где $F_1(x) = \inf_y f(x, y)$, то нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво в целом. Из резюме автора

4790. О существовании предельных циклов дифференциальных уравнений нелинейных колебаний. Ужоцюнь (非綫性振動微分方程極限圈的存在性. 伍卓羣), 自然科學報, Цзыжань кэсюэ сюэбао, Acta sci. natur., 1956, № 2, 33—46 (кит.; рез. русск.)

В заметке даются достаточные условия существования предельных циклов для уравнения нелинейных колебаний вида:

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x})\,\dot{x} + g(x) = 0 \tag{1}$$

или

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x})\,\dot{x} + g(x, \dot{x}) = 0. \tag{2}$$

Теорема I. Если (i) $xg(x) > 0$ $(x \neq 0)$; (ii) $f(0, 0) < 0$ и существуют $x_0 > 0$ и $M > 0$ такие, что $f(x, y) \geqslant -M$ при $|x| \leqslant x_0$, $f(x, y) \geqslant 0$ при $|x| \geqslant x_0$; (iii) $\int_0^{+\infty} g(x)\,dx < \infty$ и для любой невозрастающей функции $y(x) > 0$

$$\int_{x_0}^{+\infty} f(x, y)\,dx = \infty, \quad \int_{x_0}^{+\infty} f(x, y)\,dx \geqslant 5Mx_0 \quad (x_1 > x_0)$$

и для любой неубывающей функции $y(x) < 0$

$$\int_{-x_0}^{\infty} (g(x) - f(x, y))\, dx = \infty;$$

то (1) имеет предельный цикл.

Теорема 2. (i) $xg(x) > 0$ $(x \neq 0)$; (ii) $f(0, 0) < 0$; (iii) $\int_0^x F(x)\, dx \operatorname{sign} x$ ограничено снизу и

$$\lim_{|x|\to\infty} \int_0^x (g(x) + F(x) \operatorname{sign} x)\, dx = \infty;$$

(iv) существует $C > 0$ такое, что

$$\overline{\lim}_{|x|\to\infty} \int_0^x (Cg(x) - F(x) \operatorname{sign} x)\, dx = \infty$$

выполняется, где $F(x) = \inf f(x, y)$; то (1) имеет предельный цикл. Устанавливаются и некоторые другие теоремы. Из резюме автора

4791. О дифференциальном уравнении демпфирующих нелинейных колебаний. 1. Моррис (A differential equation for undamped forced non-linear oscillations. 1. Morris G. R.), Proc. Cambridge Philos Soc., 1955, **51**, № 2, 297—312 (англ.)

Статья представляет собой первую часть работы автора, посвященной изучению уравнения нелинейных колебаний

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = p(t), \qquad (1)$$

с зависящей от x восстанавливающей силой, с зависящим от x и от $\dot{x}$ демпфирующим трением и с периодической (периода 2π) возмущающей силой $p(t)$. Автора интересуют условия, налагаемые на f, g и p, при которых решения уравнения (1) имеют определенное поведение при $t \to \infty$; в частности условия, при выполнении которых уравнение (1) имеет периодические решения. Реферируемая часть посвящена уравнению

$$\ddot{x} + 2x^3 = e(t), \qquad (2)$$

где $e(t)$ — гладкая периодическая функция с нулевым средним значением. Основной результат формулируется в виде (теорема 3): Для всякого целого и положительного m, уравнение (2) имеет бесчисленное множество решений периода $2\pi m$; для каждого решения существует достаточно большое k, что при положительном максимуме или отрицательном минимуме $|x| = 2km + 0(1)$, причем решение не имеет других стационарных точек. М. И. Ельшин

4792. Почти периодические и асимптотически почти периодические решения некоторых нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка. Георгиу (Soluţii aproape periodice şi asimptotic aproape periodice ale unor ecuaţii diferenţiale neliniare de ordinul I. Gheorghiu N.), An. ştiinţ. Univ. Iaşi. Sec. I., 1955, **1**, № 1—2, 17—20 (рум.; рез. русск., франц.)

Рассматривается дифференциальное уравнение 1-го порядка

$$dx/dt = f(x, t), \qquad (1)$$

где 1) $f(x, t)$ — определена и непрерывна в полосе $K\{-\infty < t < +\infty,\ |x| \leqslant M\}$; 2) $f'_x(x, t)$ непрерывна в K, причем $f'_x(x, t) \geqslant k > 0$, или $f'_x(x, t) \leqslant -k < 0$; 3) $f(x, t)$ — почти периодическая функция от t (или асимптотически почти периодическая функция от t, в смысле Фреше). Доказывается, что всякое ограниченное решение уравнения (1) почти периодическое (или соответственно, асимптотически почти периодическое). Метод доказательства основан на линеаризации уравнения (1), в форме, примененной референтом (РЖМат, 1954, 3693). Б. П. Демидович

4793. О линейной асимптотике колебаний второго порядка. Аткинсон (On asymptotically linear second-order oscillations. Atkinson F. V.), J. Rational Mech. and Analysis, 1955, **4**, № 5, 769—793 (англ.)

Рассматривается уравнение

$$x'' + xF(x, t) = 0, \qquad (1)$$

где $F(x, t)$ — непрерывная функция, имеющая непрерывные частные производные первого и второго порядка для всех x и $t \geqslant a$ $F(x, t) \to 1$ и $\partial(xF)/\partial x \to x$ равномерно при $t \to \infty$.

$$\max_{|x|\leqslant m} \left|\frac{\partial F}{\partial t}\right| \leqslant h(t, m) = \int_t^{\infty} \max_{|x|\leqslant m} \left|\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}\right| dt < \infty \quad \text{и}$$

$$\int_a^{\infty} h(t, m)\, dt < \infty.$$

При таких условиях определяются такие константы A и B и функция ω, что решение уравнения имеет асимптотическую формулу при $t \to \infty$:

$$x = A\cos\left(\int_{t_0} \omega dt + B\right) + o(1). \qquad (1)$$

Для получения асимптотики t в уравнении (1) рассматривается как параметр, x рассматривается как функция τ и $x'' = d^2x/d\tau^2$.

Асимптотическое выражение для ω получается в виде выражения, содержащего функцию

$$V(x, t) = \int_0^x \xi F(\xi, t)\, d\xi.$$

Вместо близости решений системы $y' = Ay + f(y, t)$ (y — вектор, A — матрица и $f(y, t)$ — возмущающий вектор) при определенных ограничениях на $f(y, t)$ к решениям системы $y' = Ay$, как это делается у Асколи, Якубовича, Левинсона, Демидовича и других авторов, здесь получаются специфические формулы установления предельного режима для неукороченной системы. Однако все это проделывается для частного уравнения (1). М. И. Ельшин

4794. Критерий ограниченности при $t \to +\infty$ решений нелинейного дифференциального уравнения. Санторо (Un criterio di limitatezza in futuro delle soluzioni di una equazione differenziale non lineare. Santoro Paolo), Bol. Unione mat. ital., 1956, **11**, № 3, 432 (итал.)

Рассматривается уравнение

$$\ddot{x} + \omega(x, \dot{x})\dot{x} + h(x) = p(t), \qquad (1)$$

где p непрерывна, ω и h удовлетворяют условию Липшица в любой конечной области,

$$\int^{+\infty} |p(t)|\, dt < \infty.$$

Пусть существует такая функция $f(x)$, что

$$a(x) \equiv \exp\left(\int_0^x f(u)\, du\right) < \text{const}, \quad \omega(x, \dot{x}) \geqslant f(x)\cdot\dot{x};$$

$$H(x) \equiv \int_0^x a^2(u)\, h(u)\, du > 0 \quad (x \neq 0),$$

$$H(\pm\infty) = +\infty.$$

Тогда каждое решение уравнения (1) ограничено при $t \to +\infty$ вместе со своей производной.

Близкие по содержанию теоремы см. РЖМат, 1956, 2994. Опечатки: строка 18 снизу — не надо $a^{-1}(x)$, 5 и 10 снизу — надо a^{-1} вместо a^{-2}. А. Ф. Филиппов

4795. Новые методы нелинейной механики Крылова и Боголюбова. Рейссиг (Neue Methoden der nichtlinearen Mechanik von Krylow und Bogoljubow. Reissig Rolf), Wiss. Z. Humboldt-Univ. Berlin. Math.-naturwiss. Reihe, 1955—56, 5, № 2, 99—102 (нем.; рез. англ., франц., русск.)

Основной задачей нелинейной механики является исследование стационарных движений, т. е. положений равновесия и колебаний. Для этой цели используются топологические и аналитические способы. Ценные исследования в последнем были получены советскими математиками А. Н. Крыловым и Н. Н. Боголюбовым.

Здесь дается очерк двух методов, разработанных ими для исследования автономных колебаний. Эти методы ограничиваются лишь квазигармоническими системами. Резюме автора

4796. Некоторые вопросы теории нелинейных колебаний. Картрайт (Some aspects of the theory of non-linear vibrations. Cartwright M. L.), Proc. Internat. Congr. Mathematicians, 1954, Vol. 3, Groningen-Amsterdam, 1956, 71—76 (англ.)

Краткий обзор работ по двум вопросам, представляющим интерес для теории автоматического регулирования.

1) Об условиях, при которых в нелинейной системе не возникает периодических движений с периодом, отличным от периода внешней силы; в частности, когда при любых начальных условиях установившееся движение будет одно и то же.

2) О скорости приближения любого движения к установившемуся режиму. На ряде примеров показаны методы, применявшиеся для решения этого вопроса для отдельных уравнений. Высказаны соображения о дальнейшем развитии этих результатов.

Большинство приведенных примеров — частные случаи уравнения вида

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = e(t);$$

бегло рассмотрены также уравнения вида $\ddot{x} = F(x, \ddot{x})$, где F — разрывная функция, и уравнения третьего порядка. А. Ф. Филиппов

4797. Несколько критериев неколеблемости. Сандор (Citeva criterii de neoscilație. Sandor Ștefan), Comun. Acad. RPR, 1956, 6, № 6, 753—756 (рум.; рез. русск., франц.)

Пользуясь определением неколеблемости, данным Штернбергом (Stenrberg R. L., Duke Math. J., 1952, 19, 311—322), автор формулирует критерии неколеблемости для систем вида:

$$\frac{d}{dt}\left(A(t)\frac{dy}{dt}\right) + B(t)y = 0 \qquad (1)$$

Здесь $B(t)$ — симметричная матрица, $A(t)$ — положительно определенная матрица, а $y(t)$ — k-мерный вектор. Пусть $\beta(t)$ — наибольшее собственное значение матрицы $C(t) = A^{-1}(y)$.

Критерий 1. Если $\int_t^\infty B(t)\,dt$ существует и удовлетворяет условию

$$-3E/4\int_{t_0}^t \beta(t)\,dt \leqslant \int_t^\infty B(t)\,dt \leqslant E/4\int_{t_0}^t \beta(t)\,dt,$$

то система (1) неколеблющаяся.

Критерий 2. Если $B(t) \geqslant 0$ и $\int_t^\infty B(t)\,dt$ существует и $\left(\int_t^\infty B(t)\,dt\right)^2 \leqslant \frac{1}{4\beta(t)}B(t)$, то система (1) неколеблющаяся.

Критерий 3. Если $B = B_1(t) + B_2(t)$, причем $\limsup(B_1\xi, \xi) = a < 0$ и

$$\limsup\left\{\beta(t)\left[\int_{t_0}^t (B_2(t)\xi, \xi)\,dt\right]^2\right\} < -a,$$

где ξ постоянный вектор с $\|\xi\|^2 = (\xi, \xi) = 1$, то система (1) неколеблющаяся.

Критерий 4. Если

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_{t_0}^t B(t)\,dt = M$$

и при достаточно большом t

$$M + t\beta(t)\left[\int_{t_0}^t B(t)\,dt - tM\right]^2 \leqslant 0,$$

то система неколеблющаяся.

Эти критерии обобщают аналогичные, сформулированные для уравнения второго порядка Винтнером (Wintner A., Amer. J. Math., 1952, 73, 368—380). Резюме автора

4798. О нулях решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Бисак, Шварц (On the zeros solutions of second-order linear differential equations. Beesack P. R., Schwarz Binyamin), Canad. J. Math., 1956, 8, № 4, 504—515 (англ.)

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$u''(z) + q(z)u(z) = 0 \quad |z| < 1, \qquad (1)$$

где $q(z)$ — регулярная функция в открытом единичном круге. В работе доказывается теорема, содержащая оценку снизу для неевклидова расстояния между двумя нулями решения $u(z)$ $(\not\equiv 0)$, рассматриваемого уравнения. Оценка дается в терминах расстояния между двумя соседними нулями четного решения вспомогательного дифференциального уравнения $y'' + M(r)y = 0$, где $M(r)$ — четная неотрицательная функция $\geqslant |q(z)|$, на которую налагается ряд условий.

Результат работы обобщает следствие одной теоремы Нехари (РЖМат, 1955, 5744), в условиях которого каждое решение уравнения имеет не более одного нуля в круге $|z| < 1$. В. Б. Лидский

4799. Обобщенное разложение единицы для замкнутого симметричного обыкновенного дифференциального оператора. Коддингтон (Generalized resolutions of the identity for closed symmetric ordinary differential operators. Coddington Earl A.), Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1956, 42, № 9, 638—642 (англ.)

Рассматривается формально самосопряженный дифференциальный оператор

$$L = P_0\frac{d^n}{dx^n} + P_1\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots + P_n,$$

где P_k — комплекснозначные функции классов C^{n-k} в интервале $-\infty \leqslant a < x < b \leqslant \infty$. Через T_0 обозначается минимальный замкнутый симметричный оператор, порожденный дифференциальным оператором L в гильбертовом пространстве $K = L_2(a, b)$. Пусть F — произвольное обобщенное разложение единицы, соответствующее оператору T_0, и $R(l)$ — соответствующая обобщенная резольвента. Устанавливается, что

$R(l)$ есть интегральный оператор Карлемановского типа с ядром $K(x, y, l)$, у которого производные $\partial^{j+k-2}K/\partial x^{j-1}\partial y^{k-1}$ $(j, k=1, 2, \ldots, n)$ непрерывны по совокупности переменных и аналитичны по l в области, где $\operatorname{Im} l \neq 0$, исключая точки, где $x=y$ при значении $j=k=n$. При этом используются найденное А. В. Штраусом представление для обобщенной резольвенты симметричного оператора (РЖМат, 1954, 5661) и полученное автором представление для правого обратного оператора к оператору $T-l\cdot I$ (РЖМат, 1955, 3300). Исходя из аналитических свойств резольвенты, автор получает далее представление для обобщенного разложения единицы

$$F(\Delta) f(x) = \int_{\Delta} \sum_{j, k=1}^{n} s_j(x, \lambda)\, \hat{f}_k(\lambda)\, d\rho_{jk}(\lambda), \qquad (1)$$

где $\Delta=(\mu, \nu)$, $s_j(x, \lambda)$ — решение уравнения $(L-\lambda)u=0$, удовлетворяющее условию $s_j^{(k-1)}(c, \lambda)=\delta_{jk}$ для некоторого $a<c<b$, $f_k(\lambda)=(f, s_k(\lambda))$, $f(x)$ — финитная функция.

При этом спектральная матрица представима в виде

$$\rho(\lambda) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi} \int_0^{\lambda} \operatorname{Im} \Psi(\nu + i\varepsilon)\, d\nu,$$

где

$$(\operatorname{Im}\Psi)_{jk}(l) = \frac{\partial^{j+k-2} H(c, cl)}{\partial x^{j-1}\partial y^{k-1}};$$

$$H(x, y, l) = \frac{K(x, y, l) - K(x, y, \bar{l})}{2i}.$$

Из формулы (1) непосредственно вытекают теорема разложения и равенство Парсеваля.

В случае, когда L — оператор второго порядка (квазидифференциальный) с вещественными коэффициентами на интервале $(0, \infty)$ и с индексом дефекта (1,1), более полные результаты получены ранее А. В. Штраусом (РЖМат, 1956, 3803), который описал в этом случае все обобщенные разложения единицы. Предлагаемый автором метод является, как отмечает и он сам, обобщением метода Штрауса.

Ю. Л. Далецкий

4800. Письмо в редакцию. Левитан Б., Саргсян И., Изв. АН Арм. ССР, физ.-матем., естеств., и техн. н., 1956, 9, № 7, 105

Исправление к работе авторов (РЖМат, 1957, 3099).

4801. Краевая задача для дифференциального уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом. Норкин С. Б., Уч. зап. МГУ, 1956, вып. 181, 59—72

Изучаются распределение собственных значений и асимптотическое поведение собственных функций краевой задачи для уравнения

$$y''(x) + \lambda y(x) + M(x)\, y(x - \Delta(x)) = 0 \qquad (1)$$

с краевыми условиями

$$y(0) = y(\pi) = 0, \qquad (2)$$

$$y(x - \Delta(x)) \equiv 0 \text{ при } x - \Delta(x) < 0,$$

где λ — действительный параметр, $M(x)$ и $\Delta(x)$ непрерывные на отрезке $[0, \pi]$ функции, $\Delta(x) \geqslant 0$.

Доказывается существование бесконечного множества положительных собственных значений указанной краевой задачи и указано их асимптотическое распределение. Оценена нижняя грань собственных значений и тем самым найдены достаточные условия отсутствия отрицательных собственных значений.

Доказана асимптотическая осцилляционная теорема для собственных функций.

Полученные результаты сходны с аналогичными теоремами для уравнений без отклонений аргумента.

Л. Э. Эльсгольц

4802. Разложение по собственным функциям несамосопряженного уравнения. Фридман, Мишу (Eigenfunction expansions associated with a non-self-adjoint differential equation. Friedman Bernard, Mishoe L. I.), Pacif. J. Math., 1956, 6, № 2, 249—270 (англ.)

Рассматривается краевая задача на интервале (0,1) для уравнения

$$u'' + q(x)\, u + \lambda (p(x)\, u - u') = 0 \qquad (1)$$

с граничными условиями $u(0)=u(1)$.

Предполагается, что функция $q(x)$ непрерывна, а функция $p(x)$ имеет непрерывную вторую производную. Доказывается следующая теорема: Если $F(x)$ функция ограниченной вариации, то ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n u_n(x), \qquad (2)$$

где $a_n = \int_0^1 F(t)\,(pv_n + v_n')\, dt$ (u_n — собственные функции уравнения (1), а v_n — собственные функции ему сопряженного уравнения), сходится к функции

$$g(x) = \frac{1}{2}\left[F(x+0) + F(x-0) - c \exp \int_0^x p(t)\, dt\right],$$

где c — константа, равная $\frac{1}{2}\left(F(0+) + F(1-) \exp - \int_0^1 p(t)\, dt\right)$. Таким образом, для того чтобы ряд (2) сходился в точках непрерывности к $F(x)$, необходимо и достаточно, чтобы $F(x)$ на концах интервала удовлетворяла условию: $c=0$.

Теорема получена интегрированием резольвенты по неограниченно расширяющимся контурам (методом Пуанкаре—Биркгофа). В работе предполагается (без соответствующей оговорки), что резольвента имеет лишь простые полюсы. Доказан этот факт лишь для достаточно больших λ.

В. Б. Лидский

4803. Исследование одного нелинейного дифференциального уравнения третьего порядка. Плисс В. А., Докл. АН СССР, 1956, 111, № 6, 1178—1180

Рассматривается нелинейное дифференциальное уравнение третьего порядка

$$d^3\xi/dt^3 + f(d^2\xi/dt^2) + d\xi/dt + \xi = 0. \qquad (1)$$

где $f(\eta)$ — непрерывна и удовлетворяет условию Липшица при всех вещественных η и, кроме того, условиям:

$$f(0)=0, \quad \eta f(\eta) > \eta^2 \text{ при } \eta \neq 0.$$

Проводится качественное исследование решений уравнения (1). В частности, устанавливается, что область притяжения тривиального решения эквивалентной системы

$$\dot{x} = y - f(x), \quad \dot{y} = z - x, \quad \dot{z} = -x \qquad (2)$$

неограничена. Если же существует производная df/dx и $df/dx > 1$ при всех x, то тривиальное решение системы (2) устойчиво в целом. Автор указывает,

что для доказательства последнего факта использована функция

$$v = -2\int_0^x f(x)\,dx + f^2(x) - 2yf(x) + x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2xz,$$

производная которой по времени знакоотрицательна.

В конце заметки строится пример, показывающий, что система (2) может иметь периодическое движение. Е. А. Барбашин

4804. Качественное исследование системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Зубов В. И., Докл. АН СССР, 1956, 109, № 5, 899—901

Рассматривается система трех дифференциальных уравнений вида:

$$dx/dt = f_1(x, y),\quad dy/dt = f_2(x, y),\quad dz/dt = f_3(x, y, z),$$

на правые части которой наложен ряд ограничений. В частности, предполагается, что у системы существует единственное и при этом асимптотически устойчивое состояние равновесия в начале координат.

В двух первых теоремах даются достаточные условия «устойчивости в целом» этого состояния равновесия. В двух следующих теоремах для некоторых частных случаев отсутствия «устойчивости в целом» рассматривается вопрос об интегральных поверхностях, ограничивающих область асимптотической устойчивости состояния равновесия.

Наконец, в случае системы n автономных дифференциальных уравнений, удовлетворяющей во всем пространстве условиям существования и единственности решения и обладающей асимптотически устойчивым нулевым решением, формулируется теорема о «грубости» области асимптотической устойчивости нулевого решения (т. е. о неизменности этой области при достаточно малых, и обращающихся в нуль на границе области добавках к правым частям системы).

Е. А. Андронова-Леонтович

4805. К вопросу о существовании периодических решений дифференциальных уравнений. Дилиберто, Маркус (A note on the existence of periodic solutions of differential equations. Diliberto S. P., Marcus M. D.), Ann. Math. Studies, 1956, № 36, 237—241 (англ.)

Рассмотрим систему

$$dx/dt = A(t)\,x + p(x, t) + q(x, t, \lambda) + \ldots, \qquad (1)$$

где f, x, p и q — n-мерные векторы, $A(t)$ — квадратная матрица n-го порядка. $A(t)$, $p(x, t)$, $q(x, t, \lambda)$ непрерывны по x, t, λ и удовлетворяют локальным условиям Липшица по x. Пусть $\|p(x, t)\| \leqslant K\|x\|^2$ для $\|x\| \leqslant R$, $q(x, t, 0) = 0$ и характеристические показатели решений системы $dy/dt = A(t)\,y$ имеют не нулевые вещественные части.

Если правые части системы (1) являются периодическими функциями t периода ω, то существует $\lambda_0 > 0$ такое, что для $|\lambda| < \lambda_0$ система (1) имеет периодическое решение периода ω. Е. А. Барбашин

4806. Теорема об инвариантных поверхностях для невырожденной системы. Маркус (An invariant surface theorem for a non-degenerate system. Marcus Marvin D.), Ann. Math. Studies, 1956, № 36, 243—256 (англ.)

Рассматривается вопрос о существовании семейства инвариантных торов для голономной системы вида

$$d\vartheta/dt = 1 + zH(\vartheta, \varphi, z) + \lambda P(\vartheta, \varphi, z),$$
$$d\varphi/dt = 1 + zK(\vartheta, \varphi, z) + \lambda Q(\vartheta, \varphi, z), \qquad (1)$$
$$dz/dt = A(\vartheta, \varphi)\,z + z^2 L(\vartheta, \varphi, z) + \lambda R(\vartheta, \varphi, z),$$

где H, K, L, P, Q, $R \in C^3$ и периодичны по ϑ и φ с периодами ω_1 и ω_2 соответственно. Легко видеть, что при $\lambda = 0$ тор $\Gamma_0 = \Gamma(\vartheta, \varphi)$, порождаемый плоскостью $z = 0$ в результате отождествления точек плоскостей $\vartheta = \pm n\omega_1$, $\varphi = \pm n\omega_2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, является инвариантным множеством для системы (1). Доказывается следующая основная теорема 3: Если

$$H(\vartheta, \varphi, 0) = 0,\ K(\vartheta, \varphi, 0) = 0 \text{ и } \int_0^{\omega_2} A(t + a, t)\,dt < 0$$

для всех $0 \leqslant a \leqslant \omega_1$, $\int_0^{\omega_1} A(t, t + a)\,dt < 0$ для всех $0 \leqslant a \leqslant \omega_2$, то для достаточно малых λ существуют инвариантные торы $\Gamma_\lambda(\vartheta, \varphi)$ периода ω_1 по ϑ и ω_2 по φ, причем $\lim_{\lambda \to 0} d(\Gamma_\lambda, \Gamma_0) = 0$ ($d(\Gamma_\lambda, \Gamma_0)$ означает расстояние между множествами Γ_λ и Γ_0). Эти торы получаются в результате указанного выше отождествления.

В конце работы автор рассматривает n-мерную систему вида

$$d\vartheta/dt = 1 + H(\vartheta, \varphi, z)\,z + \lambda P(\vartheta, \varphi, z),$$
$$d\varphi/dt = 1 + K(\vartheta, \varphi, z)\,z + \lambda Q(\vartheta, \varphi, z), \qquad (2)$$
$$dz/dt = A(\vartheta, \varphi)\,z + L(\vartheta, \varphi, z)\,z + \lambda R(\vartheta, \varphi, z),$$

где ϑ, φ, L, P, Q — скаляры, z — $(n-2)$-мерный вектор H, K, R — $(n-2)$-мерные векторы и $A(\vartheta, \varphi)$ — $(n-2)$-мерная квадратная матрица с такими же условиями периодичности, как и для системы (1) и доказывает предложения, аналогичные теоремам 1—3.

В работе имеются опечатки, сводящиеся к перестановкам между ϑ и φ, ω_1 и ω_2. М. И. Грабарь

4807. Повторяющиеся решения для вырожденной системы. Маркус (Repeating solutions for a degenerate system. Marcus Marvin D.), Ann. Math. Studies, 1956, № 36, 261—268 (англ.)

Заметка примыкает к работе того же автора (реф. 4806).

Рассматривается система

$$d\theta/dt = 1 + \lambda P(\theta, \varphi, \lambda),$$
$$d\varphi/dt = 1 + \lambda Q(\theta, \varphi, z, \lambda), \qquad (1)$$
$$dz/dt = \lambda(A(\theta, \varphi)\,z + R(\theta, \varphi, z, \lambda)),$$

где P, Q, R, $A \in C^3$ и периодичны по θ и φ с периодами ω_1 и ω_2 z — одно или двумерный вектор, $A(\theta, \varphi)$ скаляр или двумерная матрица.

Пусть $C(a) = \int_0^{\omega_2} A(t + a, t)\,dt$ и пусть $L_\lambda(a) = I + \lambda C(a)$. В предположении, что $P, Q = O(\|z\| + |\lambda|)$, $R = o(\|z\|^2 + |\lambda|)$ и $\|L_\lambda^{-1}\| \leqslant 1/(1 + \lambda\Delta)$, где $\Delta > 0$, доказывается теорема, аналогичная теореме 1 из цитированной выше статьи. Норма какой-либо матрицы функции $M(a)$ понимается, как $\sup_{a \in [0, \omega_1]} \|M(a)\|$, где $\|M(a)\|$ обычная евклидова или гильбертова норма. М. И. Грабарь

4808. Основы теории Пуанкаре. Фридрикс (Fundamentals of Poincaré's theory. Friedrichs K. O.), Proc. Sympos. Nonlinear Circuit Analysis, 1953, 2, 56—67 (англ.)

В общих чертах дается изложение «метода малого μ» (метода возмущений) А. Пуанкаре. Это изложение отличается от имеющегося у самого Пуанкаре; а также от всех других изложений этого метода. Укажем вкратце его основные идеи.

Пусть

$$du/dt = f(u, t, \mu) \qquad (1)$$

— система, правые части которой — периодические функции t с периодом T (здесь использована запись в векторной форме, так что через u обозначено множество значений $u = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$.

Пусть при $\mu = 0$ эта система имеет «порождающее» периодическое решение

$$u = \mathring{u}(t).$$

Автор называет «исходной проблемой» вопрос о существовании периодического решения $u(t, \mu)$ системы (1) при $\mu \to 0$, стремящегося к порождающему решению $\mathring{u}(t)$. Эту проблему он называет «вырожденной проблемой порядка s» — если уравнение в вариациях, соответствующее порождающему решению $\mathring{u}(t)$, имеет s линейно независимых периодических решений.

Ограничиваясь «вырожденной проблемой порядка 1», автор сводит ее к следующей «модифицированной проблеме»: вводится вспомогательная система

$$du/dt = f(u, k, t, \beta), \qquad (2)$$

где $f(u, 0, t, \mu) = f(u, t, \mu)$, вводится линейная форма

$$lu = l^{(1)}u_1 + \ldots + l^{(n)}u_n,$$

где $l^{(i)}$ — константы, и налагается условие

$$lu(0) = l^{(1)}u_1(0) + \ldots + l^{(n)}u_n(0) = a. \qquad (3)$$

Параметр a рассматривается как новое независимое переменное, а параметр k — как новое зависимое переменное.

«Модифицированной проблемой», соответствующей данной исходной проблеме, является проблема существования периодической функции $u(t, \mu, a)$ и параметра $k(\mu, a)$, удовлетворяющих паре уравнений (2) и (3) и такой, что при $\mu \to 0$ и $a \to \mathring{u}(0)$

$$u(t, \mu, a) \to \mathring{u}(t) \quad \text{и} \quad k(\mu, a) \to 0.$$

Далее вводится понятие «невырожденной модифицированной проблемы» и доказывается, что для всякой «исходной проблемы» существует невырожденная модифицированная проблема.

Если для решения модифицированной проблемы выполняется еще условие

$$k(\mu, a) = 0, \qquad (4)$$

то таким образом оказывается решена исходная проблема и функция $u(t, \mu, a)$ является функцией, дающей ее решение.

Уравнение (4) автор называет «бифуркационным уравнением». Для пояснения смысла параметра k и роли «бифуркационного уравнения» автор подробно рассматривает случай одного уравнения (т. е. случай $n = 1$), которое при $\mu = 0$ является линейным.

Автор отмечает, что аналогичным образом может быть рассмотрена «вырожденная проблема любого порядка s». Е. А. Леонтович

4809. Асимптотические соотношения между системами дифференциальных уравнений. Там Цой-так (Asymptotic relations between systems of differential equations. Taam Choy-tak), Pacif. J. Math., 1956, 6, № 2, 373—388 (англ.)

Система уравнений в матрично-векторной форме

$$dy/dx = A(x)\,y + f(x, y) \qquad (1)$$

заменяется, как обычно, интегральным уравнением

$$y(x) = Y(x)\,c + \int_0^x Y(x)\,Y^{-1}(t)\,f(t, y(t))\,dt,$$

где $Y(x)$ — фундаментальная матрица для системы $dY/dx = A(x)\,Y$. Подробно излагаются простейшие факты, связанные с этим уравнением. Затем с его помощью устанавливается теорема: Пусть $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant g(x)\,|y_1 - y_2|$ и $a(x) = \mathrm{Re}\,Sp\,A(x)$. Если 1) $|Y(x)| = O(h(x))$ при $x \to \infty$; 2) $|f(x, 0)| \times [h(x)]^{n-1} e^{-\int_0^x a(t)\,dt}$ и $g(x)\,[h(x)]^n e^{-\int_0^x a(t)\,dt}$ интегрируемы на $(0, \infty)$, то каждое решение (1) имеет вид

$$y(x) = Y(x)\,[c + \varepsilon(x)], \quad |\varepsilon(x)| \to 0$$

и

$$|y(x)| = O(h(x)).$$

Как методы, так и результаты подобного содержания хорошо известны (Гробман Д. М., Матем. сб., 1952, 30 (72), вып. 1, 121—166 и ряд других авторов). Далее эта теорема при более жестких предположениях распространяется на случай комплексного x.

Р. Э. Виноград

4810. О существовании предельного режима некоторой нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Демидович Б. П., Уч. зап. Моск. ун-та, 1956, вып. 181, 3—12

Даются достаточные условия существования предельного режима для систем вида

$$dx_i/dt = f_i(x_1, \ldots, x_n) + g_i(t), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad (1)$$

где f_i — действительные, непрерывно дифференцируемые для всех действительных x_i функции, а $g_i(t)$ непрерывны и ограничены на $(-\infty, +\infty)$.

Пусть $W(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ означает матрицу $\partial f_i(\theta_i)/\partial x_j$, где θ_i — произвольные n-мерные векторы, W' — транспонированная к ней матрица, и $W_s = \{W + W'\}/2$. Очевидно, W_s — симметрическая.

Определение. Симметрическую матрицу $A(x) = (a_{ij}(x_1, \ldots, x_k))$. $(i, j = 1, 2, \ldots n;\ k$ — любое целое число) назовем равномерно знакоопределенной (равномерно положительно определенной или равномерно отрицательно определенной), если нижняя грань всех собственных значений ее положительна или соответственно отрицательна.

В работе доказаны три теоремы, которые можно объединить в следующее предложение.

Если матрица $W_s(\theta_1, \ldots, \theta_n)$, составленная для системы (1), равномерно знакоопределенная, то существует единственное решение системы (1), ограниченное на $(-\infty, +\infty)$, и все остальные решения системы (1) асимптотически приближаются к нему или при $t \to +\infty$ (если W_s равномерно отрицательно определена) или при $t \to -\infty$ (в противном случае).

Если, сверх того, $g_i(t)$ — периодичны, то это ограниченное решение является периодическим.

Следует отметить, что в статье установлен критерий равномерной знакоопределенности матриц.

Д. М. Гробман

4811. Границы для периодов периодических решений. Дилиберто (Bounds for periods of periodic solutions. DilibertoStephenP.), Ann. Math. Studies, 1956, № 36, 269—275 (англ.)

Пусть $x = u(t)$ — решение периода ω для системы 1-го порядка $dx/dt = X(x)$, где $x = \{x_1, x_2\}$, а $X(x) = \{X_1(x), X_2(x)\}$ принадлежит классу C^1 при всех x. В число особых точек будем включать ∞. Пусть B — область конечной площади β, не содержащая особых точек, а область $A \subset B$ лежит на расстоянии $d > 0$ от границы B. Если $u(t) \subset A$, то выводится оценка для ω, зависящая лишь от β, d, $m = \min \|X(x)\|$ в области A и $M = \max |X_i, \partial X_i/\partial x_k|$ в B.

С помощью этой оценки доказываются две теоремы:

1. Пусть $dx/dt = X(x, \lambda)$, $X \in C^1$ относительно x и $X \in C^0$ относительно λ, а особые точки неподвижны при изменении λ. Если для $\lambda > 0$ существуют периодические решения, лежащие в $A \subset B$ (где A и B не зависят от λ), а M остается ограниченным при $\lambda \to 0$, то при $\lambda = 0$ также существует периодическое решение.

2. Пусть параметр λ есть угол поворота векторного поля $X(x, \lambda)$, в остальном неизменного, по сравнению с $X(x, 0)$. Тогда каждое периодическое решение $x = u(t, \lambda_0)$ содержится в открытом кольце из периодических решений $x = u(t, \lambda)$, отвечающих λ, близким к λ_0. Угол λ зависит непрерывно, но не всегда монотонно, от «радиального параметра» семейства $u(t, \lambda)$.

Р. Э. Виноград

4812. Структура областей неустойчивости, критерии устойчивости и неустойчивости системы дифференциальных уравнений канонического вида с периодическими коэффициентами. Якубович В. А., Успехи матем. наук, 1955, 10, № 4. 191—192

Рассматривается система

$$dX/dt = I \cdot H(t) X,$$

где I и $H(t)$ — вещественные матрицы порядка $2k$, $I = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$, $H(t)^* = H(t)$, $H(t+\omega) = H(t)$. Автор утверждает, что множество всех сильно устойчивых систем (РЖМат, 1956, 2190) распадается на счетное множество открытых связных подмножеств «областей устойчивости». Формулируется теорема: «Пусть $H_1(t) \leqslant H(t) \leqslant H_2(t)$. Если H_1 и H_2 относятся к области устойчивости (неустойчивости), то и $H(t)$ относится к той же области» — и приводятся указания на метод ее доказательства. Ссылаясь на свою статью о системе двух уравнений (РЖМат, 1956, 6576), автор замечает, что каждый из приведенных там эффективных критериев можно распространить на системы любого четного порядка.

М. И. Ельшин

4813. К теории второго метода А. М. Ляпунова для исследования устойчивости. Красовский Н. Н., Матем. сб., 1956, 40, № 1, 57—64

Даются необходимые и достаточные условия существования функции Ляпунова, имеющей определенно положительную производную и допускающей бесконечно малый высший предел в случае нестационарных уравнений. Рассматривается система

$$dx_i/dt = X_i(x_1, \ldots, x_n, t), \qquad (1)$$

$X_i(0, \ldots, 0, t) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, где X_i имеют непрерывные частные производные по всем аргументам в области $|x_i| < H$, $t \geqslant 0$.

Пусть $F(p, t_0, t)$ обозначает точку траектории, проходящей при $t = t_0$ через точку p. Поведение траекторий в окрестности $x_1^2 + \cdots + x_n^2 < \varepsilon^2$ $(\varepsilon < H)$ называется некритическим и равномерным, если для любого η можно указать такое число $T(\eta)$, что на любой траектории $F(p, t_0, t)$ при p из области $x_1^2 + \cdots + x_n^2 \geqslant \eta^2$ и любом $t_0 > T(\eta)$ есть по крайней мере одна точка $F(p, t_0, t_0 + t(t_0, p))$, удовлетворяющая условиям $\rho[F(p, t_0, t(t_0, p)), 0] > \varepsilon$ при $|t(t_0, p)| < T(\eta)$ (ρ — знак расстояния, 0 — начало координат).

Теорема 1. Для того чтобы в окрестности точки $x_1 = \ldots = x_n = 0$ существовала функция Ляпунова $v(x_1, \ldots, x_n, t)$ класса C_1, имеющая определенно положительную производную dv/dt и допускающая бесконечно малый высший предел, необходимо и достаточно, чтобы поведение траектории было некритическим и равномерным.

Теорема 2. Для того чтобы существовала функция v класса C_1, удовлетворяющая условиям первой теоремы Ляпунова о неустойчивости, необходимо и достаточно, чтобы характер поведения траектории был равномерным и некритическим, причем существовало число t_0 и последовательность точек $p_1, p_2, \ldots, p_k \ldots$ сходящаяся к точке $x_1 = \ldots = x_n = 0$ такие, что числа $t(t_0, p_k)$ в условии (2) являются положительными.

Если невозмущенное движение устойчиво, то условия теоремы 1 совпадают с требованием равномерной асимптотической устойчивости. В случае стационарных уравнений приведенные результаты были получены автором ранее (РЖМат, 1955, 4411).

Е. А. Барбашин

4814. Об устойчивости решений линейного дифференциального уравнения с запаздыванием в критическом случае. Фрид И. А., Уч. зап. Моск. ун-та, 1956, вып. 181, 73—82

Исследуется на устойчивость тривиальное решение линейного дифференциального уравнения n-го порядка с действительными постоянными коэффициентами и с действительными постоянными запаздываниями

$$x^{(n)}(t + b_m) = \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n} a_{\mu\nu} x^{(\nu)}(t + b_\mu) \qquad (1)$$

$$(b_m > b_{m-1} > \ldots > b_0 = 0).$$

Утверждается, что если характеристический квазиполином

$$\tau(s) = s^n e^{b_m s} - \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n} a_{\mu\nu} s^\nu e^{b_\mu s}$$

имеет конечное число простых корней с равными нулю действительными частями, а действительные части всех остальных корней меньше некоторого отрицательного числа, то решение $x \equiv 0$ уравнения (1) устойчиво. Если же среди корней с равными нулю действительными частями имеются кратные корни, то решение $x \equiv 0$ неустойчиво.

Доказательство проведено лишь для уравнения $\dot{x}(t + b) = a_1 x(t + b) + a_2 x(t)$.

Л. Э. Эльсгольц

4815. Об определении непрерывного спектра дифференциального уравнения второго порядка. Иноуэ А. (2 階常微分演算子の連續スペクトルについて・井上一隆), 數學, Сугаку, 1954, 6, № 1, 23—26 (япон.)

4816. О доказательстве теоремы Титчмарша-Кодаира о разложении по собственным функциям. Йосида К. (Titchmarsh-Kodaira の固有函數による展開定理の証明について. 吉田耕作), 數學, Сугаку, 1954, 5, № 4, 36 (япон.)

4817. О семействе интегральных кривых. Хомма С. (積分曲線族の測度・本間榮一郎), 數學, Сугаку, 1954, 6, № 1, 26—28 (япон.)

4818. Некоторые задачи об устойчивости движения. Зубов В. И., Успехи матем. наук, 1956, 11, № 6, 250—252

4819. Об одной теореме устойчивости в целом решения системы нелинейных дифференциальных уравнений. Лиюе-шэн (非線性微分方程組的解全局穩定的一個定理。李岳生), 自然科學學報, Цзыжань кэсюэсюэбао, Acta sci. natur., 1956, № 2, 61—65 (кит.; рез. русск.)

В настоящей работе рассматривается система нелинейных дифференциальных уравнений

$$dx_i/dt = X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$Y_i(x_1, \ldots, x_n)$ определены и непрерывны во всем пространстве $-\infty < x_i < +\infty$, $X_i(0, \ldots, 0) = 0$ и $X_1^2 + \ldots + X_n^2 \neq 0$ при $x_1^2 + \ldots + x_n^2 \neq 0$. Пусть

$B=(b_{ij})$ является симметризованной матрицей с положительными собственными числами.

Определим

$$\varphi(r)=\mathrm{Max}_{\|x\|=r}\left\{\frac{(Bx,\ X)}{\|Bx\|\cdot\|X\|}\right\}.$$

Для того чтобы круговая область

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\leqslant R^2$$

принадлежала к области притяжения точки 0, достаточно, чтобы $\varphi(r)$ была отрицательна в круговой области

$$x_1^2+\ldots+x_n^2\leqslant R_1^2$$

всюду за исключением точки $x_1=\ldots=x_n=0$, где R_1 удовлетворяет неравенству

$$\frac{2}{\|B^{-1}\|}\int_R^{R_1}|\varphi(r)|\,rdr>N,$$

$$N=\mathrm{Max}_{\|x\|=R}\{(Bx,\ x)\},$$

$$\|B^{-1}\|=\mathrm{Max}_{\|x\|=1}\{(B^{-1}x,\ x)\},$$

Резюме автора

4820. Изучение разрывных колебаний методами топологического анализа. Проверка для случая мультивибратора. Дюнген, Онтуа, Янсенс (Etude des oscillations à déferlement par les méthodes de l'analyse topologique. Vérification dans le cas d'un multivibrateur. Dungen Frans van den, HontoyPaul, Janssens Paul), C. r. Acad. sci., 1956, 243, № 7, 627—630 (франц.)

4821. Колеблющиеся системы, зависящие от инерционного параметра. Минорский (Oscillatory systems containing inertial parameters. Minorsky N.), Proc. Sympos. Nonlinear Circuit Analysis, 1953, 2, 154—160 (англ.)

4822. Проблема стационарного движения в газовом лучистом слое. Погожельский (Problème du mouvement stationnaire dans une couche gazeuse rayonnante. Pogorzelski W.), Ann. polon, math., 1955, 1, № 2, 367—379 (франц.)

См. РЖМат, 1955, 1800.

4823. К теории движения заряженных частиц в сильном магнитном поле. Брагинский С. И., Укр. матем ж., 1956, 8, № 2, 119—126

Рассматривается движение заряженной частицы в электрическом и магнитном полях, описываемое уравнениями

$$d\mathbf{r}/dt=\mathbf{v} \qquad (1)$$

$$d\mathbf{v}/dt=\mathbf{F}+[\mathbf{v}\boldsymbol{\omega}],$$

где $\mathbf{F}=e\mathbf{E}/m$, $\boldsymbol{\omega}=e\mathbf{H}/mc$, $\mathbf{E}$ — электрическое поле, $\mathbf{H}$ — магнитное поле.

С помощью метода, изложенного в работе Н. Н. Боголюбова и Д. Н. Зубарева (РЖМат, 1955, 5792) система (1), в предположении, что ω — велико, приводится к системе уравнения усредненного движения

$$d\mathbf{r}/dt=v_{\|\text{ нов}}\boldsymbol{\varepsilon}_0+[\mathbf{F}\boldsymbol{\varepsilon}_0]/\omega-v_{\|\text{ нов}}^2[(\boldsymbol{\varepsilon}_0\nabla)\boldsymbol{\varepsilon}_0,\ \boldsymbol{\varepsilon}_0]/\omega-$$

$$-v_{\perp\text{ нов}}^2\left[\frac{\nabla\omega}{\omega}\boldsymbol{\varepsilon}_0\right]/2\omega$$

$$\frac{d}{dt}\frac{v_{\|\text{ нов}}^2+v_{\perp\text{ нов}}^2}{2}=\mathbf{F}\frac{d\mathbf{r}}{dt}+\frac{v_{\perp\text{ нов}}^2}{2\omega}\frac{\partial\omega}{\partial t},$$

$$\frac{d}{dt}\frac{v_{\perp\text{ нов}}^2}{\omega}=0, \qquad (2)$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ — орт вдоль направления магнитного поля, а новые переменные $v_{\|\text{ нов}}$ и $v_{\perp\text{ нов}}$ — компоненты скорости магнитного поля соответственно вдоль магнитного поля и перпендикулярно к нему, связаны со старыми соотношениями

$$v_{\|\text{ нов}}=v_{\|}+v_{\perp}^2(\boldsymbol{\varepsilon}_0\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\varepsilon}_0)/2\omega,$$

$$v_{\perp\text{ нов}}=v_{\perp}-v_{\|}\cdot v_{\perp}(\boldsymbol{\varepsilon}_0\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\varepsilon}_0)/2\omega.$$

Уравнения усредненного движения (2) интерпретируются. Кроме того, устанавливаются условия, при которых применим метод «усреднения». Эти условия будут

$$v/L\ll\omega$$

или

$$\rho\ll L,$$

где ρ — ларморовский радиус, L — характерный размер системы, т. е. то расстояние, на котором заметно меняются поля. Кроме того, необходимо, чтобы $F/v_{\perp}\ll\omega$.

Ю. А. Митропольский

4824. Об асимптотическом эффекте для дифференциальных уравнений, содержащих периодические члены с большой пульсацией амплитуды. Лойсевич (Sur un effet asymptotique dans les équations différentielles dont les seconds membres contiennent des termes périodiques de pulsation et d'amplitude tendant à l'infini. Łojasiewicz S.), Ann. polon. math., 1955, 1, № 2, 388—413 (франц.)

П. П. Капица (Ж. эксперим. и теор. физики, 1951, 25, вып. 5, 588—597; Успехи физ. наук 1951, 44, вып. 1, 7—20) исследует уравнение движения маятника с пульсирующей точкой подвеса:

$$\ddot{\theta}=(gL^{-1}-aL^{-1}\omega^2\sin\omega t)\sin\theta. \qquad (1)$$

Автор реферируемой статьи рассматривает случай больших ω и доказывает, что при $\omega\to\infty$ так, что $a^2\omega^2=\mathrm{const}$, решения уравнения аппроксимируются решениями уравнения:

$$\varphi'=gL^{-1}\sin\varphi-L^{-2}a^2\omega^2\sin 2\varphi/4. \qquad (2)$$

Доказательство проводится в общем виде для системы n уравнений:

$$x_i''=f_i^{(\tau)}(t,\ x_j,\ x_k')+\varphi_i^{(\tau)}(t,\ t,\ x_j) \qquad (3)$$

$(i,\ j,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$, τ — период функций $\varphi_i^{(\tau)}(t,\ s,\ x_j)$ по s. Все функции $\varphi_i^{(\tau)}(t,\ s,\ x_j)$ имеют по s нулевое среднее значение.

Далее приводится система, решение которой аппроксимирует асимптотически решения системы (3).

М. И. Ельшин

4825. Об одном дифференциальном уравнении из техники, рассмотренном Гран-Ульссоном. Митринович (Sur l'équation différentielle d'un problème de technique étudié par M. R. Gran Olsson. Mitrinovitch D. S.), Kgl. norske vid. selskabs forhandl., 1956, 28, № 31, 171—175 (франц.)

Для уравнения

$$f(x)(y^{(\mathrm{IV})}-2a^2y''+a^4y)+2f'(x)(y'''-a^2y')=0, \qquad (1)$$
$$(a=\mathrm{const}),$$

сводящегося при помощи замены переменных к виду

$$(v''-2av')f-f''v=0, \qquad (2)$$

Гран-Ульсон указал один случай интегрируемости в квадратурах (Gran Olsson, Ingenieur—Archiv, 1934,

5, 363—373), а именно при $f(x) = Ax + B$, A и B — произвольные постоянные. Автор указывает еще два способа получения в квадратурах решения $\{f(x), v(x)\}$ уравнения (2), или решения $\{f(x), y(x)\}$ уравнения (1), зависящего от одной произвольной функции. Указываются конкретные функции $f(x)$, при которых (1) решается в квадратурах, а также случаи, когда решение выражается при помощи функций Вебера, Бесселя, Лежандра, полиномов Эрмита и Лежандра. М. К. Керимов

4826 К. **Практические приложения дифференциальных уравнений. Зандер** (Praxis der Differentialgleichungen. 4. erw. Aufl. Sanden Horst von. Berlin. De Gruyter, 1955, 114 S., ill., 6. 80 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1956, A, № 36, 2546 (нем.)

4827 К. **Труды симпозиума по нелинейным электрическим цепям. Фокс** (Proceedings of the Symposium on Nonlinear Circuit Analysis. New York, Apr. 23, 24, 1953. Ed. Fox Jerome. Polytechn. Inst. Brooklyn, Microwave Res. Inst. Brooklyn, 1953, xii, 411 pp., ill.) (англ.)

4828 К. **Сборник статей по теории нелинейных колебаний. Лефшец** (Contributions to the theory of nonlinear oscillations. Vol. 3. Ed. Lefschetz S. (Ann. Math. Studies, № 36), Princeton, Univ. Press, 1956, 285 pp., ill.) (англ.)

4829 Д. **О существовании и поведении спектральных функций дифференциальных систем второго порядка. Кац И. С.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Харьковск. ун-т, Харьков, 1956

4830 Д. **Об интегрировании некоторых систем нелинейных дифференциальных уравнений. Попов В. В.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Узб. ун-т, Самарканд, 1956

4831 Д. **О положительных решениях одного класса нелинейных уравнений. Мамедов Я. Д.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Азерб. ун-т, Баку, 1956

4832 Д. **Существование и единственность решения краевых задач нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Чан Чан-хун.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., МГУ, М., 1956

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

4833. **О современном состоянии теории уравнений с частными производными. Трикоми** (Sullo stato attuale della teoria delle equazioni a derivate parziali. Tricomi F. G.), Convegno internaz. equazioni lineari alle derivate parziali, 1954, Roma, 1955, 103—110 (итал.)

Излагаются принципы построения курса по уравнениям с частными производными, читаемого автором в Туринском университете.

В обычных университетских курсах изложение, по сути дела, ограничивается классическими методами (метод интегральных уравнений, альтернирующий способ — для эллиптических уравнений, метод характеристик, метод Римана — для гиперболических уравнений и т. д.). В этих курсах совершенно недостаточно освещаются результаты новейших исследований. Необходимо обсуждение материала, который должен быть включен в университетские курсы по теории уравнений с частными производными. В настоящее время наиболее развиты лишь отдельные главы этой теории. Состояние общей теории не является удовлетворительным как в отношении систематичности, так и строгости. Направление, связанное с развитием теоремы Коши-Ковалевской, по мысли автора, является менее перспективным, чем развитие теории характеристик; последняя нуждается в более строгих обоснованиях.

Около 30 лет тому назад автор обратил внимание на несовершенность обычной классификации линейных уравнений с частными производными второго порядка: дискриминант $B^2 - 4AC$ может менять знак, не обращаясь в нуль тождественно. Отсюда возникли исследования автора, и позже других математиков (Асколи, Диац и др.), об уравнениях смешанного типа; простейшим из последних является уравнение

$$y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \qquad (T$$

(уравнение Трикоми). Во время войны значение этих исследований сильно возросло в связи с тем, что в теоретических исследованиях «звукового барьера» полученные результаты позволили найти первое приближение к решению проблемы. Роль уравнения (T) представляется автору аналогичной той, которую имело в свое время уравнение Лапласа — простейшее уравнение эллиптического типа. В своих исследованиях автор стремился не «к возможно большей общности», а к возможно большей отчетливости.

Основные выводы автора таковы:

1. Результаты новейших исследований в области уравнений с частными производными не находят в настоящее время достаточного отражения в соответствующих университетских курсах.

2. Современная общая теория уравнений с частными производными еще не достигла достаточной систематичности. Вследствие этого в современной трактовке теоретических вопросов этой области следует стремиться более к достижению простоты и изящества, нежели к иллюзорной строгости.

3. Своевременность включения в курс уравнений с частными производными изучения уравнений смешанного типа определяется как аэродинамическими применениями последних, так и большим количеством новых теоретических вопросов.

Обзор достижений в развитии теории уравнений смешанного типа в статье отсутствует. Н. И. Симонов

4834. **Об одном обобщении метода Лагранжа-Шарпи. Булешев У. Б.,** Тр. Ин-та матем. и механ. АН УзССР, 1956, вып. 17, 117—125

Работа посвящена обобщению известного метода Лагранжа-Шарпи, дающего способ интегрирования уравнения в частных производных первого порядка вида

$$F(x, y, z, p, q) = 0. \qquad (1$$

В отличие от классического метода Лагранжа-Шарпи автор присоединяет к уравнению (1) уравнение вида

$$\omega_1 = Adx + Bdy + Cdz + Udp + Vdq = 0, \qquad (2$$

где A, B, C, U, V суть функции переменных x, y, z, p, q, подлежащие определению.

Используя теорему Фробениуса о вполне интегрируемости пфаффовой системы, автор сводит определение A, B, C, U, V к системе более сложного вида и доказывает теорему: если найдены функции A, B, C, U, V, удовлетворяющие этой последней системе, то система в форме Пфаффа

$$dz + pdx + qdy = 0,$$

$$Axdx + Bdy + Cdz + Udp + Vdq = 0, \qquad (3$$

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

будет вполне интегрируемой и решение $z = z(x, y, a, b$ системы (3) является полным интегралом исходного уравнения (1).

Рассмотрены два частных случая: 1) $A=\partial\Phi/\partial x$, $B=\partial\Phi/\partial y$, $C=\partial\Phi/\partial z$, $U=\partial\Phi/\partial p$, $V=\partial\Phi/\partial q$; 2) $A=B=0$, $C=-1$, $U=U(x, y, z, p, q)$, $V=V(x, y, z, p, q)$. О. А. Жаутыков

4835. Законы сохранения для некоторых систем уравнений с частными производными и связанные с этими законами отображения. Лёвнер (Conservation laws of certain systems of partial differential equations and associated mappings. Loewner C.), Ann. Math. Studies, 1954, № 33, 161—165 (англ.) См. РЖМат, 1955, 3769.

4836. Замечание о существовании и единственности решения смешанной граничной проблемы для уравнения в частных производных второго порядка эллиптического типа. Стампаккья (Osservazioni sull'. esistenza e sull'unicità della soluzione dei problemi al contorno misti per equazioni derivate parziali del secondo ordine di tipo elittico. Stampacchia Guido), Rend. Accad. sci. fis. et mat. Soc. naz. sci. lettere ed arti Napoli, 1955, 4, № 22, 144—148 (итал.)

Рассматривается уравнение

$$E(u)=g(x, u),\quad x=(x_1, \ldots, x_n), \tag{1}$$

в области T n-мерного пространства точек x, где

$$E(u)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}\sum_{h=1}^{n}a_{hk}\frac{\partial u}{\partial x_h}$$

— оператор эллиптического типа и $g(x, u)$ — нелинейная функция от x, u. При известных условиях, наложенных на a_{hk}, g и T, формулируется без доказательства теорема о существовании и единственности решения уравнения (1), принимающего на одной части F_1T границы T заданные значения $\alpha(P)$ и на другой части F_2T удовлетворяющего условию

$$\lim_{P\to M}\frac{\partial u(P)}{\partial V_M}=\Phi(M, u(M))\ (M\in F_2T).$$

Здесь $\Phi(M, u)$ — заданная функция.

Автор сводит задачу к исследованию минимума функционала

$$\int_T\left\{\frac{1}{2}\sum_{k, h=1}^{n}a_{hk}u'_{x_k}u'_{x_h}+\int_0^u g(x, u)\,du\right\}dx+$$

$$+\int_{\sigma_2T}d\sigma\int_0^u\Phi(x, u)\,du$$

среди функций (класса $W_1^{(2)}(T)$, имеющих на T вторые частные производные с интегрируемым квадратом, и равных $\alpha(P)$ на F_1T. С. М. Никольский.

4837. О некоторых краевых задачах для эллиптических дифференциальных операторов. Лионс (Sur quelques problèmes aux limites relatifs à des opérateurs différentiels elliptiques. Lions J. L.), Bull. Soc. math. France, 1955, 83, № 3, 225—250 (франц.)

Сначала приводится теория разрешимости тех краевых задач, которым в метрике квадратичной формы отвечает оператор вида $E+iH$, где H — самосопряженный ограниченный оператор, т. е. задач, по функциональной структуре аналогичных первой краевой задаче для сильно эллиптических систем. Изучается тот случай, когда для разрешимости задачи данные должны удовлетворять конечному числу дополнительных условий. В качестве приложения приведены основные краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка в областях Соболева (т. е. таких областях, в которых имеют место теоремы вложения С. Л. Соболева) или в областях Никодима (т. е. таких, в которых имеет место неравенство Пуанкаре). Кроме того, приведены приложения к различным краевым задачам для уравнения $\Delta^2u+u=F$. М. И. Вишик

4838. Об одной теореме Ж. Адамара. Николеско (Sur un théorème de M. J. Hadamard. Nicolesco Miron), C. r. Acad. sci., 1956, 243, № 1, 13—15 (франц.)

Пусть D — область плоскости x, t, ограниченная прямыми $t=t_1$, $t=t_2$ $(t_1<t_2)$ и дугами кривых $x=\varphi_1(t)$; $x=\varphi_2(t)$ $(\varphi_1<\varphi_2)$. Адамар (РЖМат, 1956, 8839) установил, что если последовательность «регулярных» и положительных в D решений уравнения

$$\square u\equiv u_{xx}-u_t=0$$

сходится в некоторой точке $(x', t')\in D$, то она сходится равномерно внутри области D', отделенной от D прямой $t=t'$. (Аналог второй теоремы Гарнака для гармонических функций). В работе намечено доказательство аналогичной теоремы для последовательности решений уравнения

$$\square^p u\equiv\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial}{\partial t}\right)^p u=0,$$

«регулярных» в D и удовлетворяющих там неравенствам $(-1)^k\square^k u>0$, $k=0, 1, 2, \ldots, p-1$. И. Л. Кароль

4839. Единственность решения обратной задачи рассеяния. Фаддеев Л. Д., Вестн. Ленингр. ун-та, 1956, № 7, 126—130

Показано, что потенциал $q(x)$ в уравнении $\Delta u+k^2u=q(x)u$ однозначно определяется значениями амплитуды рассеяния $f(n, \nu, k)$ при $k>k_0$ и любых направлениях ν и n падающей и рассеянной волн. Функция $q(x)$ предполагается убывающей при $r\to\infty$ как $1/r^{3+\varepsilon}$. Идея доказательства (получение коэффициента Фурье $q(x)$ из формулы Борна при больших k) известна физикам (Ландау и Смородинский, Лекции по теории атомного ядра, 1956, гл. I). Автору удается просто показать, что плоские волны высокой частоты мало рассеиваются полем, преодолев, таким образом, основное математическое затруднение. Э. Э. Шноль

4840. Дифференциально-соответствующие пространства и теоремы существования. Кошелев А. И., Докл. АН СССР, 1955, 105, № 1, 22—25.

Для эллиптического оператора

$$Lu=\sum_{i, j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial^2u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}a_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+a(x)u$$

и произвольной дважды непрерывно дифференцируемой функции $u(x)$, равной нулю на границе S ограниченной области Ω, доказывается неравенство

$$\|u\|_{W_p^{(2)}(\Omega)}\leqslant M\|Lu\|_{L_p(\Omega)},\quad p>n, \tag{1}$$

при $a\leqslant 0$ и некоторых предположениях гладкости о коэффициентах оператора и границы S.

На основании этого неравенства методом продолжения по параметру доказывается однозначная разрешимость в классе $W_p^{(2)}(\Omega)$ первой краевой задачи для эллиптических уравнений

$$Lu=f(x), \tag{2}$$

$$Lu=f(x, p_1, \ldots, p_n) \tag{3}$$

при условии, что a_{ij} непрерывны и имеют ограниченные производные первого порядка, a_i, a ограничены, $a \leqslant 0$, $f(x) \in L_p(\Omega)$, а $f(x, p_i)$ — непрерывная функция $2n$ переменных, дважды непрерывно дифференцируемая по p_i, удовлетворяющая условию

$$|f(x, p_i)| \leqslant N\left(\sum\nolimits_i |p_i| + k\right)^r, \quad 0 \leqslant r < 1. \qquad (4)$$

Кроме того, устанавливается однозначная разрешимость первой краевой задачи для квазилинейных уравнений с

$$a_{ij} = a^0_{ij}(x) + \lambda \tilde{a}_{ij}(x, p_k),$$

$$f = f^0(x) + \lambda \tilde{f}(x, p_k), \quad a_i = a = 0,$$

при достаточно малом λ. О. А. Ладыженская

4841. **Новые интегральные представления классической теории поля. Аржаных И. С.,** Докл. АН УзССР, 1956, № 2, 3—7 (рез. узб.)

При помощи теоремы Остроградского—Грина получена следующая формула:

$$4\pi\bar{v}(P, t) = -\int\left\{\Delta\bar{v} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial t^2} - k^2\bar{v}\right\}dQ +$$

$$+\int \bar{n}\{\operatorname{div}\bar{v}\}\,ds - \int \bar{n}\times\{\operatorname{rot}\bar{v}\}\,ds + \qquad (1)$$

$$+\operatorname{grad}\int \bar{n}\{\bar{v}\}\,ds - \operatorname{rot}\int \bar{n}\times\{\bar{v}\}\,ds;$$

$\bar{v}(P, t)$ — вектор-функция точки P некоторой области Q (ограниченной поверхностью S) и переменной t, k и c — постоянные, $\bar{n}$ — внешняя нормаль к S и

$$\{\bar{v}(M, t)\} \equiv \frac{\bar{v}(M, t \mp r/c)}{r} -$$

$$-k\int_0^\infty \frac{I_1(k\xi)}{\sqrt{\xi^2 + r^2}}\,\bar{v}\left(M, t \mp \frac{\sqrt{\xi^2 + r^2}}{c}\right)d\xi, \quad r = |\overline{MP}|.$$

Отмечены частные случаи: а) $k = 0$ и б) $k = 0$ $\bar{v}$ не зависит от t, — содержащие соответственно формулы Кирхгоффа и Грина. Вектор-функция $\bar{v}$ предполагается удовлетворяющей «обычным аналитическим условиям теории поля», не уточняемым в работе. Рассматриваются некоторые применения формулы (1), опирающиеся на предыдущую работу автора (РЖМат, 1955, 3792). М. Н. Олевский

4842. **Аналитические эллиптические операторы** (Opérateurs analytiques elliptiques), Sémin. Schwartz. Fac. sci. Paris, 1954—1955, 2, № 6, 1—5 (франц.)

Часть заключительного утверждения предыдущей статьи (РЖМат, 1957, 435), касающаяся аналитичности, устанавливается без использования теоремы Ковалевской, непосредственным мажорированием последовательных производных. Метод позволяет устанавливать аналитичность по части независимых переменных. Подробно разобран пример уравнения теплопроводности. А. А. Дезин

4843. **К исследованию граничных задач для эллиптических дифференциальных уравнений. Харазов Д. Ф.,** Докл. АН СССР, 1955, 100, № 3, 421—424

Пусть в двумерной области T с границей Γ дано дифференциальное уравнение

$$\Lambda(u) + L(u; \lambda) = f(x, y), \qquad (1)$$

где $\Lambda(u)$ — самосопряженный эллиптический оператор порядка $2n$, а $L(u; \lambda)$ — такой же оператор порядка $2n - 2$, коэффициенты которого полиномиально зависят от λ.

Пусть

$$U_i(u) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (2)$$

— такие граничные условия, при которых оператор Λ самосопряженный, а оператор L симметрический. Предполагается, что уравнение $\Lambda u = p(x, y)$ имеет, и при том единственное, решение, представимое с помощью интегрального оператора, ядром которого является функция Грина задачи $H(x, y; \xi, \eta)$. При этих условиях задача (1), (2) исследуется с помощью сведения ее к интегральному уравнению (с помощью применения к обеим частям (1) оператора Λ^{-1}), которое приводится к следующей форме: $w - \sum_{k=0}^{m} \lambda^k A_k w = f$, где A_k — интегральные операторы, выражающиеся через коэффициенты уравнения и функцию Грина H. Приведен ряд теорем, в которых даны достаточные условия разрешимости задачи, а также сформулирован ряд спектральных теорем. М. И. Вишик

4844. **О задаче Коши для уравнения Лапласа с несколькими независимыми переменными. Бертолини** (Sul problema di Cauchy per la equazione di Laplace in più variabili indipendenti. Bertolini Fernando), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 85 (итал.)

Очень коротко сообщается о полученном автором необходимом и достаточном условии разрешимости задачи Коши для уравнения Лапласа в пространстве. Очевидно, в формулировке основного предположения, при котором автором получено это условие, имеется опечатка. Это предположение заключается, по-видимому, в том, что та часть границы рассматриваемой области, на которой не задаются данные Коши, плоская. Как отмечается, метод автора, использующий разложение Фурье, допускает обобщение на случай большего числа независимых переменных. Никаких точных формулировок полученных результатов, и тем более доказательств, не приводится Б. Боярский

4845. **Теорема о максимуме логарифмического потенциала. Нинômия** (對數ポテンシヤルにおける最大値の定理。宮信幸), 數學, Сугаку, 1954, 5, № 4, 28 (япон.)

4846. **Операторный метод решения первой краевой задачи для эллиптических дифференциальных уравнений второго и четвертого порядка с постоянными коэффициентами. Клиот-Дашинский М. И.,** Успехи матем. наук, 1956, 11, № 6, 247—249

4847. **Функционально-инвариантные решения волнового уравнения для пространственного случая. Драпкин А. Б.,** Доповіді та повідомлення. Львівськ. ун-т, 1955, вип. 6, ч. 2, 99—103 (укр.)

Для волнового уравнения

$$\Box W \equiv W_{xx} + W_{yy} + W_{zz} - W_{tt} = 0$$

изучается семейство функционально-инвариантных решений вида $W = U \cdot \Phi(V)$, где $\Phi(x, y, z, t)$ — произвольная, нужное число раз дифференцируемая функция, а функции $U(x, y, z, t)$, $V(x, y, z, t)$ подлежат определению. Для случая двух пространственных переменных такие решения рассматривались Я. Б. Лопатинским и Т. Ибадовым (Тр. Азерб. ун-та, 1945, 5).

Задача сводится к нахождению функций U, V из системы уравнений

$$\Box U = 0, \qquad (2)$$

$$U_x V_x + U_y V_y + U_z V_z - U_t V_t + \frac{1}{2} U \Box V = 0, \qquad (3)$$

$$V_x^2 + V_y^2 + V_z^2 - V_t^2 = 0. \qquad (4)$$

Интеграция уравнения (4) методом Коши приводит к системе

$$V=\varphi(\alpha,\beta,\gamma), \tag{5}$$

$$(x-\alpha)\sqrt{\varphi_\alpha^2+\varphi_\beta^2+\varphi_\gamma^2}+\varphi_\alpha t=0,$$

$$(y-\beta)\sqrt{\varphi_\alpha^2+\varphi_\beta^2+\varphi_\gamma^2}+\varphi_\beta t=0, \tag{6}$$

$$(z-\gamma)\sqrt{\varphi_\alpha^2+\varphi_\beta^2+\varphi_\gamma^2}+\varphi_\gamma t=0,$$

$$V_x=\varphi_\alpha,\ V_y=\varphi_\beta,\ V_z=\varphi_\gamma, \tag{7}$$

$$V_t=\sqrt{\varphi_\alpha^2+\varphi_\beta^2+\varphi_\gamma^2}\quad(\varphi_\alpha^2+\varphi_\beta^2+\varphi_\gamma^2\neq 0),$$

где α, β, γ — параметры, а φ — произвольная функция.

Дифференцирование уравнений (6) дает систему уравнений, определяющих $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$, определитель которой имеет вид

$$\Delta=-1+(\lambda+\varkappa)t-\lambda\varkappa t^2=-\lambda\varkappa\left(t-\frac{1}{\lambda}\right)\left(t-\frac{1}{\varkappa}\right),$$

где λ, $\varkappa$ — функции от α,β,γ, определяемые неявно системой (5)—(7).

Рассматриваются различные возможности:

1) $\lambda=\varkappa=0$, 2) $\lambda\neq 0$, $\varkappa\neq 0$, $\lambda\neq\varkappa$, 3) $\lambda=\varkappa\neq 0$.

В каждом случае определяются в конечном виде функции U и V. О. В. Гусева

4848. Замечания о нормальных формах линейных гиперболических уравнений второго порядка. Дуглис (Observations on normal forms of linear hyperbolic equations of second order. Douglis Avron), Communs Pure and Appl. Math., 1954, 7, № 4, 675—695 (англ.)

Работа является продолжением другой работы автора (РЖМат, 1956, 1344), в которой обсуждался вопрос о приведении общих линейных гиперболических уравнений второго порядка к «нормальному» виду за счет выбора новой системы координат. При этом приведении терялась гладкость коэффициентов на «временной оси». В настоящей работе показывается, что предварительным умножением уравнения на некоторую функцию можно улучшить коэффициенты нормальной формы. Кроме этого, исследуются преобразования («обобщенные преобразования Лоренца») одних «нормальных» координат в другие, отнесенные к той же точке. О. А. Ладыженская

4849. Обобщенная граничная задача для уравнения теплопроводности. Гальярдо (Problema al contorno generalizzato per l'equazione del calore. Gagliardo Emilio), Ricerche mat., 1955, 4, 74—94 (итал.)

Изучается первая краевая задача для уравнения

$$\partial^2u/\partial x^2-\partial u/\partial y=f(x,\ y) \tag{1}$$

в области $D\{\alpha(y)<x<\beta(y);\ c\leqslant y\leqslant d\}$, $\alpha(y)<\beta(y)$; $\alpha(y)$, $\beta(y)$ непрерывны в сегменте $[c,d]$. Устанавливается теорема: Если $f(x,y)$ — квадратично суммируемая в D, $w_1(x)$, $w_{21}(y)$, $w_{22}(y)$ ($\alpha(c)\leqslant x\leqslant\beta(c)$, $c\leqslant y\leqslant d$) абсолютно непрерывны и имеют квадратично-суммируемые первые производные; $w_1(\alpha(c))=w_{21}(c)$, $w_1(\beta(c))=w_{22}(c)$, то существует определенная в D функция $u(x,y)$, абсолютно непрерывная относительно каждой из переменных в отдельности с абсолютно непрерывной по x производной du/dx и квадратично суммируемыми в D производными du/dx, du/dy, $\partial^2u/\partial x^2$, которая почти всюду в D удовлетворяет уравнению (1) и почти при всех y (или x) удовлетворяет краевым условиям

$$\lim_{x\to\alpha(y)}u(x,y)=w_{21}(y);\quad\lim_{x\to\beta(y)}u(x,\ y)=w_{22}(y);$$

$$\lim_{y\to c}u(x,y)=w_1(x). \tag{2}$$

В описанном классе функций решение задачи (1), (2) единственно.

Доказательство основано на интегральных неравенствах и одной теореме о компактности семейства функций, имеющих почти всюду производные du/dx, $\partial^2u/\partial x^2$, du/dy, суммируемые по области D со степенью $p>1$. С. Д. Эйдельман

4850. Изучение фундаментального решения параболического уравнения. Погожельский (Étude de la solution fondamentale de l'équation parabolique. Pogorzelski W.), Ricerche mat., 1956, 5, № 1, 25—57 (франц.)

Подробно излагается построение фундаментального решения параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x_1,\ldots,x_n,t)+\frac{\partial^2u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i(x_1,\ldots,x_n,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}+$$

$$+c(x_1,\ldots,x_n,t)\,u=0$$

в конечном цилиндре $(x_1,\ldots,x_n)\in\Omega, 0\leqslant t\leqslant T$ в следующих предположениях: 1) коэффициенты $a_{ij}(x_1,\ldots,x_n,t)$, $b_i(x_1,\ldots,x_n,t)$, $c(x_1,\ldots,x_n,t)$ непрерывны по совокупности аргументов в $\bar{\Omega}\times[0,\ T]$ и удовлетворяют условию Гёльдера по $x_1,\ldots,x_n$ с показателем h; $0<h\leqslant 1$; 2) $a_{ij}(x_1,\ldots,x_n,t)$ удовлетворяют условию Гёльдера по t. Построение проводится методом Леви. Изучена дифференцируемость параболического аналога объемного потенциала в предположении, что плотность удовлетворяет условию Гёльдера. Работа продолжает известные исследования Жиро, Дресселя (Giraud G., C. r. Acad. sci., 1932, 195, 98—100; Dressel F. G., Duke Math. J., 1946, 13, 61—70). С. Д. Эйдельман

4851. Исследование фундаментального решения параболического уравнения. Погожельский В., Бюл. Польской АН, 1956, Отд. 3, 4, № 1, 9—13 См. реф. 4850.

4852. Об обобщенной задаче Фурье. Погожельский (Sur le problème de Fourier généralisé. Pogorzelski W.), Ann. polon. math., 1956, 3, № 1, 126—141 (франц.)

Пусть Ω — область n-мерного ($n\geqslant 3$) евклидова пространства, ограниченная замкнутой поверхностью Ляпунова S. Ставится задача: найти функцию $u(A,t)$, $[A=A(x_1,\ldots,x_n)\in\Omega,\ t\in(0,\ T)]$, удовлетворяющую уравнению

$$\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\partial^2u}{\partial x_\nu^2}-\frac{\partial u}{\partial t}=F(A,t,u),$$

граничному условию

$$\partial u/\partial n_p=\Phi(P,t,u),\quad P\in S,$$

и начальному условию $\lim_{t\to 0}u(A,t)=0$, $A\in\Omega$, в предположении, что функция $F(A,t,u)$ удовлетворяет условию Гёльдера относительно $A\in\Omega$ и $|u|\leqslant R$ и непрерывна по t, а $\Phi(P,t,u)$ непрерывна для $P\in S$, $t\in(0,T)$, $|u|\leqslant R$. Сведя задачу к системе двух нелинейных интегральных уравнений относительно $u(A,t)$ и $\partial u/\partial n=\varphi(P,t)$, введя затем линейное функциональное пространство пар функций $\{u(A,t),\ \varphi(P,t)\}$ с нормой $\sup|u(A,t)|+\sup|\varphi(P,t)|$, автор получает ряд неравенств, означающих применимость принципа

Шаудера неподвижной точки, и доказывает теорему: Если диаметр L области Ω, R, $M_F = \sup|F|$, $M_\Phi = \sup|\Phi|$, и некоторые константы, характеризующие границу S, удовлетворяют указанным в статье двум неравенствам, то существует по меньшей мере одно решение поставленной задачи. Х. Л. Смолицкий

4853. Письмо в редакцию. Ляпце В. Э., Матем. сб., 1956, 39, № 4, 525

Автор просит поместить исправление к его статье (РЖМат, 1956, 7372). При формулировке теоремы 1 допущена неточность. Именно, от свободного члена системы—функции $f(t, x)$ следует требовать не сильной непрерывности по t, а сильной непрерывной дифференцируемости по t (см., например РЖМат, 1953, 817).

4854. Решение основных граничных задач для нелинейного дифференциального уравнения параболического типа методом акад. С. А. Чаплыгина. Зерагия П. К., Сообщ. АН ГрузССР, 1956, 17, № 2, 103—109

Рассматриваются граничные задачи для нелинейного параболического уравнения

$$\Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} = f(x, t, u), \qquad (1)$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $\Delta u \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i}$. Функция f предполагается непрерывной вместе с f_u при $x \in D + S$, $t \geqslant 0$ и при всех конечных u. Здесь D — область n-мерного пространства, ограниченная замкнутой поверхностью Ляпунова. Кроме того, f удовлетворяет условию Липшица по переменным x_i. Основное предположение сводится к неравенству $f_u > 0$ при указанных выше значениях аргументов.

Доказывается, что граничная задача: найти регулярное в области D при $t > 0$ решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(x, 0) = 0 \ (x \in D), \ u(\xi, t) = 0 \ (\xi \in S, t > 0), \qquad (2)$$

имеет решение на любом конечном промежутке времени $[0, T]$. Именно, строятся последовательности нижних v_m и верхних w_m функций, равномерно сходящихся к решению граничной задачи (1), (2). При этом нижняя функция v_m ($m = 1, 2, \ldots$) определяется как решение линейного уравнения

$$\Delta(v_m - v_{m-1}) - \frac{\partial(v_m - \partial v_{m-1})}{\partial t} = K(v_m - v_{m-1}) - \left[\Delta v_{m-1} - \frac{\partial v_{m-1}}{\partial t} - f(x, t, v_{m-1})\right],$$

удовлетворяющее условиям (2). В качестве v_0 берется функция, удовлетворяющая неравенству

$$\Delta v_0 - \frac{\partial v_0}{\partial t} - f(x, t, v_0) > 0.$$

Указывается способ построения v_0. $K = \max f_u$ при $x \in D + S$, $0 \leqslant t \leqslant T$, $v_0 \leqslant u \leqslant w_0$. Подобным образом строится последовательность верхних функций. Рассуждения, используемые в доказательстве, аналогичны тем, которые применялись референтом при доказательстве сходимости методом Чаплыгина для нелинейного эллиптического дифференциального уравнения (РЖМат, 1956, 755; см. также РЖМат, 1955, 223). И. П. Мысовских

4855. О задаче Коши для неоднородных параболических систем. Слободецкий Л. Н., Докл. АН СССР, 1955, 101, № 5, 805—808

В слое $0 \leqslant t \leqslant T$ решается задача Коши для системы параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum A^{(i_1, \ldots, i_r)}(t, X) \frac{\partial^r u}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_r}} + A(t, X) u = f \qquad (1)$$

($X = (x_1, \ldots, x_n)^{i_1, \ldots, i_r}$, $A^{(i_1, \ldots, i_r)}$ — матрицы) порядка $2p$ с переменными коэффициентами. Используя оценки, установленные С. Д. Эйдельманом (см. РЖМат, 1955, 5040), для производных основной матрицы $G(t, X; \tau, Y)$ решений однородной параболической системы типа (1), а также доказанные в работе оценки для разностей этой функции, автор доказывает равномерную корректность постановки задачи Коши для (1). В классе функций, в среднем не растущих быстрее на бесконечности, чем $\exp[\beta |X|^{2p(2p-1)}]$ доказана теорема единственности. Существование решения доказано при начальной функции $\varphi(X)$, для которой

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(X)|^q \exp(-\mu q |X|^{2p/(2p-1)}) dX < +\infty.$$

М. И. Вишик

4856. Об одной системе параболических уравнений Лебедев В. И., Докл. АН СССР, 1955, 103, № 5, 763—766

Рассматривается система

$$\partial u_k / \partial t + a_k \Delta u_k = f_k(x, t), \ k = 1, \ldots, m, \qquad (1)$$

где $a_k = \alpha_k + i\beta_k$, $\alpha_k > 0$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ в области $Q = \Omega \times [0, l]$, Ω — ограничена кусочно-гладкой поверхностью S, при условиях:

$$f_k \in L_2(Q), \ u_k|_{t=0} = \varphi_k(x) \in w_2^{(1)}(\Omega),$$

$$\partial u_k / \partial n|_S = \sum_{k=1}^{m} b_{kl}(x) u_l|_S, \qquad (2)$$

где матрица (b_{kl}) удовлетворяет некоторым условиям «неположительности». Решение задачи (1), (2) понимается в смысле, введенном в работах референта и оправданном с точки зрения наличия теоремы единственности. Для нахождения решения автор предлагает некоторую дифференциально-разностную схему. Вызывает сомнение данная им замена граничного условия. О. А. Ладыженская

4857. Разложение по собственным функциям уравнений в частных разностях второго порядка. Березанский Ю. М., Тр. Моск. матем. о-ва, 1956, 5, 203—268

Дано подробное изложение ранее опубликованных результатов (РЖМат, 1954, 5659; 1956, 603).

Изучается краевая задача для уравнения

$$L(u) = L(u)_{jk} = a_{j-1,k} u_{j-1,k} + a_{j,k} u_{j+1,k} + b_{j,k-1} u_{j,k-1} + b_{j,k} u_{j,k+1} + c_{j,k} u_{j,k} = \lambda u_{j,k}. \qquad (1)$$

с вещественными коэффициентами $a_{j,k}$, $b_{j,k}$ и $c_{j,k}$ в правой полуплоскости с краевым условием $u_{-1,k} = 0$ и условием на бесконечности:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |u_{j,k}|^2 < \infty.$$

На эту задачу обобщается преобразование Фурье. Пусть $P_q(\alpha; \lambda)$ ($q = 0, 1, \ldots$; $\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) есть решение уравнения (1) с начальными условиями $P_{-1,k}(\alpha, \lambda) = 0$, $P_{0,k}(\alpha, \lambda) = \delta_{k\alpha}$ и пусть f_q — финитная последовательность. Пусть

$$F_\alpha(\lambda) = \sum_q f_q P_q(\alpha; \lambda).$$

Тогда имеет место равенство Парсеваля

$$\sum_q f_q \bar{g}_q = \sum_{\alpha,\beta=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_\alpha(\lambda)\,\overline{G}_\beta(\lambda)\,d\tau_{\alpha\beta}(\lambda),$$

где $\| \tau_{\alpha\beta}(\lambda) \|_{-\infty}^{\infty} = T(\lambda)$ — некоторая неубывающая матрица-функция.

Основная часть работы посвящена изучению вопросов определенности и неопределенности краевой задачи, что связано также с единственностью и неединственностью матрицы $T(\lambda)$. В этом направлении автору удалось установить значительную аналогию с классической проблемой моментов.

В конце работы изучается обратная задача спектрального анализа для уравнения (1). Б. М. Левитан

4858. **К методу разложения по собственным функциям главной части уравнения в решении смешанных задач. Халилов З. И.**, Тр. Азерб. ун-та, сер. физ.-матем., 1954, вып. 4, 5—33 (Рез. аверб.)

Работа является третьей публикацией автора (РЖМат, 1955, 233; 1956, 7368), посвященной одной и той же задаче:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C(t, x)\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0,$$

$$u(x, 0) = \varphi(x),\ u_t(x, 0) = \psi(x).$$

Как указывалось в РЖМат, 1955, 233, результаты автора значительно слабее полученных ранее другими авторами. Метод решения также не нов. Теорема E работы неверна (в качестве противоречащего примера достаточно взять $C(t, x) = 1$). Задачи, о которых говорит автор, как о проблемах будущего, исследованы. Библ. 12 назв. О. А. Ладыженская

4859. **Решение смешанной задачи для одного общего одномерного гиперболического уравнения. Мамедов (Хайями) К. М.**, Тр. Ин-та физ. и матем. АН Азерб. ССР, 1955, 7, 33—54 (рез. азерб.)

Исследуется смешанная задача для уравнения

$$\mathscr{L}(u) \equiv (L + M + N)\,u = f(t, x), \qquad (1)$$

где

$$Lu \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(P(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - q(x)\,u,$$

$$Mu \equiv C(t, x)\frac{\partial u}{\partial t} + D(t, x)\,u,$$

$$Nu \equiv -\partial^2 u/\partial t^2,\ P(x) > 0$$

при граничных условиях:

$$au(t, 0) + bu'_x(t, 0) = 0,\ cu(t, \pi) + du'_x(t, \pi) = 0, \qquad (2)$$

и начальных условиях:

$$u(0, x) = \varphi(x),\ \partial u(0, x)/\partial t = \psi(x), \qquad (3)$$

где a, b, c, d — постоянные, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ — заданные функции. Задача (1)—(3) решается методом разложения по собственным функциям оператора L — главной части оператора $\mathscr{L}$, развитым З. И. Халиловым (Докл. АН СССР, 1952, 83, № 5, 637—639).

Предполагается, что функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $f(t, x)$ разложимы по собственным функциям оператора L. Задача (1)—(3) таким путем приводится к задаче Коши для определенной бесконечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, решение которой в свою очередь сводится к решению соответствующей бесконечной системы интегральных уравнений типа Вольтерра. Г. Н. Агаев

4860. **Замечания о качественных свойствах характеристик уравнения с частными производными смешанного типа. Жермен** (Remarques sur les propriétés qualitatives des caractéristiques des équations aux dérivées partielles du type mixte. Germain P.), Mém. Acad. roy. Belg. Cl. sci., 1954, 28, № 6, 28—36 (франц.)

Элементарное решение уравнения

$$k(z)\,u_{xx} + u_{zz} = 0$$

($k(z)$ — непрерывная функция, меняющая знак вместе с z) с особенностью в точке $P(0, z_0)$ определяется как оригинал Фурье (по α) функции $E = E(\alpha, z)$, удовлетворяющей уравнению

$$E_{zz} - 4\pi^2\alpha^2 k(z)\,E = \delta(z - z_0)$$

и некоторым краевым условиям.

Утверждается, что при $z_0 < 0$ элементарное решение имеет разрывы на характеристиках, выходящих из точки P, пропорциональные $[k(z)]^{-1/4}$. Рассматривается вопрос о распространении этих разрывов вдоль характеристик при отражении последних от параболической линии $z = 0$.

В качестве примера изучается элементарное решение, равное нулю при $z = z_1$ и $z = z_2$ ($z_2 < z_0 < z_2$), при различном расположении точек z_1 и z_0 относительно точки $z = 0$. Результаты приводятся без доказательств.

Опечатка на стр. 33, третья строка сверху: в одном из неравенств должно быть $z \leqslant z_0$.

Л. В. Овсянников

4861. **О некоторых смешанных задачах. Лион** (Sur certains problèmes mixtes. Lions Jacques Louis), C. r. Acad. sci., 1955, 240, № 4, 390—392 (франц.)

Пусть для каждого t $B(t, u, v)$ — билинейная форма относительно u, $v \in V$, где $P(X) \subset V \subset L_2(X)$, $P(X)$ — многообразие финитных функций в области X. Оператор $\Lambda(t)$ определяется на пространстве $N(t)$ всех функций $u \in V$ таких, что $\Lambda(t)\,u \in L_2(X)$, причем $(\Lambda(t)\,u, v) = B(t, u, v)$ для $v \in V$. При условии полуограниченности:

$$B(t, u, u) + \overline{B(t, u, u)} + A\,\|u\|^2_{L^2(X)} \geqslant a\,\|u\|^2$$

для $0 \leqslant t \leqslant B$, $u \in V$, и некоторых условиях гладкости доказана разрешимость задачи, в которой ищется решение уравнения $U'(t) + \Lambda(t)\,U(t) = F(t)$ при «граничном» условии $U(t) - H(t) \in N(t)$, где $H(t)$ — заданная функция со значениями в V, и при начальном условии $U|_{t=0} = U_0$, причем $U_0 - H(0) \in N(0)$.

Эта теорема обобщает одну теорему референта (РЖМат, 1956, 1383). Приведены некоторые приложения к смешанным краевым задачам для параболических уравнений. М. И. Вишик

4862. **Перенормированные уравнения Дирака-Максвелла. Сен** (Renormalized Dirac—Maxwell equations. Sen P.), Nuovo cimento, 1956, 4, № 2, 270—282 (англ.; рез. итал.)

См. РЖФиз, 1957, 2948.

4863 К. **Вариационное исчисление и дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка. Т. I. Теория дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. 2-е изд. Каратеодори** (Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung. Bd. 1. Theorie d. partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. 2. Aufl. Carathéodory C., Leipzig,

Teubner, 1950, XI, 171 S., 14. — DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1956, A, № 40, 2798 (нем.)

4864 Д. **Некоторые теоремы о гармонических функциях и аналогичные вопросы. Аллен** (Some theorems on harmonic functions and related topics. Allen Arthur Charles. — Doct. diss., Princeton Univ., 1952), Dissert. Abstrs, 1955, 15, № 3, 421 (англ.)

4865 Д. **Применение метода конечных разностей к построению обобщенных решений нелинейных уравнений. Введенская Н. Д.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н. Матем. ин-т АН СССР, М., 1956

ПРИЛОЖЕНИЯ К ФИЗИКЕ, ТЕХНИКЕ И ЕСТЕСТВЕННЫМ НАУКАМ

4866. **О достаточности принципа потенциальных работ для равновесия общей материальной системы. Каттанео** (Sulla «sufficienza» del principio dei lavori virtuali all' equilibrio di un generico sistema materiale. Cattaneo Carlo), Rend. mat. e applic., 1954, 14, № 1—2, 209—220 (итал.)

Рассматривается система N материальных точек (P_i, m_i), находящаяся под воздействием связей, не зависящих от времени и сил $F_i(P, V, t)$, зависящих от положения системы, от движения системы и явно от времени.

Для того чтобы система в определенном положении $\bar{P}(\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots, \bar{P}_N)$ находилась в равновесии, необходимо, как известно, чтобы выполнялось условие

$$\sum_1^N F_i(\bar{P}, 0, t) \times \delta P_i \leqslant 0. \qquad (1)$$

Рассматривается вопрос о равновесии системы при более общих предположениях о связях и активных силах и в связи с этим вопрос о пригодности условия (1).

Ю. А. Митропольский

4867. **О спектре гармонизуемых динамических систем. Грабарь М. И.**, Докл. АН СССР, 1956, 109, № 4, 687—689

Пусть $x_1, \ldots, x_r$ — циклические (mod 2π) координаты на r-мерном торе R; $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ — рационально независимые вещественные числа; F — положительная непрерывная функция на R. Дается условие, достаточное для метрического изоморфизма динамической системы

$$\frac{dx_k}{dt} = \frac{\alpha_k}{F} \quad (k = 1, \ldots, r) \qquad (1)$$

с интегральным инвариантом $\frac{1}{(2\pi)^r} \int \ldots \int F dx_1 \ldots dx_r$ канонической системе

$$\frac{dx_k}{dt} = \alpha_k \quad (k = 1, \ldots, r) \qquad (2)$$

с интегральным инвариантом $\frac{1}{(2\pi)^r} \int \ldots \int dx_1 \ldots dx_r$. Это условие заключается в сходимости ряда

$$\sum_{n \neq 0} \frac{|a(n)|^2}{(n, \alpha)^2}, \qquad (3)$$

где $n = (n_1, \ldots, n_r)$ — целочисленный вектор, $a(n)$ — соответствующий ему коэффициент Фурье функции $F - 1$, а $(n, \alpha) = n_1\alpha_1 + \ldots + n_r\alpha_r$. Если функция F аналитична, то, как известно, ряд (3) сходится для почти всех векторов $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ евклидова r-мерного пространства. Формулированная теорема является обобщением некоторых результатов А. Н. Колмогорова (РЖМат, 1954, 4411), относящихся к случаю $r = 2$.

Если ряд (3) сходится, то система (1), будучи метрически изоморфна системе (2), имеет чисто точечный спектр, и ее собственные функции обладают рядом специальных свойств. Оказывается, что если система (1) обладает хотя бы одной собственной функцией с этими свойствами, то ряд (3) сходится. В. А. Рохлин

4868. **О температурном поле в прямолинейно движущейся и изменяющейся во времени области. Фибер** (Über das Temperaturfeld in längs einer Richtung bewegten und zeitlich veränderlichen Bereichen. Fieber H.), Österr. Ingr-Arch., 1956, 10, № 2—3, 155—160 (нем.)

Из плоскости $z = 0$ в момент $t = 0$ начинается истечение материи вдоль оси z в произвольно ограниченную область пространства $z \geqslant 0$. При $z = 0$ материя имеет температуру $T_0 > T_R$, где T_R — температура окружающей среды. Требуется найти распределение температуры внутри струи материи, возникающее вследствие теплообмена на ее боковой и лобовой поверхностях. Поскольку прямое решение задачи наталкивается на значительные трудности, то избирается косвенный путь. Струя материи, представляющая собой непрерывно удлиняющееся тело SI, заменяется другим телом SII, с тем же самым поперечным сечением, что и SI, но полубесконечной длины. Температура в теле SII при $z = 0$ также равна T_0. В точке $z = vt$ (где v — скорость движения лобовой поверхности тела SI) в теле SII помещается источник, интенсивность которого подбирается таким образом, чтобы получить совпадение распределения температур в теле SII с распределением в теле SI.

Задача PI, состоящая в определении температуры T в теле SI, формулируется следующим образом. Найти функцию T, удовлетворяющую уравнению

$$T_t = a^2 \nabla^2 T - vT_z \quad (0 \leqslant z < vt) \qquad (1)$$

и условиям: при $t = 0$ $T = 0$, что можно принять, не ограничивая общность; $T = T_0$ при $z = 0$ и $\alpha T_z + \beta T = 0$ при $z = vt$. На боковой поверхности T должна удовлетворять соответственно условиям 1-го, 2-го или 3-го рода или условиям симметрии.

Задача PII, состоящая в определении температуры θ в теле SII, заключается в определении функции θ, удовлетворяющей уравнению

$$\theta_t = a^2 \nabla^2 \theta - v\theta_z + q(x_1, x_2, z)\,\delta(z - vt) \quad (0 < z < \infty), \qquad (2)$$

где δ — функция Дирака, и тем же условиям, что и в задаче PI, за исключением условия при $z = vt$. Помимо этого, от θ требуется регулярность на бесконечности. Функция $q(x_1, x_2, z)$ выбирается таким образом, чтобы выполнялось соотношение

$$\alpha\theta_z + \beta\theta = 0 \text{ при } z = vt. \qquad (3)$$

С помощью конечного преобразования Фурье:

$$(\theta, \varphi_{\lambda,\mu}) = \int\int_{\mathfrak{B}} \theta(x_1, x_2, z; t)\, \varphi(\lambda x_1, \mu x_2)\, dx_1 dx_2$$

из уравнения (2) исключаются переменные x_1 и x_2. Чтобы это было возможно, ядро $\varphi_{\lambda,\mu}$ должно удовлетворять уравнению

$$\Delta_2 \varphi_{\lambda,\mu} = S(\lambda, \mu)\, \varphi_{\lambda,\mu},$$

а на границе области $\mathfrak{B}$ тем же условиям, что и θ.

В случае разделяющихся переменных $\varphi_{\lambda,\mu}$ представимо в виде

$$\varphi_{\lambda,\mu} = \psi_\lambda(x_1)\,\chi_\mu(x_2),$$

где ψ_λ и χ_μ — соответствующие собственные функции, а λ и μ — собственные значения.

Полученная относительно функции $\vartheta = (\theta, \varphi_{\lambda,\mu})$ задача решается обычным образом с применением преобразования Лапласа и синус-преобразования в отношении переменной t. В результате обратного преобразования для θ находят выражение, в котором оно функционально зависит от неизвестной функции $Q(vt)$

$$\theta = \theta\{Q(vt)\}, \qquad (4)$$

где $Q(z) = (q, \varphi_{\lambda,\mu})$ берется при $z = vt$.

Подставив затем выражение (4) в условие (3), получают интегральное уравнение Вольтерра 1-го рода относительно функции $Q(vt)$:

$$\int_0^t Q(vt)\,K(t,\tau)\,d\tau = f(t).$$

Для его решения предлагается приближенный метод.

Рассматриваемый промежуток времени t разбивается на интервалы (t_{i-1}, t_i), на каждом из которых Q считается постоянным. Эти постоянные значения Q_i затем находятся из системы:

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i K_i^{(n)} = f_n,$$

где $K_i^{(n)} = \int_{t_{i-1}}^{t_i} K(t_n, \tau)\,d\tau$, а $f_n = f(t_n)$.

Откуда:

$$Q_n = \frac{f_n}{K_n^{(n)}} - \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{f_{n-\nu}}{K_{n-\nu}^{(n-\nu)}}\, g_\nu^{(n)},$$

где

$$g_\nu^{(n)} = \frac{K_{n-\nu}^{(n)}}{K_n^{(n)}} - \sum_{\mu=1}^{\nu-1} \frac{K_{n-\nu}^{(n-\mu)}}{K_{n-\mu}^{(n-\mu)}}\, g_\mu^{(n)}.$$

В. И. Беляев

4869. Теоретическое исследование распространения звука в слабо раскрывающемся рупоре. Экспоненциальный рупор. Хольтсмарк, Лоте, Хьётта, Румберг (A theoretical investigation of sound transmission through horns of small flare, with special emphasis on the exponential horn. Holtsmark J., Lothe J., Tjøtta S., Romberg W.), Arch. math. og naturvidensk., 1956, 53, № 1, 139—181 (англ.)

В цилиндрической системе координат (ρ, φ, z) боковая поверхность $\sum$ экспоненциального рупора задается уравнением $\rho = \rho_0 e^{\gamma z}$. Путем введения новых ортогональных координат $\theta = \frac{\rho}{\rho_0} e^{-\gamma z}$, $\xi = z + \gamma\rho^2/2$, $\varphi = \varphi'$ волновое уравнение $\Delta\Phi + k^2\Phi = 0$ для потенциала скоростей Φ приводится к виду

$$\frac{1}{\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{x}{\theta^2}\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}\right) + \frac{k^2 x}{\gamma^2\theta^2(1+x)}\Phi = 0, \qquad (1)$$

где $\zeta = \gamma\xi$, $x = \gamma^2\rho^2$.

Задача заключается в отыскании решений уравнения (1), удовлетворяющих граничному условию $\partial\Phi/\partial n\,|_\Sigma = 0$.

В первой части работы получено приближенное решение уравнения (1) в области $x = \gamma^2\rho^2 \ll 1$. При этом условии уравнение (1) приводится к виду

$$\frac{1}{\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\theta\partial\Phi/\partial\theta) + \gamma^2\rho_0^2\frac{\partial}{\partial\xi}\left(e^{2\zeta}\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}\right) + k^2\rho_0^2 e^{2\zeta}\Phi = 0, \qquad (2)$$

в котором переменные разделяются. Решение уравнения (2) имеет вид

$$\Phi = e^{i\omega t}e^{-\zeta}\left\{A_0 e^{-i\mu\zeta} + \sum_{l=1}^{\infty} A_l J_{i\mu}\left(\frac{i\Lambda_l}{\gamma\rho_0}e^{-\zeta}\right)J_0(\Lambda_l\theta)\right\},$$

где $\mu = \sqrt{k^2/\gamma^2 - 1}$ и $J_1(\Lambda_l) = 0$. Константы A_0 и A_l определяются из условий возбуждения. Тем самым решение представлено в виде основной волны и высших гармоник. Из поведения функций Бесселя мнимого индекса от мнимого аргумента (Morgan S. P., Calif. Inst. Technol., Pasadena, 1947) следует, что для каждой высшей гармоники существует «область затухания» $\zeta < \ln\left(\frac{\Lambda_l}{\gamma\rho_0\mu}\right)$, в которой амплитуда соответствующей волны экспоненциально затухает, и «область распространения» $\zeta > \ln\left(\frac{\Lambda_l}{\gamma\rho_0\mu}\right)$.

Более строгое исследование решения уравнения (1) показывает, что имеет место взаимодействие гармоник. Последовательный переход основной волны в высшие типы прослежен на численном примере.

В последней части работы намечен общий метод решения задачи о распространении звука в произвольном рупоре, представляющем поверхность вращения, образующая которой задается уравнением $y = f(z)$. Функция $f(z)$ подчиняется условиям $|f'(z)|^2 \ll 1$, $|f(z)f''(z)| \ll 1$.

Вводя новую систему координат (θ, ξ, φ) $y = \theta f(z)$, $\xi = z + \theta^2 f(\xi) f'(\varepsilon)/2$ с учетом сделанных приближений, авторы получают волновое уравнение в виде

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \theta\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left(f(\xi)^2\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\right) + k^2 f(\xi)^2\Phi\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\theta^3\left\{k^2\gamma(\xi)\Phi + \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\beta(\xi)\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\right)\right\} -$$

$$- \frac{1}{2}\alpha(\xi)\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\theta^3\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right),$$

где

$$\alpha(\xi) = f'(\xi)^2 - f(\xi)f''(\xi),$$

$$\beta(\xi) = f(\xi)^2\{3f'(\xi)^2 - f(\xi)f''(\xi)\},$$

$$\gamma(\xi) = f(\xi)^2\{3f'(\xi)^2 + f(\xi)f''(\varepsilon)\}.$$

Решение этого уравнения ищется в виде

$$\Phi = e^{i\omega t}\sum_{l=0}^{\infty} U_l(\xi)\,J_0(\Lambda_l\theta).$$

Для функций $U_l(\xi)$ получается бесконечная система обыкновенных дифференциальных уравнений, которую предлагается решать методом последовательных приближений.

А. Г. Свешников

4870. Определение двухразмерного движения жидкости по заданным значениям модуля, дивергенции и ротации ее скорости. Шуликовский В. И., Уч. зап. Казанск. ун-та, 1956, 116, № 1, 20—21

Решается обобщенная задача А. И. Некрасова (Прикл. матем. и механ., 1953, 17, № 4) об определении движения жидкости по заданной поверхности, если

даны модуль, вихрь и дивергенция вектора скорости. Вычисления выполнены в инвариантной форме. Рассмотрены два основных случая, характерные при указанных данных, причем второй случай является наиболее естественным обобщением задачи А. И. Некрасова. И. С. Аржаных

4871. О притоке жидкости в цилиндрическом пласте к перфорированной центральной скважине. Тихов М. Н., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1. М., АН СССР, 1956, 212—213

4872. О построении вариационных формул для решения задач теории упругости. Свирский И. В., Изв. Казанск. фил. АН СССР., сер. физ.-матем. и техн. н., 1956, № 10, 31—40

Строится такое видоизменение метода Галеркина, чтобы ошибки в определении аппроксимирующей функции мало влияли на вычисляемый результат.

Идея построения вариационных формул работы заключается в следующем: функционал $\Phi(u)$ вблизи своего экстремума $u = u_0$ меняется медленно, поэтому при u, близких к u_0, $\Phi(u)$ весьма близок $\Phi(u_0)$. Идея эта, восходящая еще к Релею, реализуется в статье следующим образом: пусть нужно найти функционал $\Phi(u)$ от решений нелинейных уравнений теории упругости $L[u] = X$ (граничные условия включены в это уравнение). Будем искать u в виде $u \approx c\varphi_0$ (φ_0 — известная функция, c — искомая константа). Найдем вспомогательную векторную функцию $\psi(x)$ и c из условий

$$L[c\varphi_0] = (X,\ \psi),$$

$$\delta[\lambda(L[c\varphi_0]\ \psi) - \lambda(X,\ \psi) + \Phi(c\varphi_0)] = 0$$

(скобки обозначают скалярное произведение, варьирование во второй формуле производится по $c\varphi_0$). Автор считает, что найденное из этих условий c обладает тем свойством, что значение $\Phi(c\varphi_0)$ будет мало зависеть от погрешностей в выборе φ_0 и будет близко к точному значению $\Phi(u)$.

Примечание референта. Последнее утверждение вызывает большие сомнения, поскольку строгое его доказательство, а также точная постановка задачи отсутствуют.

Из примеров, имеющихся в статье, не видно преимуществ при вычислении с помощью вариационных формул, полученных автором, перед вычислением по обычному методу Галеркина. В. М. Бабич

4873. К вопросу о построении вариационных формул задач устойчивости. Свирский И. В., Изв. Казанск. фил. АН СССР, сер. физ.-матем. и техн. н., 1956, № 10, 41—49

Статья посвящена применению идей и методов работы автора (реф. 4872) к вопросу о построении вариационных формул задач упругой устойчивости. Приведены два варианта вариационных формул при большой и при малой жесткости подкрепляющих элементов по сравнению с жесткостью тела. В. М. Бабич

4874. Об общих вариационных принципах в теории упругости и теории пластичности. Ху Хай-Чжан (論彈性體力學與受範性體力學中 的一般變分原理。胡海昌), 物理學報, Ули сюэбао, 1954, 10, № 3, 259—290 (кит.; рез. англ.) См. РЖМех, 1957, 2210.

4875. Вопросы общей теории упругой устойчивости. Болотин В. В., Прикл. матем. и механика, 1956, 20, № 5, 561—577

Исследуется устойчивость заданной формы равновесия упругого тела, причем заранее не делается никаких предположений об анизотропии и неоднородности. Уравнения берутся в ковариантной форме.

$$\nabla_k\left[\left(g^i_j + \nabla_j u^i\right)\sigma^{jk}\right] + X^i = 0,$$

$$\sigma^{jk} = \partial\Phi/\partial\varepsilon_{jk},\quad \varepsilon_{jk} = [\nabla_j u_k + \nabla_k u_j + \nabla_j u^i \nabla_k u_i]/2$$

(координаты x^i — лагранжевы переменные). Переход к смежному состоянию характеризуется «малыми» добавками к первоначальным величинам:

$$\sigma^{jk} + \bar{\sigma}^{jk},\ u^i + \bar{u}^i,\ X^i + \overline{X}^i,\ p^i + \overline{p}^i.$$

(p^i — поверхностная сила). Малость добавок, отмеченных черточками, характеризуется тем, что отбрасываются все квадратичные члены, возникающие при подстановке в уравнения равновесия. В результате возникает система линейных уравнений второго порядка для определения функций $\bar{u}^i$ при граничных условиях, соответствующих второй краевой задаче теории упругости. Предполагая, что для системы линейных уравнений эллиптического типа

$$\nabla_k\left(c^{ik}_{jl}\nabla^l\bar{u}^l\right) + \tilde{X}^i = 0$$

построены фундаментальные решения, а затем и тензор Грина, соответствующий второй задаче, автор, учитывая структуру $\tilde{X}^i$, строит интегральные уравнения для ковариантных производных вектора $\bar{u}^i$. При этом делается существенное для дальнейшего предположение, что смешанные вторые производные функции Грина (по координатам ауфпункта и точки интегрирования) дают ядро интегрального уравнения типа Фредгольма. Наконец, делается характерное для рассматриваемых вопросов предположение, что исходное состояние равновесия мало отличается от недеформированного состояния, а учет сил, выводящих систему из ее первоначального состояния, осуществляется с помощью равенства

$$\sigma^{\gamma\beta} = -\mu s^{\gamma\beta},$$

где $s^{\gamma\beta}$ — тензор, характеризующий вид исходного напряженного состояния. В результате получена следующая система интегральных уравнений:

$$\nabla_k\bar{u}^i(P) = \mu\int_V s^{\gamma\beta}(Q)\,\nabla_k\nabla_\beta G^i_\alpha(P,\ Q)\cdot\nabla_\gamma\bar{u}^\alpha(Q)\,dV_Q,$$

которая затем несколько упрощается за счет перехода к главным осям тензора $s^{\gamma\beta}$. На основании общих теорем об однородных интегральных уравнениях Фредгольма делается вывод о счетном множестве характеристических чисел μ, о положительности их в случае $s^{(\alpha)} \geqq 0$ (сжимающие главные напряжения) и существовании отрицательных μ в случае, когда $s^{(\alpha)}$ принимают и отрицательные значения. Рассмотрены примеры (стержневая система, арка, пластинки и оболочки).

Отдельно рассмотрен случай «следящий» нагрузки (система сил, действие которых исследуется на устойчивость, в процессе деформации изменяет свое направление так, что после деформации поверхностная сила будет $p^i + p^j\nabla_j\bar{u}^i$ и аналогично массовая). В этом случае получаются интегральные уравнения для вторых производных вектора смещения. Отмечается следующее свойство: пусть векторы поверхностной и объемной нагрузки поворачиваются вместе с векторами лагранжевого базиса; если во всех точках внутри тела и на его поверхности выполняются условия

$$u_\alpha X^\gamma\Delta_\gamma u^\alpha = 0 \text{ (внутри объема } V),$$

$$u_\alpha p^\gamma\Delta_\gamma u^\alpha = 0 \text{ (на граничной поверхности } S),$$

то поворот нагрузки не влияет на величину критических параметров и задача упругой устойчивости имеет только вещественные собственные значения. Случай следящей нагрузки, как отмечает автор,

является частным случаем более общей линейной зависимости между возмущениями внешних сил и возмущениями перемещений (указаны примеры).

В заключение обсуждается вопрос о сведении задачи вычисления характеристических чисел к задаче решения бесконечной однородной системы линейных уравнений, возникающей в результате подстановки

$$\bar{u}^k(P) = \sum_{m=1}^{\infty} q_m \varphi_m^k(P),$$

где φ_m^k — фундаментальные векторы свободных колебаний. И. С. Аржаных

4876. **Связь условий Адамара для упругой устойчивости с теоремами единственности. Эриксен, Тупен** (Implications of Hadamard's conditions for elastic stability with respect to uniqueness theorems. Ericksen J. L., Toupin R. A.), Canad. J. Math., 1956, 8, № 3, 432—436 (англ.)

Обсуждаются результаты Адамара о связи проблемы устойчивости равновесия упругого тела с теоремами единственности решений краевых задач (Hadamard J., Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique, Paris, 1903). Отмечается также важность вопроса в связи со структурой упругого потенциала для конечных деформаций.

Пусть на конечную деформацию наложено малое возмущение (малость возмущений понимается в том смысле, что после подстановки вектора смещения в уравнения равновесия можно пренебречь нелинейными членами относительно возмущений). Если при нулевых значениях возмущений на границе следует нулевое значение внутри области, то решение первой краевой задачи единственно. Доказано, что устойчивость первоначальной формы равновесия эквивалентна теореме единственности. Для второй задачи (когда заданы напряжения на границе) теорема единственности (с точностью до жесткого смещения) не следует из устойчивости первоначальной формы равновесия. Метод исследования основан на изучении второй вариации упругой энергии. И. С. Аржаных

4877. **Продольные колебания составного стержня. Водичка** (Longitudinal vibrations of a composite bar. Vodička Václav), Z. angew. Math. und Pnys., 1956, 7, № 4, 345—349 (англ.; рез. нем.)

Стержень длины $l = l_1 + l_2 + \ldots + l_n$ и постоянного поперечного сечения составлен из n частей l_k. Модуль Юнга на l_k равен E_k, плотность — ρ_k.

Задача о продольных колебаниях такого стержня сводится к решению системы одномерных волновых уравнений, связанных при $x = l_1 + \ldots + l_k$ условиями сопряжения. Начальные данные берутся нулевыми, при $x = 0$ смещение полагают равным нулю, при $x = l_1 + l_2 + \ldots + l_n$ производная от смещения по x задается равной $c = \text{const}$.

Применением преобразования Лапласа задача сводится к решению алгебраической системы линейных уравнений. При $E_k\rho_k = \text{const}$ решение этой системы удается построить в явном виде, откуда уже без труда находится смещение на каждом участке в виде ряда типа Фурье. В. М. Бабич

4878. **Характеристические направления некоторых уравнений пластичности. Эриксен** (Characteristic directions of certain equations of plasticity. Ericksen J. L.), Mathematika, 1956, 3, № 5, 56—62 (англ.)

Решение плоских задач теории пластичности значительно облегчается наличием вещественных характеристик, которые имеют также определенный физический смысл (линии скольжения). Для трехмерных задач в современных теориях пластичности невозможно столь же эффективное использование характеристик, так как или характеристики не совпадают с поверхностями скольжения, или их вообще не существует. Ставится вопрос о построении таких зависимостей тензора напряжений от тензора скоростей деформации, для которых характеристические поверхности всегда существуют. Решение вопроса ищется при гипотезе, что для любой положительной постоянной α и для любого осуществимого движения

$$f_{ij}(\alpha d_{km}) = f_{ij}(d_{km}),$$

(f_{ij} — тензор напряжений, d_{km} — тензор скоростей деформации). Полагая

$$\alpha = (d_{ij}d_{ij})^{-1/2},$$

автор представляет искомую зависимость в виде

$$f_{ij} = F_1(\omega)\, e_{ij} + F_2(\omega)\, e_{ik}e_{kj},$$

$$e_{ij} = (d_{km}d_{km})^{-1/2}\, d_{ij},$$

$$\omega = 3\sqrt{6}\det e_{ij}.$$

Функции F_1 и F_2 должны определяться из условия вещественности характеристик и приемлемых физических соображений. Изучение вопроса о главных осях тензора e_{ij} позволяет установить неравенство $-1 \leqq \omega \leqq 1$, а после анализа уравнений характеристик находится необходимое и достаточное условие вещественности характеристик для крайних значений $\omega = \pm 1$:

$$F_1(\pm 1) \mp 2F_2(\pm 1)/\sqrt{6} = 0.$$

Библ. 15 назв. И. С. Аржаных

4879. **Наведенные потенциалы. Биркгофф** (Induced potentials. Birkhoff Garrett), Studies Math. and Mech. New York, Acad. Press, Inc., 1954, 88—96 (англ.)

Обсуждаются некоторые проблемы теории потенциала и ставятся задачи, исследование которых, по мнению автора, было бы весьма желательным.

Пусть $u(\mathbf{x})$ — решение уравнения $\operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} u) = 0$ при асимптотическом поведении $u(\mathbf{x}) \sim \mathbf{qx}$, $|\mathbf{x}| \to \infty$ (однородное поле на бесконечности). Поле $\mathbf{a} = \sigma\nabla u - \mathbf{q}$ называется «поляризационным полем». Для него указываются различные физические интерпретации. Кратко обсуждаются: 1) задачи для $u(\mathbf{x})$, допускающие точное решение, а именно случай постоянного σ на конфокальных эллипсоидах; 2) вариационные принципы для «поляризационного поля» $\mathbf{a}$ (в частности, доказана теорема: поле $\mathbf{a}$ максимизирует интеграл

$$\left(\frac{1}{\sigma}\mathbf{a}, \mathbf{a}\right) = \int \frac{1}{\sigma}\mathbf{a}\mathbf{a}dR$$

относительно полей $\mathbf{w}$ ($\operatorname{div}\mathbf{w} = 0$), удовлетворяющих соотношению

$$\int \frac{1}{\sigma}\mathbf{w}\mathbf{w}dR = \int\left(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\sigma_0}\right)\mathbf{q}\mathbf{w}dR,$$

$$\sigma_0 = \lim \sigma, \quad R \to \infty,$$

3) возможные тензорные описания «поляризационного поля», 4) возможные интегральные уравнения для поля $\mathbf{a}$. Ю. Н. Днестровский

4880. **Заметка о двумерной теории анизотропных диэлектриков. Коллинс** (Note on the two-dimensional theory of anisotropic dielectrics. Collins W. D.), Mathematika, 1956, 3, № 5, 63—68 (англ.)

Рассматривается задача о нахождении электростатического поля в двумерных анизотропных диэлектриках. Строятся выражения для комплексного потенциала поля $\varphi(z, \bar{z})$, как решения уравнения

$$s\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+2t\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial\bar{z}}+\bar{s}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\bar{z}^2}=0\quad\left(\begin{matrix}z=x+iy\\ \bar{z}=x-iy\end{matrix}\right),$$

где $s=k_{11}-k_{22}+2ik_{12}$, $t=k_{11}+k_{12}$, k_{ij} — компоненты тензора диэлектрической проницаемости k. Граничные условия записываются через построенные комплексные потенциалы. В качестве примеров решаются задачи об эллиптическом цилиндре в однородном поле, о диэлектрическом полупространстве с внешними источниками поля и о круглом диэлектрическом цилиндре в поле линейного заряда.

Ю. Н. Днестровский

4881. **Заметка о проблеме заряженного диска.** **А ш у р** (Note on the problem of the electrified disc. A s h o u r A. A.), Proc. Edinburgh Math. Soc., 1956, **10**, № 3, 123—124 (англ.)

Методом разделения переменных в сплюснутых сфероидальных координатах решается задача об электростатическом поле бесконечно тонкого круглого проводящего диска. Каких-либо новых математических результатов не получено. Ю. Н. Днестровский

4882. **Использование вариационных методов в задачах об электромагнитном рассеянии.** **К о д и с** (An introduction to variational methods in electromagnetic scattering. K o d i s R a l p h D.), J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1954, 2, № 2, 89—112 (англ.)

Для уравнений Максвелла $\operatorname{rot}\mathbf{E}=i\omega\mu\mathbf{H}$, $\operatorname{rot}\mathbf{H}=-i\omega\mathbf{E}+\mathbf{J}$ строится тензор Грина $\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$. Показано, что $\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\equiv\left(I+\frac{1}{k^2}\nabla\nabla\right)\frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$, где I — единичный тензор, $\nabla\nabla$ — тензор с компонентами $\partial/\partial x_i$, $\partial/\partial x_j$. Тензор Грина $\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ обладает свойствами симметрии $\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}')=[\Gamma(\mathbf{r}', \mathbf{r})]^T$, где $[\Gamma]^T$ — транспонированный тензор.

Если задано распределение токов $\mathbf{J}$, то электрическое поле $\mathbf{E}$ находится с помощью тензора $\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ обычным образом

$$\mathbf{E}(\mathbf{r})=i\omega\mu\int_V\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\,\mathbf{J}(\mathbf{r}')\,dV'.$$

Далее рассматриваются задачи дифракции. Аналогично условию излучения Зоммерфельда для скалярных волн вводится условие излучения для векторных рассеянных волн $\mathbf{E}^{\text{расс}}$

$$\lim_{R\to\infty}\left\{[\mathbf{R},\ \operatorname{rot}\mathbf{E}^{\text{расс}}]-ik\mathbf{E}_t^{\text{расс}}\right\}\mathbf{R}=0,$$

где $\mathbf{E}_t^{\text{расс}}$ — поперечная к $\mathbf{R}$ компонента поля $\mathbf{E}^{\text{расс}}$. С помощью векторных аналогов формул Грина строится интегральное уравнение для задачи о дифракции падающей волны $\mathbf{H}^{\text{пад}}$, $\mathbf{E}^{\text{пад}}$ на идеально-проводящей ограниченной поверхности S:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r})=\mathbf{H}^{\text{пад}}(\mathbf{r})+\int_S K(\mathbf{r}')\operatorname{rot}'\Gamma(\mathbf{r},\ \mathbf{r}')\,dS',\qquad(1)$$

где $\mathbf{H}(\mathbf{r})=\mathbf{H}^{\text{расс}}+\mathbf{H}^{\text{пад}}$; $K(\mathbf{r}')=[\mathbf{H}(\mathbf{r}'), \mathbf{n}']$.

С помощью уравнения (1) рассматривается приближение Кирхгофа для задачи о дифракции. Далее строятся вариационные функционалы для амплитуд рассеянного поля в дальней зоне и для сечения рассеяния. Показано, как строить такие функционалы для случая нескольких рассеивающих тел. В качестве примера рассматривается задача о дифракции плоской волны на двух идеально-проводящих цилиндрах разного диаметра. Ю. Н. Днестровский

4883. **Приближенный метод расчета слабо нерегулярного волновода.** **С в е ш н и к о в А. Г.**, Докл. АН СССР, 1956, **110**, № 2, 197—199

Рассматривается задача о распространении радиоволн в идеально проводящем волноводе. Боковая поверхность волновода образована плоским замкнутым гладким контуром, перемещающимся определенным образом вдоль некоторой гладкой кривой с кривизной $\varkappa(s)$ и кручением $\nu(s)$. Максимальный диаметр области $D\ll 1/\varepsilon_0$, где $\varepsilon_0=\max\{\varkappa(s), \nu(s)\}$.

Приближенное решение системы уравнений Максвелла ищется в виде:

$$E=E_0+\varepsilon_0E'+\ldots\quad H=H_0+\varepsilon_0H'+\ldots,$$

где $\{E_0H_0\}$ — поле в эквивалентном идеальном цилиндрическом волноводе. Нахождение поля $\{E'H'\}$ сводится к решению неоднородной системы уравнений Максвелла для цилиндрической системы координат при заданном значении касательной составляющей напряженности электрического поля на границе волновода и «условий излучения» на бесконечности. Последняя задача решена ранее. К. А. Барсуков

4884. **Некоторые соображения об уравнениях электродинамики в равномерно движущихся средах.** **Ц е у л и** (Alcune considerazioni sulle equazioni dell. elettrodinamica nei corpi in moto traslatorio uniforme. Z e u l i T i n o), Boll. Unione mat. ital., 1956, **11**, № 2, 189—199 (итал.)

В предыдущей работе автора (Rend. Seminar mat. Univ. e Politecnico Torino, 1954, **17**, 35) были установлены уравнения, которым удовлетворяют компоненты электромагнитного поля в равномерно движущейся среде, когда плотность электрических зарядов ρ и ρ' в системах координат, относительно которых среда движется или покоится, равны нулю. В настоящей работе результаты обобщаются на случай $\rho\neq 0$, $\rho'\neq 0$. Метод исследования заключается в сведении уравнений Максвелла-Минковского к уравнениям для каждого из векторов $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{H}$ исключением из уравнений трех других векторов. Это исключение проводится в векторном виде с помощью тождеств векторной алгебры и анализа. Для вектора $\mathbf{B}$ получается уравнение

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2}-\Delta\mathbf{B}+\frac{\varepsilon\mu-1}{c^2(1-\beta^2)}\left(\frac{\partial}{\partial t}+v\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\mathbf{B}+$$

$$+\frac{\sigma\mu}{c^2\sqrt{1-\beta^2}}\left(\frac{\partial}{\partial t}+v\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathbf{B}=\frac{1}{c\varepsilon\sqrt{1-\beta^2}}[\operatorname{grad}\rho'\mathbf{v}].$$

Уравнения для векторов $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{D}$ отличаются от написанного только правыми частями. Векторы $\varepsilon\mathbf{B}-\mathbf{H}$ и $\mathbf{D}-\varepsilon\mathbf{E}$ удовлетворяют однородным уравнениям. Для плотности электрических зарядов уравнение имеет вид

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t}+\operatorname{grad}\rho'\mathbf{v}+\frac{\sigma}{\varepsilon}\sqrt{1-\beta^2}\,\rho'=0.$$

Интеграл этого уравнения показывает, что плотность в системе координат, связанной с телом, является волной с экспоненциально убывающим во времени значением плотности.

Полученные результаты содержат в качестве частного случая прежние результаты самого автора и других исследователей. П. П. Бирюлин

4885. **Дифракция во времени.** **К о с т а - д е - Б е р а р** (Difraccion en el tiempo. C o s t a d e B e a u

r e g a r d O.), Rev. mexicana fis., 1954, 3, № 4, 185—200 (исп.), 201—216 (англ.)

Излагаются общие положения метода решения нестационарных диффракционных задач, предложенного независимо автором и М. Мошинским.

Автор развивает ковариантную теорию преобразования Фурье, используя идеи Рисса и отчасти Швингера. В работе приведено ковариантное обобщение неравенства Парсеваля, полученное автором в предшествующих работах, и простроено четырехмерносимметричное обобщение задачи Коши для двух основных типов волновых уравнений квантовой теории поля (Дирака и Кеммера).

Формальное решение, полученное автором, имеет вид:

$$\psi(x) = \int_\sigma S^\lambda(x - x')\,\psi(x')\,d\sigma_\lambda,$$

$$S^\lambda(x) = \begin{cases} (\gamma^\mu\partial_\mu - k_0)\,\gamma^\lambda D(x), \\ (\partial^\lambda + \partial_\mu(\beta^\mu\beta^\lambda - \beta^\lambda\beta^\mu) - k_0\beta^\lambda)\,D(x) \end{cases}$$

для уравнения фармионного и бозонного поля ($D(x)$-гриниан уравнения Клейна). Ковариантная формулировка теории диффракции приводит к появлению состояний с отрицательной энергией. Рассматривая их физическое истолкование, автор указывает, что они появляются благодаря рассеянию частиц назад во времени и могут быть истолкованы совершенно так же, как и в теории Фейнмана.

А. А. Бергардт

4886. Об определении оператора момента количества движения в квантовой механике. А н д ж е л и ч (О одређивању оператора момента количине кретања у квантној механици. Анђелић Т. П.), Билтен Друшт. матем. и физ. Нар. Реп. Македонија, 1955, 6, 30—34 (сербо-хорв.; рез. англ.)

Квадрат оператора момента количества движения $M = -\frac{h^2}{4\pi^2}\Lambda/4\pi^2$, где $\Lambda = (\mathbf{r}\times\nabla)(\mathbf{r}\times\nabla)$, может быть легко преобразован к следующему виду:

$$\Lambda = r^2\nabla - (\mathbf{r}\nabla)^2 - \mathbf{r}\nabla.$$

Однако это выражение не справедливо в общем случае криволинейных координат. Используя контравариантные координаты вектора r^i, можно получить для этого оператора выражение, которое будет справедливо для любой системы координат:

$$\Lambda = \delta^{jk}_{pq} g_{mj} r^m \frac{D}{Dx^k}\left(r^p g^{qi}\frac{D}{Dx^i}\right).$$

Здесь g_{ij} — фундаментальный метрический тензор евклидова трехмерного пространства, D/Dx^i — ковариантные производные по обобщенным координатам x^i и δ^{jk}_{pq} — кронекеровский символ четвертого порядка.

Е. С. Алексеев

4887 К. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М у с х е л и ш в и л и (Citeva probleme fundamentale ale teoriei matematice a elasticităţii. M u s h e l i s v i l i N. I. Acad. R. P. R. Inst. studii rom. — sov., Bucuresti, 1956, vol. 2. p. 338—711, il., 15 lei. — Litogr. vol. 3. p. 712—892, il., 15 lei. — Litogr.), Bul. bibliogr., 1956, А, № 17, 638 (рум.)

4888 К. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Б о г о л ю б о в Н. Н., М и т р о п о л ь с к и й Ю. А., Гостехиздат, 1955, 448 стр. с черт. 13 р. 40 к.

Книга посвящена вопросам асимптотики решений нелинейных дифференциальных уравнений, встречающихся в теории колебаний. Книга состоит из введения и пяти глав. Введение знакомит читателя с кругом проблем теории нелинейных колебаний. Здесь выводится ряд уравнений, соответствующих некоторым конкретным физическим задачам, рассматриваются основные методы исследования решений.

Первая глава посвящена изучению колебаний в системах, близких к линейным. В ней изучаются стационарные и нестационарные решения уравнений общего вида

$$d^2x/dt^2 + \omega^2 x = \varepsilon f(x,\ dx/dt),\ |\varepsilon| \ll 1,$$

и рассматриваются важнейшие частные случаи подобных уравнений. Для построения асимптотических формул применяется известный метод Н. М. Крылова — Н. Н. Боголюбова (метод усреднения).

Во второй главе рассматривается метод фазовой плоскости и изучаются релаксационные колебания. Здесь также изложен метод большого параметра А. А. Дородницина для уравнения Ван-дер-Поля.

В третьей главе изучаются колебания в системах, находящихся под воздействием внешних периодических сил, описываемые уравнениями вида

$$d^2x/dt^2 + \omega^2 x = \varepsilon f(\nu t,\ x,\ dx/dt),$$

где f — периодическая функция аргумента νt с периодом 2π. Подробно изучены нерезонансный случай, когда $\omega \neq p\nu/q$ (p и q — целые числа), резонансный случай, когда $\omega^2 - (p\nu/q)^2 \sim \varepsilon$, и общий случай, когда ω и ν не связаны каким-либо определенным соотношением. В связи с этой задачей рассмотрены некоторые важные конкретные примеры (воздействие синусоидальной силы на нелинейный вибратор и т. п.).

В этой же главе содержится важнейшее обобщение упомянутых результатов и методов на уравнения, содержащие «медленное время» $\tau = \varepsilon t$. С некоторыми изменениями и добавлениями результаты переносятся на уравнения вида

$$\frac{d}{dt}\left[m(\tau)\frac{dx}{dt}\right] + k(\tau)\,x = \varepsilon F\left(\tau,\ \varepsilon,\ \theta,\ x,\ \frac{dx}{dt}\right),$$

где F — периодическая функция аргумента θ с периодом 2π, а $d\theta/dt = \nu(\tau)$, где ν — мгновенная частота внешней силы.

В четвертой главе подробно излагается метод усреднения. В первую очередь рассматривается процесс получения первого и высших приближений для решений так называемых систем в стандартной форме вида

$$dx/dt = \varepsilon X(t,\ x),$$

где x — совокупность $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$, $X(t,\ x) = \sum_\nu e^{i\nu t}X_\nu(x)$. В этой же главе рассмотрено применение метода усреднения к так называемым системам с быстро вращающейся фазой вида

$$dx_k/dt = X_k(a,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_r),\quad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ r,$$

$$da/dt = \lambda\omega(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_r) + A(a,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_r)$$

где λ — большой параметр. В качестве конкретного примера такой системы рассматриваются уравнения движения заряженной частицы

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{e\mathbf{E}}{m} + \frac{e}{mc}[\mathbf{vH}],$$

когда поле $\mathbf{H}$ мало изменяется на длине радиуса ларморовской окружности.

Первые четыре главы требуют от читателя математической подготовки в объеме программы втуза.

Пятая глава, рассчитанная на специалистов-математиков, посвящена обоснованию асимптотических методов. Здесь доказываются теоремы усреднения и рассматриваются вопросы существования и устойчивости периодических и почти периодических решений.

В. М. Волосов

4889 Д. **О некоторых приложениях метода отражений к системе уравнений теории упругости.** И г н а т ь е в М. А. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н. Львовск. ун-т, Львов, 1956

См. также: 4534, 4538, 4949, 4966, 5082, 5117, 5164—5168, 5170—5177.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

4890. **Решение одного класса интегральных уравнений.** Л а т т а (The solution of a class of integral equations. L a t t a G. E.), J. Rational Mech. and Analysis, 1956, 5, № 5, 821—834 (англ.)

Пусть функция $K(u)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению $uLK + MK = 0$, в котором L и M — дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. Рассматривается интегральное уравнение

$$\Gamma f = \int_a^b K(x-t)\, f(t)\, dt = r(x). \qquad (1)$$

Устанавливается тождество

$$L(\Gamma(xf)) = M(\Gamma f) + xL(\Gamma f),$$

позволяющее в некоторых частных случаях строить в конечном виде решения уравнения (1), если его правая часть удовлетворяет уравнению $L(r) = 0$. В качестве примеров рассмотрены ядра $K(u) = \ln|u|$ и $K(u) = K_0(u)$; K_0 — функция Бесселя мнимого аргумента.

Примечание референта. В случае $K(u) = \ln|u|$ решение легко получается сведением уравнения (1) к сингулярному интегральному уравнению.

С. Г. Михлин

4891. **О сингулярном интегральном операторе с разрывными коэффициентами.** К а р ц и в а д з е И. Н., Докл. АН СССР, 1956, 109, № 3, 450—452

Пусть C — единичная окружность, $\alpha(t) \in L_{p_1}(C)$, $\beta(t) \in L_{p_1}(C)$, $p_1 > 1$. Оператор

$$S\varphi = \alpha(t)\varphi(t) + \beta(t)\, Q(\varphi) = \alpha(t)\beta(t) + \frac{\beta(t)}{\pi i}\int \frac{\varphi(\sigma)\, d\sigma}{\sigma - t}$$

отображает пространство $L_p(C)$ в $L_{p_2}(C)$, где $p \geqslant p_1/(p_1 - 1)$ и $p_2 = pp_1/(p + p_1)$; этот оператор ограничен, причем $\| S \| \leqslant \| \alpha \|_{p_1} + \| \beta \|_{p_1} \| Q \|_p$.

Доказывается, что при выполнении обычного условия $|\alpha(t) \pm \beta(t)| \geqslant m$, где $m = \text{const} > 0$, для оператора S могут не иметь места известные теоремы Нетера; в частности, индекс этого уравнения может быть бесконечным, а самый оператор может не быть нормально разрешимым.

С. Г. Михлин

4892. **Особые интегральные уравнения типа свертки.** Г а х о в Ф. Д., Ч е р с к и й Ю. И., Изв. АН СССР, сер. матем., 1956, 20, № 1, 33—52

Работа представляет собой продолжение исследований авторов (РЖМат, 1954, 5618; РЖМат, 1956, 6624).

Рассматривается интегральное уравнение

$$\varphi(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty K_1(x-t)\varphi(t)\, dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^0 K_2(x-t)\times$$
$$\times \varphi(t)\, dt = f(x) \quad (-\infty < x < \infty) \qquad (1)$$

при условии, что ядра $K_j(x)$ $(j = 1, 2)$ обладают следующими свойствами: $K_j(x)\, e^{-yx} \in L(-\infty, \infty)$, $a_j \leqslant y \leqslant b_j$ $(j = 1, 2)$. Предполагается, что правая часть $f(x)$ уравнения (1) при $b_1 \geqslant a_2$ такова, что

$$f_+(x)\, e^{-yx} \in L^2(-\infty, \infty),\ (y \geqslant b_1) \text{ и } f_-(x) \times$$
$$\times e^{-yx} \in L^2(-\infty, \infty),\ (y \geqslant a_2), \qquad (2)$$

где $f_+(x) = f(x)$ при $x \geqslant 0$, $f_+(x) = 0$ при $x < 0$ и $f_-(x) = f(x) - f_+(x)$. Если $b_1 < a_2$, то условия (2) заменяются следующими:

$$f_+(x)\, e^{-yx} \in L^2(-\infty, \infty) \quad (y \geqslant a_2) \quad \text{и} \quad f_-(x)\, e^{-yx} \in$$
$$\in L^2(-\infty, \infty)\ (y \leqslant b_1).$$

Решение $\varphi(x)$ уравнения (1) ищется в классе функций, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\varphi_+(x)\, e^{-yx} \in L^2(-\infty, \infty)\ (y \geqslant b_1) \text{ и}$$
$$\varphi_-(x)\, e^{-yx} \in L^2(-\infty, \infty) \quad (y \leqslant a_2).$$

Путем сведения уравнения (1) к специальной задаче Римана-Гильберта и решения последней, устанавливаются следующие предположения.

1. Пусть $b_1 > a_2$ и пусть функции $1 + K_1(x + ib_1)$ и $1 + K_2(x + ia_2)$, где $K_1(x + ib_1)$ и $K_2(x + ia_2)$ — преобразования Фурье соответственно функций $K_1(x)\, e^{b_1 x}$ и $K_2(x)\, e^{a_2 x}$, удовлетворяют неравенству Гёльдера и нигде не обращаются в нуль.

Тогда при $\varkappa > 0$, где $\varkappa = \text{ind}\,[1 + K_2(x + ia_2)] - \text{ind}\,[1 + K_1(x + ib_1)]$ уравнение (1) имеет точно $\varkappa$ линейно независимых решений, при $\varkappa = 0$ уравнение (1) имеет единственное решение и при $\varkappa < 0$ уравнение (1) разрешимо тогда и только тогда, когда функция $f(x)$ удовлетворяет $-\varkappa$ условиям; если эти условия выполняются, то уравнение (1) имеет единственное решение.

2. В общем случае, когда $a_2 < b_1$, функции $1 + K_1(x + ia_2)$, $1 + K_2(x + ib_1)$ удовлетворяют неравенству Гёльдера и не обращаются в нуль, вопрос о решении уравнения (1) остается открытым. При некоторых дополнительных ограничениях исследование этого случая доводится до конца.

3. Случай $a_2 = b_1$ легко сводится к уже изученному в работе (РЖМат, 1954, 5618).

Аналогичные результаты устанавливаются для парного интегрального уравнения

$$\begin{cases} \varphi(x) + \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} K_1(x-t)\varphi(t)\, dt = f(x)\ (0 < x < \infty), \\ \varphi(x) + \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} K_2(x-t)\varphi(t)\, dt = f(x)\ (-\infty < x < 0). \end{cases}$$

И. И. Гохберг

4893. **Аналитические решения интегральных уравнений, с ковариантным мезонным ядром. Мак-Карти** (Analytical solution of the covariant meson nucleon integral equation. McCarthy I. E.), Nuovo cimento, 1956, 4, № 5, 991—1008 (англ.; рез. итал.)

См. также: 4809, 4859, 4952, 5178—5180.

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

4894. **Квадратичные функционалы с особенностью в граничной точке. Лейтон, Мартин** (Quadratic functionals with a singular end point. Leighton Walter, Martin Allan D.), Trans. Amer. Math. Soc., 1955, 78, № 1, 98—128 (англ.)

Авторы до некоторой степени завершают исследования о квадратичных функционалах с особенностями, начатые Морсом и Лейтоном (Morse M., Leighton W., Trans. Amer. Math. Soc., 1936, 40, 252—286; Leighton W., Trans. Amer. Math. Soc., 1949, 67, 253—274). Здесь рассматривается функционал вида

$$J(y)\Big|_e^b = \int_e^b [r(x)\,y'^2(x) - p(x)\,y^2(x)]\,dx \quad (0<e<b<d),$$

где $r(x)$ и $p(x)$ — непрерывные функции действительного переменного x на $(0, d)$. Точка $x=0$ для функционала является особой. Интеграл понимается в смысле Лебега. F-допустимыми кривыми $y=y(x)$ на $[0, b]$ называются такие кривые, для которых: 1) $y(x)$ непрерывна на $(0, b]$ и $y(b)=0$, 2) $y(x)$ абсолютно непрерывна и y'^2 интегрируема по Лебегу на любом замкнутом подинтервале интервала $(0, b]$. Кривые называются F'-допустимыми на $[0, b]$, если они F-допустимы и, кроме того, $y(x)$ ограничена на $[0, b]$. Кривые называются A-допустимыми на $[0, b]$, если они F'-допустимы, $y(x)$ непрерывна на $[0, b]$ и $y(0)=0$. Задача заключается в нахождении необходимых и достаточных условий для того, чтобы для всех X-допустимых кривых $y=y(x)$ (X обозначает один из символов F, F', A) на $[0, b]$ удовлетворялось соотношение

$$\lim_{x\to 0} J(y)\Big|_x^b \geqslant 0.$$

Если функционал $J(y)$ обладает указанным свойством для X-допустимых кривых, то говорят, что он имеет X-предельный минимум.

Сначала приводятся некоторые сведения, касающиеся регулярных функционалов, и показывается, что теория регулярных функционалов входит в общую теорию функционалов с особенностями. Даются определения сопряженной и фокальной точек для функционалов с особенностями и некоторые другие понятия.

Необходимые условия для рассматриваемой задачи выражаются теоремой:

1. Для того чтобы функционал J имел A-предельный минимум на $[0, b]$, необходимо, чтобы для любой F'-допустимой кривой $y=z(x)$ удовлетворялось соотношение

$$\lim_{x\to 0} J(z)\Big|_x^b > -\infty.$$

Для задачи с подвижным концом доказаны следующие теоремы:

2. Если сегмент $[0, b]$ дает предельный минимум функционала J в классе F-допустимых кривых, то $[0, b)$ не может содержать фокальных точек прямой $x=0$.

3. Если $[0, b)$ не содержит фокальных точек прямой $x=0$, то $[0, b]$ реализует предельный минимум функционала J в классе F-допустимых кривых.

Для задачи с закрепленным концом доказана теорема:

4. Если $[0, b)$ не содержит сопряженных точек с точкой $x=0$ и если

$$\int_x^b p(x)\,dx = O(1) \quad (0<x\leqslant b),$$

то сегмент $[0, b]$ реализует A-предельный минимум функционала J.

Доказывается много аналогичных теорем. Приводятся примеры. М. К. Керимов

4895. **О функционале с особенностью. Мартин** (A regular singular functional. Martin A. D.), Canad. J. Math., 1956, 8, № 1, 53—68 (англ.)

Функция $y(x)$ называется F_t-допустимой на $[a, b]$, если $y(x)$ абсолютно непрерывна, y'^2 интегрируема по Лебегу на $[a, b]$ и $y(a)=t$.

Класс F_t-допустимых на $[a, b]$ функций обозначается через $F_t[a, b]$.

Рассматривается квадратичный функционал

$$J(y)\Big|_a^b = \int_a^b [r(x)\,y'^2 + 2q(x)\,yy' + p(x)\,y^2]\,dx, \quad (1)$$

где интеграл понимается в смысле Лебега, функции r, p, q определены и измеримы на $(-\infty, \infty)$, r, q ограничены на любом конечном куске интервала $(-\infty, \infty)$, а p интегрируема по Лебегу на любом конечном интервале. С функционалом (1) связывается уравнение Риккати

$$z' - \frac{(z+q(x))^2}{r(x)} + p(x) = 0.$$

Если r, p, q непрерывны на $(-\infty, \infty)$ и $r(x)>0$, то любое решение уравнения Эйлера, соответствующего (1), имеет непрерывную производную на $(-\infty, \infty)$; тогда соответствующее уравнение Риккати тоже имеет решение с непрерывной производной на (a, b). Кроме того, для всех $y(x)$ из $F_1[t, b]$ и всех $t\in(a, b)$ величина $\min_y J(y)\Big|_t^b$ имеет конечное значение. Если снять ограничение $r(x)\neq 0$, то функционал J приобретает особенность, его минимум может не достигаться и уравнение Риккати требует обобщения. Статья посвящена исследованию функционала (1) без ограничительного условия $r(x)\neq 0$.

Пусть $x=a$ — какая-нибудь точка из $(-\infty, \infty)$. Обозначим через $c(a)$ точную верхнюю грань всех чисел b ($b>a$), для которых $J(y)\Big|_a^b \geqslant 0$ при всех $y(x)\in F_0[a, b]$. Если b с указанными свойствами не существуют, то полагаем, что $c(a)$ совпадает с a. Точка $x=c(a)$ (которая может обращаться в $+\infty$) называется первой сопряженной точкой точки $x=a$. Доказывается, что если $c(a)\geqslant b$, то для всех $y\in F_0[a, b]$ имеет место соотношение $J(y)\Big|_a^b \geqslant 0$.

Через $L(x, b)$ обозначается точная нижняя грань $J(y)\Big|_x^b$ при всех $y \in F_1[x, b]$. Если $L(x, b)$ существует на (a, b), то ее называют функцией Риккати, связанной с функционалом J и точкой $x = b$. Доказывается, что для конечности $L(x, b)$ на (a, b) необходимо, чтобы $c(a) \geqslant b$. Показывается, что при $c(a) \geqslant b$ $L(x, b)$ есть непрерывная справа функция всюду на (a, b). Если $c(a) \geqslant b$, то $L(x, b)$ имеет ограниченную вариацию на каждом отрезке интервала (a, b).

Для того чтобы при любой функции $y \in F_0[a, b]$ выполнялось соотношение $J(y)\Big|_a^b \geqslant 0$, необходимо, чтобы множество x из $[a, b]$, для которых $r(x) < 0$, имело лебегову меру нуль.

Если

$$R[x, z] = \begin{cases} z' - \dfrac{(z + q(x))^2}{r(x)} + p(x), & r(x) \neq 0 \\ -(z + q(x))^2, & r(x) = 0, \end{cases}$$

то почти всюду на (a, b) справедливо соотношение

$$R[x, L(x, b)] \geqslant 0.$$

Если $r(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и $c(a) \geqslant b$, то $L(x, b)$ удовлетворяет уравнению Риккати $R[x, z] = 0$ почти всюду на (a, b).

Рассматривается случай $r(x) \equiv 0$ на $(-\infty, \infty)$. Тогда $R[x, z] = -(z + q(x))^2$ и $L(x, b)$ удовлетворяет уравнению $R[x, z] = 0$ почти всюду на (a, b). Поэтому $L(x, b) = -q(x)$. М. К. Керимов

4896. Вариационные проблемы для кратных интегралов в непараметрической форме. Стампаккья (Problemi variazionali per gli integrali multipli in forma non parametrica. Stampacchia Guido), Rend. Seminar. mat. Univ. e Politecn. Torino, 1953—1954, **13**, 19—29 (итал.)

Обзор работ по проблеме существования абсолютного минимума интегралов вида

$$I[u] = \int_A F(x, u(x), p(x))\, dx,$$

$$dx = dx_1 \ldots dx_n, \quad p(x) = (\partial u/\partial x_1, \ldots, \partial u/\partial x_n)$$

при условии, что квадратичная форма

$$\sum_{i,j} F_{p_i p_j}(x, u, p)\, \lambda_i \lambda_j$$

положительно определенная.

Он охватывает работы, посвященные интегралу Дирихле (Гильберт, Б. Леви, Фубини, Лебег, Курант, Никодим и др.), а также работы, посвященные интегралам общего вида, удовлетворяющим условию

$$F(x, u, p) \geqslant \mu \sum_i |p_i|^\alpha + N, \quad \mu > 0$$

(Тонелли, Морри, Хар, Сигалов и др.).

Содержатся также краткие указания на работы, посвященные дифференцируемости решения. Библ. 21 назв. А. Г. Сигалов

4897. О вариационном исчислении для двух независимых переменных. Чезари (On the calculus of variations in two variables. Cesari Lamberto), Communs Pure and Appl. Math., 1956, **9**, № 3, 363—371 (англ.)

Краткий обзор результатов автора по двумерным вариационным задачам в параметрической форме, когда допустимыми являются произвольные непрерывные поверхности, имеющие конечную площадь в смысле Лебега, а интеграл определяется на произвольном параметрическом представлении как обобщение интеграла Вейерштрасса (Ann. Scuola norm. super. Pisa, 1946, **13**, 78—117; Amer. J. Math., 1952, **74**, 265—295).

Содержатся указания на работы других авторов, посвященные той же проблеме, а также на работы по двумерным задачам в непараметрической форме и по проблеме дифференцируемости решения. А. Г. Сигалов

4898. Некоторые новые методы в двумерных вариационных задачах с применениями к минимальным поверхностям. Янг (Some new methods in two-dimensional variational problems with special reference to minimal surfaces. Young L. C.), Communs Pure and Appl. Math., 1956, **9**, № 3, 625—632 (англ.)

Краткое изложение принадлежащей автору трактовки двумерных вариационных задач в параметрической форме, основанной на понятии обобщенной поверхности (Young L. C., Bull. Soc. math. France, 1951, **79**, 59—84; Fleming W. H., Young L. C., Trans. Amer. Math. Soc., 1954, **76**, 457—484).

Содержится ряд замечаний о связи между трактовкой автора и традиционной трактовкой тех же проблем, в которой допустимыми являются непрерывные поверхности. А. Г. Сигалов

4899. Существование экстремума в задаче вариационного исчисления, связанной с работой электростанции, использующей энергию морской воды. Фаэдо (Esistenza dell'estremo in un problema di calcolo delle variazioni riguardante il funzionamento delle centrali alimentate dalle maree. Faedo Sandro), Ann. mat. pura ed appl., 1955, **40**, 321—347 (итал.)

Исследуется вариационная задача, связанная с работой электростанции, использующей энергию морской воды. Отмечается, что задача интересна не только с точки зрения практики, но и как математическая, так как она не относится к обычным классическим задачам вариационного исчисления. Она заключается в доказательстве существования и в нахождении вектора

$$W \equiv [n(t), z(t), V(t)], \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1,$$

реализующего максимум интеграла

$$E(W) = \int_{t_0}^{t_1} n(t)\, N\left\{ -\frac{S[z(t)]\, z'(t) + V(t)}{n(t)};\ z(t) - h(t) \right\} dt \quad (1)$$

в некотором классе C векторов W, компоненты которых удовлетворяют определенным, приведенным в работе, условиям. В равенстве (1) $E(W)$ обозначает полную энергию электростанции в промежуток времени (t_0, t_1); $n(t)$ — число действующих в момент времени t турбин; $S[z(t)]$ — поверхность водоема, огражденного от моря плотиной; $V(t)$ — количество воды, вытекающей из водоема в море через шлюз, посредством которого водоем связан с морем; $z(t)$ — высота уровня воды в водоеме; $h(t)$ — высота уровня воды в море; $N\{\ \}$ — мощность одной турбины.

В начале выясняются некоторые свойства функций $h(t)$, $N\{\ \}$, $S(z)$, $V_0(z, h)$, которые в задаче считаются заранее известными (функция $V(t)$ связана с $V_0(z, h)$ соотношением: $0 \leqslant V(t) \leqslant V_0[z(t), h(t)]$). Далее в классе допустимых векторов специальным образом вводится метрика (в данной задаче нельзя ввести обычную для вариационного исчисления метрику) и доказывается полунепрерывность сверху интеграла $E(W)$. Подробно изучаются свойства класса C. Наконец, доказывается основная теорема:

Интеграл $E(W)$ принимает в классе C свое максимальное значение и вектор $\overline{W} \equiv \{\bar{n}(t), \bar{z}(t), \overline{V}(t)\}$, реализующий этот максимум, имеет компоненту $\overline{V}(t) = 0$ на (t_0, t_1). Указывается, что последнее обстоятельство наиболее полно отражает физическую сущность задачи, заключающуюся в том, что энергия электростанции будет наибольшей, когда вся вода водоема расходуется только для работы турбин (т. е. когда $\overline{V}(t) = 0$). М. К. Керимов

См. также: 4863 К, 4872, 4873.

АНАЛИЗ (ДРУГИЕ ВОПРОСЫ)

4900. О вкладах Якова Бернулли в математику бесконечно малых. Гофман (Über Jakob Bernoullis Beiträge zur Infinitesimalmathematik. Hofmann Jos. E.), Einseign. math., 1956, 2, № 1—2, 61—171 (нем.)

Очень насыщенная фактами статья, дающая обзор работ Я. Бернулли на основании собраний его сочинений (Bernoulli Jakob, Opera, 2, Genf.1744; Ars conjectandi, Basel, 1713), переписки с Лейбницем и И. Бернулли (Leibnizens mathematische Schriften, 7, Berlin-Halle, 1849—1863; Briefwechsel von Johann Bernoulli, 1, Basel. 1955) и записных книжек Я. Бернулли (Meditationes et annotationes), хранящихся в библиотеке Базельского университета. Статья дает много ценного материала для суждения о развитии идей Я. Бернулли и его отношений с Лейбницем, И. Бернулли, Лопиталем и другими математиками. Чтение статьи несколько затрудняется крайней сжатостью изложения; возможны также в некоторых местах и опечатки. Статья интересна для каждого историка математики, занимающегося вопросом о происхождении и первых стадиях развития анализа бесконечно малых. Статья снабжена подробными библиографическими и историческими замечаниями.

И. Н. Веселовский

4901. Заметка об одной задаче на сходимость. Фреймер (Note on a convergence problem. Freimer Marshall), Amer. Math. Monthly, 1955, 62, № 9, 645—647 (англ.)

Шилдс (Shields A., Bull. Amer. Math. Soc., 1954, 60, 589) предложил следующую задачу. Пусть $a_1 < a_2 < \ldots$ — целые числа > 0 и $\sin a_n x \to 0$ для всех x из компактного множества C; доказать, что сходимость будет равномерной. Невозможность доказать это вытекает из приводимого автором контрпримера: $a_n = n!$ C — множество $0, \pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \ldots$.

М. Н. Олевский

4902. О непрерывности функций одной переменной. Яновский А. Д., Изв. Киевск. политехн. ин-та, 1956, 19, 428—436

Разработка изложения вопроса о непрерывности и точках разрыва в курсе втуза. Не содержит чего-либо нового. А. Г. Школьник

4903. О метрической и линейной независимости. Блюменталь, Кли (On metric independence and linear independence. Blumenthal L. M., Klee V. L.), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, 6, № 5, 732—734 (англ.)

Авторы доказывают, что если M — метрическое пространство, CM — банахово пространство действительных числовых функций, определенных в M, с $\|f\| = \sup_{x \in M} |f(x)|$, то M гомеоморфно линейному метрически независимому в CM подпространству. Обозначим через xy расстояние между двумя точками x, y из M, и для любого $x \in M$ пусть f_x — функция xy. Подмножество A из M называется метрически зависимым в M, если семейство $\{f_a : a \in A\}$ линейно зависимо в M. В противном случае A — метрически независимо в M.

Результат, анонсированный выше, получен с помощью следующих предложений:

1. Если A — подмножество (не обязательно сепарабельное) пространства Гильберта E, тогда A — метрически независимо в A.

2. Если M — метрическое пространство, тогда M обладает ограниченным гомеоморфизмом, в котором любое подмножество A метрически независимо в A.

Затем авторы рассматривают различные частные случаи: предложения (4), (5), (6), (7) и (8).

S. Vasilache

4904. Спектральное распределение матрицы Якоби. Дин (The spectral distribution of a Jacobian matrix. Dean P.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1956, 52, № 4, 752—755 (англ.)

Для якобиевой матрицы M ($m_{jj} = a_j$, $m_{j,j+1} = m^*_{j+1,j} = b_j$, остальные элементы равны нулю) порядка N автор вводит функцию $L(\mu)$, равную количеству собственных чисел M, не превосходящих μ, и утверждает, что при больших N эту функцию с достаточным приближением можно считать аналитической. В работе изучается «спектральная функция распределения» $D(\mu) = dL(\mu)/d\mu$. Для случая якобиевых матриц нечетного порядка Дайсон (РЖМат, 1955, 3331) вводил «характеристическую функцию» $\Omega(x) = \int_0^\infty \ln(1 + x\mu) E(\mu) d\mu$, где $E(\mu)$ — спектральная функция распределения квадратов собственных чисел. Если $\Omega(x)$ известна (пусть даже приближенно), то $E(\mu)$ находится с помощью формулы обращения:

$$E(\mu) = (2\pi^2\mu)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \cosh \pi\alpha \left(\int_0^\infty (x\mu)^{-1/2} \cos[\alpha \ln(x\mu)] \times \right.$$
$$\left. \times \Omega'(x)\, dx \right) d\alpha.$$

Автор доказывает, что для нахождения $D(\mu)$ можно пользоваться формулой Дайсона, взяв в качестве $\Omega(x)$ функцию:

$$\Omega(x) = \lim_{n \to \infty} (1/N) \sum_{j=1}^{N} \ln[(1 + a_j x)(1 - g_j)],$$

где

$$g_j = \alpha_j / [1 - \alpha_{j+1} / \{1 - \alpha_{j+2} / (\ldots - \alpha_{n-1}))) \ldots\}],$$
$$\alpha_i = |b_i|^2 x^2 / [(1 + a_i x)(1 + a_{i+1} x)].$$

g_j существует, если $4|b_k|^2 \leqslant a_k a_{k+1}$ ($k = j, j+1, \ldots$). Эти условия выполняются в задаче об электронах в беспорядочной цепи атомов. А. А. Нудельман

4905. Сингулярные функции. Петьо, Коломбо (Fonctions singulières. Petiau G., Colombo S.), Formulaire math. usage physiciens et ingrs, 1956, № 7, 103—114 (франц.)

Определения и перечень основных свойств функций sign x, единичной функции Хевисайда, импульсной

функции Дирака и ее производных, их рассмотрение с точки зрения теории обобщенных функций и список важных для приложений формул, содержащих эти функции (в частности,

$$\delta[f(x)] = \sum\nolimits_n \delta(x - x_n)/|f'(x_n)|,$$

если $f(x)$ имеет только простые корни) В. И. Левин

4906. **Некоторые вопросы классификации бесконечно дифференцируемых функций. Л ю с т и г А. М.**, Уч. зап. Елабужск. пед. ин-та, 1956, 1, 63—72

Функция действительного переменного x, бесконечно дифференцируемая на сегменте $[a, b]$, по Жеврею относится к классу α на этом сегменте, если для всех его точек x выполняются неравенства

$$|\varphi^{(n)}(x)| < M(n!)^{\alpha}/R^{\alpha}\ (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

где M и R — постоянные.

Классификация Жеврея распространяется на отдельную точку: $\varphi(x)$ относится к классу α в точке x, если существуют такие постоянные M и R, зависящие, вообще говоря, от x, что

$$|\varphi^{(n)}(x)| < \frac{M(n!)^{\alpha}}{R^{\alpha}}. \qquad (1)$$

Если α нельзя уменьшить, то $\varphi(x)$ принадлежит в точке x строго к классу α. Если существуют такие постоянные M и R, не зависящие от x, что (1) выполняется во всех точках $[a, b]$, функция $\varphi(x)$ принадлежит к классу α равномерно на $[a, b]$.

Доказывается на примере функции $\psi(x) = e^{-|x|^{-\gamma}}$ с $\gamma > 0$ при $x \neq 0$ и $\varphi(0) = 0$, что из принадлежности функции к классу α в каждой точке x сегмента $[a, b]$ не следует равномерная принадлежность $\psi(x)$ к тому же классу на $[a, b]$.

Показывается, что равномерный класс α $\psi(x)$ на любом сегменте, содержащем точку $x = 0$, удовлетворяет неравенствам

$$1 + 1/\gamma \leqslant \alpha \leqslant 2 + 1/\gamma.$$

Делается замечание о необоснованности заключения Адамара (Hadamard J., Le problème de Cauchy, Paris, 1932) о строгой принадлежности в каждой точке функции

$$\varphi(x) = \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} e^{-2k/\alpha} \cos 2^k x$$

к классу α, сделанного из доказанной им строгой принадлежности этой функции к классу α в каждой точке $x = a\pi/2^s$ (a, s — натуральные числа).

Б. М. Гагаев

4907. **Применение теоремы Вейерштрасса-Бернштейна в интегральном исчислении. К л и м е с к у** (O aplicaţie a teoremei lui Weierstrass-Bernstein in calculul integral. C l i m e s c u A l.), Bul. Inst. politehn. Iaşi, 1956, 2, № 1—2, 9—11 (рум.; рез. русск., франц.)

Доказывается существование первообразной непрерывной функции в замкнутом интервале, исходя из теоремы Вейерштрасса-Бернштейна, и указываются преимущества введения этого доказательства в учебном процессе. Резюме автора

4908. **Асимптотическое вычисление некоторых интегралов. З м о р о в и ч В. А.**, Изв. Киевск. политехн. ин-та, 1956, 19, 108—115

Рассматривается интеграл

$$I_n = \int_{\Omega_p} \varphi(M) \prod\nolimits_{k=1}^{n} f_k(M)\, d\omega,$$

где $\varphi(M)$, $f_k(M)$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$) — функции точки M ограниченной области Ω_p p-мерного пространства Евклида, однозначные, непрерывные и равномерно ограниченные в замкнутой области $\overline{\Omega}_p$ при $n \to \infty$.

Предполагается: 1) что в точке M_0 (являющейся началом координат) области Ω_p, все функции $f_k(M)$ достигают своих абсолютных максимумов в $\overline{\Omega}_p$; 2) ни в какой другой точке области Ω_p максимумы не достигаются; 3) в области $\Omega_p - (\delta)$, полученной из Ω_p удалением прямоугольной области $(\delta): |x_k| < \delta$ ($k = 1, 2, \ldots, p$), где $\delta > 0$ и достаточно мало,

$$\left| \prod_{k=1}^{n} \frac{f_k(M)}{f_k(M_0)} \right| < C\lambda_{\delta}^{n},\ 0 < \lambda_{\delta} < 1,$$

где C и λ_{δ}^{n} — некоторые положительные постоянные, C не зависит ни от n, ни от δ; λ_{δ} не зависит от n, но может зависеть от δ; 4) в (δ)

$$f_k(M) = f_k(M_0)\, e^{-\sum_{s=1}^{p} \Delta_{ks} x_s^2}.$$

При этих предположениях доказывается, что

$$I_n \approx n^{-p/2} \varphi(M_0) f_1(M_0) \ldots f_n(M_0)\, \pi^{p/2}/(h_1 h_2 \ldots h_p),$$

где $h_s = \lim\limits_{\delta \to 0} \Delta_s \delta$.

Выводятся при некоторых предположениях аналогичные асимптотические формулы для интегралов

$$I_n = \int_{\Omega_p} \varphi(M)\, \Phi_n(M)\, d\omega,$$

где

$$\Phi_n(M) = C \prod_{k=1}^{p} \left| \frac{\sin n f_k(x_k)}{x_k} \right|^{2m_k},$$

C — положительная постоянная, $m_1, \ldots, m_p$ — целые $\geqslant 1$, n входит только явно,

$$f_n(x_k) = x_k + \Delta_k x_k^2,\ |x_k| \leqslant \delta,\ |\Delta_k| \leqslant H,$$

и интегралов

$$I_n = \int_{\Omega_p} \varphi(M)\, \Phi_n(M)\, d\omega,$$

где в окрестности (δ) начала координат функция $\Phi_n(M)$ может быть представлена в виде

$$\Phi_n(M) = \prod\nolimits_{k=1}^{p} K_k^{(n)}(n f_k(x_k)),$$

причем $f_k(x_k) = x_k + \Delta_k x_k^2$, $|\Delta_k| \leqslant H$.

В работе имеются опечатки. Б. М. Гагаев

4909. **Заметка о неравенстве Буняковского. К р у к о в с к и й Б. В.** (Круковский-Синевич), Изв. Киевск. политехн. ин-та, 1956, 19, 423—427

Высказываются некоторые соображения об изложении неравенства Буняковского во втузовском курсе математики. В заключение приводится неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\int_a^b f(x)\, \varphi_k(x)\, dx \right)^2 \leqslant (b - a) \int_a^b f^2(x) \sum_{k=1}^{n} [\varphi_k(x)]^2 dx, \quad (1)$$

ранее выведенное автором (предполагается монотонность на $[a, b]$ $f(x)$ и суммы $\sum [\varphi_k(x)]^2$).

А. Г. Школьник

4910. **О функциональном уравнении $f(x+y)=f(x)+f(y)$. Ч ж а н Ц з и н - ч ж у н** (關於函數方程張景中), 數學進展, Шусюэ цзиньчжань, 1955, 1, № 4, 795—800 (кит.)

4911. Некоторые функциональные уравнения, связанные с законом сочетательности. Хоссу (Some functional equations related with the associative law. Hosszú M.), Publs mat., 1954, 3, № 3—4, 205—214 (англ.)

Полагая $xy = F(x, y)$, получаем функциональные уравнения

$$F[x, F(y, z)] = F[F(x, y), z],$$

$$F[x, F(y, z)] = F[z, F(x, y)],$$

$$F[x, F(y, z] = F[y, F(x, z)],$$

$$F[x, F(y, z)] = F[F(z, x), y],$$

первое из которых было решено Брауэром. Показывается, что остальные три уравнения имеют аналогичные решения, имеющие соответственно вид:

$$F(x, y) = f^{-1}[\alpha^2 f(x) + \alpha f(y) + \beta],$$

$$F(x, y) = f^{-1}[g(x) + f(y)],$$

$$F(x, y) = f^{-1}[f(x) + f(y)],$$

где f и g — непрерывные и строго монотонные функции.

Рассматривается также более общее функциональное уравнение

$$F[x, G(y, z)] = H[K(x, y), z].$$

В. И. Левин

4912. Функции с моментами, равными нулю. Салинас (Funciones con momentos nulos. Salinas Baltasar R.), Rev. Real acad. cienc. exáct., fis. y natur. Madrid, 1955, 49, № 4, 331—368 (исп.)

Проблема моментов для аналитических функций рассмотрена при дополнительных условиях, налагаемых на порядок роста функций, а также для полупрямой, прямой и границы угла, взятых в качестве линий интегрирования.

Получены, в частности, следующие результаты:

1. Если последовательность натуральных m_n такова, что

$$\int_1^{+\infty} \log T(r)/r^{3/2} dr < +\infty;\ (T(r) = \sup r^n/m_n),$$

то можно построить $Fz \not\equiv 0$, аналитическую внутри некоторой параболы, с моментами $\int_0^{+\infty} F(x) x^n dx = 0$ и $\int_0^{+\infty} |F(x)| x^n dx \leqslant m_n$ $(n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$.

2. Пусть последовательность натуральных m_n такова, что $\lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{m_n}/n^{\alpha+2}) > 0$. Тогда найдется функция $F(z) \not\equiv 0$, аналитическая в угле $|\arg z| < \alpha\pi/2$ с моментами

$$\int_0^{+\infty} F(x) x^n dx = 0;\ \int_0^{+\infty} |F(x)| x^n dx \leqslant m_n$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots).$$

3. Пусть $F(z)$ — аналитическая, порядка роста меньше, чем $1/(\alpha+2)$, в угле $\varphi_1 < \arg z < \varphi_2$ с моментами a_n по лучу $t = re^{i\varphi_0}$

$$(\varphi_1 < \varphi_0 < \varphi_2) : a_n = \int_0^{\infty(\varphi_0)} F(t) t^n dt,$$

которые удовлетворяют условию: $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{a_n}/n^{\alpha}\right) = 0$ при $\alpha < 1$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} \left(\log n \cdot \sqrt[n]{a_n}/n\right) < +\infty$ при $\alpha = 1$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}/n < +\infty$ при $\alpha > 1$. Если $\int_0^{\infty(\varphi_0)} |F(t) t^n dt| \leqslant m_n$ и $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{m_n}/n^{\alpha+2} = 0$, то $F(z) \equiv 0$.

В. А. Магарик

4913. Численный анализ методом преобразования в численный ряд. Мадуэд (Numerical analysis by the number series transformation method. Madwed Albert), Proc. Sympos. Nonlinear Circuit Analysis, 1953, 2, 320—368 (англ.)

Рассмотрен новый метод приближенного решения дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений при помощи некоторого линейного функционального преобразования.

В первой части работы рассматривается упомянутое преобразование. Для этого вводятся 4 сорта единичных функций, которые графически представляются в виде равнобедренного или прямоугольного треугольника, прямоугольника, полубесконечного прямоугольника, (обычная единичная функция) и полубесконечной трапеции. При помощи этих функций преобразование вводится следующим образом: непрерывной или кусочно-непрерывной функции ставится в соответствие сумма определенного бесконечного ряда таких единичных функций одного и того же сорта. Графически это означает, что график функции заменяется либо через ломаную, состоящую из хорд графика функций (1-й и 4-й сорт), либо через ступенчатую функцию (2-й и 3-й сорт). Такой прием автор называет методом преобразования функции в численный ряд (на самом деле это функциональный ряд). Для обозначения преобразования вводится особая, сложная символика. Рассматриваются свойства этого преобразования, причем сказанное поясняется таблицами и графиками.

Решение дифференциальных или интегро-дифференциальных уравнений происходит следующим образом: данное уравнение путем интегрирования приводится к интегральному уравнению. В этом уравнении все функции преобразуются, и полученное уравнение, применяя ранее рассмотренные свойства преобразования, решается при помощи арифметических действий. Решение получается в виде таблицы. Метод применим для уравнений с переменными коэффициентами, некоторых типов нелинейных уравнений и систем уравнений. Приводятся 2 численных примера, которые показывают хорошее совпадение приближенного решения с точным. Общие оценки погрешности отсутствуют.

Статья является 27-й главой книги «Instrument Engineering». Vd. 2 (РЖМат, 1956, 3879).

Примечание референта. В работе имеются некоторые неточности. Так, например, без оговорок применяется символ обратного преобразования, хотя ясно, что оно не определяется однозначно.

Э. Я. Риекстыньш

4914. Новый метод в анализе и его приложения. Туран (數學分析中的一個新方法及其應用. 杜瀾), 數學進展, Шусюэ цзиньчжань, 1956, 2, № 3, 312—565 (кит.)

См. РЖМат, 1956, 7863.

4915 К. Собрание математических работ. Сас (Collected mathematical papers. Szasz Otto. N. Y. Univ. of Cincinnati, 1955, 1432) (англ.)

Настоящее издание представляет собой собрание математических работ Отто Саса (Szasz O., 1884—1952). Оно содержит 112 работ, выполненных в период с 1910 по 1952 г. Сюда не вошли две монографии автора (первая совместно с Хилбом (E. Hilb)) (Algemeine Reihenentwicklungen, Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften, II C, 1922, 11; Introduction to the theory of divergent series, University of Cincinnati, 1951),

а также 20 других статей, часть из которых суть рецензии на книги и решения задач. Все работы расположены не в хронологическом порядке, а разделены на группы по содержанию. Таких групп восемь: 1. Определители (бесконечные определители, неравенства типа неравенства Адамара). 2. Непрерывные дроби (сходимость, природа иррациональности, цепные дроби с комплексными элементами, приложения к теории рядов). 3. Замкнутость и полнота (исследование, примыкающее к известной теореме Мюнца, замкнутость некоторых систем рациональных функций на бесконечных промежутках, последовательности полиномов Бернулли и функции Ламберта). 4. Степенные ряды и ряды Дирихле (исследование поведения коэффициентов и частных сумм рядов Тейлора ограниченных функций, тауберовы задачи). 5. Тригонометрический анализ (сходимость и абсолютная сходимость рядов Фурье, оценки частных сумм рядов Фурье ограниченных функций, имеющих неотрицательные коэффициенты, суммируемость рядов Фурье, явление Гиббса, единственность и абсолютная сходимость кратных тригонометрических рядов, свойства коэффициентов неотрицательных тригонометрических полиномов и связь с билинейными формами). 6. Методы суммирования (абелевы задачи для различных методов суммирования и их произведений, некоторые тауберовы теоремы). 7. Ультрасферические полиномы и функции Бесселя (некоторые точные неравенства и тождества, связь с неотрицательными полиномами и положительно определенными эрмитовыми формами). 8. Разные статьи (теория чисел, теория функций комплексного переменного, теория вероятностей, специальные функции, теория рядов, теория приближений, вариационные задачи).

Имеется предисловие редактора и краткая биография Отто Саса. А. Ф. Тиман

4916 К. Курс высшей математики. Для техникумов. Суворов И. Ф. Изд. 2-е. М., «Сов. наука», 1955, 352 стр. с черт., 6 р. 80 к.

4917 К. Частное дифференцирование. Гиллеспи (Partial differentiation. 2nd ed. Gillespie Robert Pollook. Edinburgh—London, Oliver & Boyd, 1954, VIII, 107 pp., ill., 7 sh. 6d.), Brit. Nat. Bibliogr., 1956, № 359, 11 (англ.)

4918 К. Высшая математика. Т. I. Матулионис (Aukštoji matematika. Aukštųjų techninių mokyklų kursas. I knyga. Antrasis pataisytas leidimas. Matulionis J., Vilnius, Valst. polit. ir moksl. lit. leidykla, 1954, 718 psl., 13 rb. 80 kp.) (лит.)

4919 К. Высшая математика. Т. II. Матулионис (Aukštoji matematika. Aukštųjų techninių mokyklų kursas. II knyga. Antrasis pataisytas leidimas Matulionis J., Vilnius, Valst polit. ir moksl. lit. leidykla, 1954, 557 psl., 11 rb. 60 kp.) (лит.)

4920. К. Курс математического анализа. Том 3. Бесконечно близкие интегралы, уравнения в частных производных второго порядка, интегральные уравнения, вариационное исчисление. Гурса (Cours d'analyse mathématique. Tome 3. Intégrales infiniment voisines, équations aux dérivées partielles du second ordre, équations intégrales, calcul des variations T. 3., 5 éd. Goursat Edouard. Paris, Gauthier-Villars, 1956, 703 p., ill., 2 880 fr.), Bibliogr. France, 1956, 145, № 42, 921 (франц.)

4921 К. Анализ. II (избранные главы). **Сато** (解析 II の研究. 進學選書. 左藤常三等), 千代田書房, 406 頁, 340 圓, Тиёда-сёбо, 1954, 406 стр., 340 иен (япон.)

4922 К. Математический анализ. II. Таками (重點演習解析. II. 高見清). 三省堂, 325 頁, 220圓. Сансэйдо, 1954, 325 стр., 220 иен) (япон.)

4923 К. Исследование тригонометрических функций. Тояма (三角函數の研究. 遠山啓, 山海堂, 303 頁, 180 圓, Санкайдо, 1954, 308 стр., 180 иен) (япон.)

4924 К. Введение в анализ бесконечно малых. Изд. испр. **Фудзиока** (微積分學概論. 改訂版. 藤岡茂, 培風館, 160 頁, 220 圓, Байфукан, 1954, 160 стр., 220 иен) (япон.)

4925 К. Введение в математику для специалистов по естественным наукам. Изд. доп. и испр. Тэрасава (自然科學者のための數學概論. 增訂版. 寺澤寬一. 岩波書店, 722 頁, 1200 圓. Иванами-сётэн, 1954, 722 стр., 1200 иен) (япон.)

4926 К. Введение в теорию функций. Носиро (初等函數論. 能代清, 培風館, 242 頁, 290 圓, Байфукан, 1954, 242 стр., 290 иен) (япон.)

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

4927. О признаках Н. И. Лобачевского и В. П. Ермакова сходимости знакоположительных рядов. Зморович В. А., Изв. Киевск. политехн. ин-та, 1956, 19, 67—71

Известный признак Н. И. Лобачевского сходимости знакоположительных рядов устанавливается в следующей форме, более удобной для приложений: пусть для достаточно больших n $\varphi\left(2^{n-\ln\theta(n)}\right) \geqslant 2^n$, причем ряд $\sum_{(n)}[\theta(n)]^{-\ln 2}$ сходится. Тогда ряд $\sum_{(n)}[\varphi(n)]^{-1}$ также сходится.

Доказана следующая теорема: необходимое и достаточное условие сходимости знакоположительного и монотонно убывающего ряда $\sum f(n)$ состоит в том, что для всякой положительной и непрерывно дифференцируемой в интервале $(0, +\infty)$ функции $\varphi(x)$, удовлетворяющей для достаточно больших значений x условию $\varphi(x) > x$, и для некоторого фиксированного $\alpha\ (0 < \alpha < 1)$ выполняется неравенство

$$\int_{\varphi(b)}^{\varphi(x)} f(t)\,dt < \alpha \int_b^x f(t)\,dt, \qquad (1)$$

где $\varphi(b) > b$, $x > b$.

Неравенство (1) будет наверняка выполнено, если имеет место условие $f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t) < \alpha f(t)$ при всех достаточно больших значениях x и некотором фиксированном α, $0 < \alpha < 1$ (признак В. П. Ермакова). И. Е. Жак

4928. Преобразование ряда $\sum_{k=1}^{k=\infty} 1/k^3$ в определенный интеграл. Мунте-Юртнес (Overføring av rekken $\sum_{k=1}^{k=\infty} 1/k^3$ til et bestemt integral. Munthe Hjortnaes Margrethe), 12-te Skand. matematikerkongr. Lund, 1953. Lund, 1954, 211—213 (норв.)

Доказывается, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} = 10 \int_0^{\ln[(1+\sqrt{5})/2]} t^2 \operatorname{cth} t\,dt.$$

В. И. Левин

4929. Система наилучших двойственных областей сходимости цепных дробей. Сингх, Трон (A family of best twin convergence regions for continued fractions. Singh Vikramaditya, Thron W. J.), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, 7, № 2, 277—282) (англ.)

Двойственными областями сходимости цепной дроби

$$1 + \frac{c_1^2}{1+}\ \frac{c_2^2}{1+}\cdots$$

называются такие две области E_1 и E_2 комплексной плоскости, что из $c_{2n-1} \in E_1$, $c_{2n} \in E_2$ следует сходимость этой дроби. Если не существует таких областей E_1', E_2' с теми же свойствами, которые содержат соответственно E_1 и E_2 внутри себя, причем по крайней мере одна из них не совпадает с соответствующей областью E_k, то E_1, E_2 называются наилучшими двойственными областями сходимости. Доказывается, что такими областями являются

$$|c_{2n-1}| \leqslant \rho \text{ и } |c_{2n} \pm i| \geqslant \rho,\ 0 < \rho < 1.$$

В. И. Левин

4930. Некоторые алгебраические свойства асимптотических степенных рядов. Халл (Some algebraic properties of asymptotic power series. Hull T. E.), Canad. J. Math., 1956, 8, № 2, 220—224 (англ.)

Рассматриваются те асимптотические степенные ряды $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, для которых: 1) все c_n действительны, $c_0 \geqslant 0$;

2) существует функция $f(x)$ такая, что для

$$R_n(x)\, x^n = f(x) - c_0 - \ldots - c_{n-1} x^{n-1}$$

будет выполнено $|R_n(x)| \leqslant |c_n|$, $|f(x)| \leqslant c_0$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, $x > 0$.

Такие ряды (называемые S-рядами) образуют полукольцо, если сумма и произведение определяются по правилам формального сложения и умножения степенных рядов. Коэффициенты S-рядов колеблются по знаку.

Доказано, что всякий асимптотический ряд представлен в виде разности двух S-рядов.

В. А. Магарик

4931. Некоторые результаты о матричных пространствах. I. Эль-Макарем (Some results on matrix spaces. I. El Makarem H. H. A.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1956, A59, № 4, 490—498; Indagationes math., 1956, 18, № 4, 490—498 (англ.)

Пусть α — пространство (линейная система) последовательностей. Множество последовательностей $u = \{u_k\}$, при которых ряд $\sum_k u_k x_k$ абсолютно сходится для всех последовательностей $x = \{x_k\}$ в α, называется дуальным пространством пространства α и обозначается через α^*. Говорят, что последовательность $x^{(n)} = \{x_k^{(n)}\}$, $x^{(n)} \in \alpha$, проективно ограничена, или просто p-ограничена, в α, если для каждой фиксированной последовательности $u \in \alpha^*$ последовательность $\left\{\sum_k x_k^{(n)} u_k\right\}$ ограничена.

Пусть, далее, $A = (a_{nk})$ — некоторая бесконечная матрица, а α и β — пространства последовательностей. Множество тех матриц A, при которых $Ax \in \beta$ для всех $x \in \alpha$, называется пространством $\alpha \to \beta$. Здесь $Ax = \left\{\sum_k a_{nk} x_k\right\}$, причем предполагается абсолютная сходимость всех рядов $\sum_k a_{nk} x_k$ при $x \in \alpha$. Говорят, что последовательность матриц $A^{(m)} \in \alpha \to \beta$ p-ограничена в $\alpha \to \beta$, если последовательность $\left\{A^{(m)} x\right\}$ p-ограничена в β при каждой фиксированной x в α. В случае некоторых конкретных α и β Кёте, Тёплиц, Диенес и Аллен (Cooke R. G., Linear operators, стр. 298; РЖМат, 1955, 5169) установили необходимые и достаточные условия для того, чтобы матрица A принадлежала пространству $\alpha \to \beta$.

В реферируемой статье изучаются ряд дальнейших случаев матричных пространств $\alpha \to \beta$, а также p-ограниченность последовательности матриц $A^{(m)}$ в разных пространствах $\alpha \to \beta$. Г. Ф. Кангро

4932. Некоторые результаты о матричных пространствах. II. Эль-Макарем (Some results on matrix spaces. II. El Makarem H. H. A.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch, 1956, A59, № 4, 499—510; — Indagationes math., 1956, 18, № 4, 499—510 (англ.)

Пусть α — пространство последовательностей и $x^{(n)} = \left\{x_k^{(n)}\right\}$ — последовательность элементов пространства α. Говорят, что последовательность $x^{(n)}$ p-сходится в α, если последовательность $\left\{\sum_k x_k^{(n)} u_k\right\}$ сходится при всех $u = \{u_k\}$ в α^* (реф. 4931). Последовательность матриц $A^{(m)} \in \alpha \to \beta$ называется p-сходящейся в пространстве $\alpha \to \beta$, если последовательность $\left\{A^{(m)} x\right\}$ p-сходится в β при каждой фиксированной последовательности x в α. Аллен (Cooke R. G., Linear operators, стр. 332; РЖМат, 1955, 5169 К) изучал p-сходимость последовательности $A^{(m)}$ в некоторых матричных пространствах.

Автор дает необходимые и достаточные условия для p-сходимости последовательности $\left\{A^{(m)}\right\}$ в ряде других матричных пространствах. В заключение доказывается совпадение разных видов сходимости в некоторых пространствах $\alpha \to \beta$. Г. Ф. Кангро

4933. Теорема о среднем значении для абсолютного суммирования. Реймерс Э., Tartu riikliku ülikooli toimetised, Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1956, вып. 42, 113—134 (рез. эст.)

Рассматриваются нормальные матричные преобразования (с матрицей $A = (a_{n\nu})$, $a_{n\nu} = 0$ при $\nu > n$, $a_{nn} \neq 0$, $n = 0, 1, \ldots$), удовлетворяющие теоремам о среднем значении (т. с. з.), определяемые неравенствами: для обычного суммирования

$$\left|\sum_{\nu=0}^{k} a_{u\nu} s_\nu\right| \leqslant K \left|\sum_{\nu=0}^{k'} a_{k'\nu} s_\nu\right| \quad (0 \leqslant k' \leqslant k \leqslant n), \qquad (1)$$

и для абсолютного суммирования

$$\sum_{n=p+1}^{\infty} \left|\bar{\Delta}_n \sum_{\nu=0}^{k} a_{u\nu} s_\nu\right| \leqslant$$

$$\leqslant K \left|\sum_{\nu=0}^{k'} a_{k'\nu} s_\nu\right| \quad (0 \leqslant k' \leqslant k \leqslant p) \qquad (2)$$

($\{s_\nu\}$ — любая последовательность).

Основы общей теории т. с. з. для обычного суммирования были разработаны В. Юркатом и Пейеримхоффом (Jurkat W., Peyerimhoff A., Math. Z., 1951, 55, 92—108; РЖМат, 1953, 800, 801; 1954, 2205).

В реферируемой статье на базе т. с. з. в форме (1) и (2) изучаются включения методов суммирования, транслятивность, суммируемость произведения рядов и другие вопросы. В конце работы применяются т. с. з. к методу взвешенных средних Рисса. Из большого количества теорем (всего 19) отметим отдельные главные результаты. В теоремах 1 и 2 устанавливаются необходимые и достаточные условия для сходимости (по норме) и слабой сходимости в пространстве $n|A|$, т. е. во множестве всех последовательностей $|A|$-суммируемых к нулю.

Доказывается (теорема 5), что из неравенства (2) следует (1).

Теорема 6. Если B и A удовлетворяют соответственно условиям

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=0}^{n} b_{n\nu} = b$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu} = a \neq 0, \qquad (3)$$

а A, сверх того, удовлетворяет неравенству (1) и

$$a_{n\nu} \to 0,\ n\to\infty,\ \nu = 0,\ 1, \ldots, \qquad (4)$$

то при условии

$$\sum_{\nu=0}^{n} |\Delta_\nu b_{u\nu}/a_{u\nu}| \leqslant M,\ a_{n\nu} \neq 0$$

имеет место «включение полей данных методов» $cB \geqslant cA$, причем суммы связаны равенством $B(s) = (b/a)\,A(s)$.

Теорема 10. Пусть A удовлетворяет неравенству (1) и условиям (3) и (4). Если

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} |\Delta_\nu a_{n,\nu-1}/a_{n-1,\nu}| \leqslant M,\ a_{n\nu} \neq 0,$$

то метод A транслятивен слева.

Метод A называют транслятивным слева, если из A-суммируемости ряда $\sum u_k$ к некоторой сумме, следует также A-суммируемость ряда $\sum u_{k-1}$ (где $u_{-1} = 0$) к той же сумме.

Теорема 13 о включении приписывается Чезаро (в статье всюду напечатано Цезаро), что не является обоснованным. М. П. Щеглов

4934. Ряды с неограниченными частными суммами в поле суммирования матричного метода. Сырмус (Tõkestamata osasummadega read maatriksmenetluse summeerimisväljas. Sõrmus T.), Tartu riikliku ülikooli toimetised, Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1956, вып. 42, 143—151 (эст., рез. русск.)

Устанавливаются следующие теоремы:

1. Если матричный метод, сохраняющий сходимость, суммирует ограниченную расходящуюся последовательность, то он суммирует и неограниченную последовательность.

2. Если матричный метод, сохраняющий сходимость, суммирует расходящийся ряд с ограниченными частными суммами, то он суммирует и ряд с неограниченными частными суммами.

Доказательство обеих теорем основывается на теории пространств типа FK, развитой К. Целлером.

Из резюме автора

4935. Об одном свойстве методов Чезаро суммирования рядов. Давыдов Н. А., Матем. сб.,1956, 38, № 4, 509—524

Дан ряд комплексных чисел $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ с частными суммами S_n и чезаровскими средними σ_n^p порядка $p > -1$. Пусть $\overline{G}$ — замкнутая выпуклая область, или прямая, или луч, или отрезок, или точка в комплексной плоскости; G_ε — накрывающая выпуклая область, причем расстояние между границами $\overline{G}$ и G_ε не больше ε.

$\overline{G}$ называется c-множеством для последовательности S_n, если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $\lambda(\varepsilon) > 1$ и последовательность интервалов (n_k, m_k) натурального ряда, что: 1) $S_i \in G_\varepsilon$; $n_k < i < m_k$; 2) $m_k/n_k \geqslant \lambda(\varepsilon) > 1$, $k = 1, 2, 3, \ldots$; 3) $\lim_{k\to\infty} n_k = \infty$.

При соответствующем истолковании в качестве $\overline{G}$ может быть точка $Z = \infty$ комплексной плоскости.

Доказана теорема: если последовательность S_n суммируема (c, p) к S, а $\overline{G}$ есть c-множество последовательности S_n, то $S \in \overline{G}$. В частности, если $\overline{G}$ состоит из одной точки A, то $S = A$, а если $A = \infty$, то S не суммируема (c, p) ни к какому конечному S.

В качестве следствий получены обобщения тауберовых теорем Харди, Харди и Литтльвуда, Ландау, Р. Шмидта и М. А. Евграфова. Автор указывает, что часть из них независимо получены Н. Обрешковым (РЖМат, 1954, 4829). В. А. Магарил

4936. Абелево суммирование производных от сопряженных рядов Фурье. Суноути (Abel summability of derived conjugate Fourier series. Sunouchi Gen-ichiro), Kodai Math. Sem. Repts, 1955, 7, № 3—4, 85—88 (англ.)

Положим

$$f(x) \sim {}^1/_2 a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

$$\psi(x, t) \equiv \psi^\circ(x, t) = {}^1/_2 \{f(x+t) - f(x-t)\} \sim \sum (b_n \cos nx - a_n \sin nx) \sin nt,$$

$$\psi^r(x, t) = {}^1/_2 \left\{ f(x+t) + (-1)^{r+1} f(x-t) - 2 \sum_{k=0}^{\left[r-\frac{1}{2}\right]} a_{r-1-2k} t^{r-1-2k} \right\}.$$

Обозначим через $\psi_n^{(r)}(x, t)$ n-й интеграл от $\psi^{(r)}(x, t)$. Имеет место следующая теорема:

если $\psi_n^{(r)}(x, t) = o(t^{r+n})$, $t \to 0$, то

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left[\frac{\partial^r V(x, \varepsilon)}{\partial x^r} - \frac{2}{\pi} (n+r-1)! \int_\varepsilon^\infty \frac{\psi_{n-1}^{(r)}(x, t)}{t^{n+r}}\, dt \right] = 0,$$

где

$$V(x, \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \cos nx - a_n \sin nx)\, e^{-\varepsilon n}.$$

И. Е. Жан

4937. Об абсолютной и равномерной сходимости рядов Фурье почти периодических функций. Купцов Н. П., Матем. сб., 1956, 40, № 2, 157—178

Обозначим через $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ показатели Фурье равномерной почти периодической функции $f(x)$. Доказаны следующие теоремы:

I. Пусть выполнены условия:

a) множество показателей Фурье функции $f(x)$ имеет конечное число конечных предельных точек $b_1, b_2, \ldots, b_s$, причем ни одно из чисел λ_n не совпадает с $b_1, b_2, \ldots, b_s$;

b) существует постоянная C такая, что при любом n можно найти число j $(j = 1, 2, \ldots, s)$, удовлетворяющее неравенству $|\lambda_n - b_j| < C/n$;

c) $\sum \sqrt{(1/n)\,\bar{\omega}(1/n)} < +\infty$,

где

$$\bar{\omega}(\delta) = \max_{j=1,2,\ldots,s} \delta^2 M_x \left\{ \left| \int_0^\infty e^{-(\delta - ib_j)t} f(x-t)\, dt \right|^2 \right\}.$$

Тогда ряд, составленный из абсолютных величин коэффициентов Фурье функции $f(x)$, сходится.

II. Если выполнены условия:

a) существует такая постоянная $C > 0$, что $|\lambda_n| \geqslant C$ для всех целых n;

b) $\sum (1/\sqrt{n})\,\omega(1/n) < \infty$, где

$$\omega(\delta) = \sup_{|h| \leqslant \delta} \sqrt{M_x \{|f(x+h) - f(x)|^2\}},$$

то $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$, где a_k — коэффициенты Фурье функции $f(x)$. И. Е. Жак

4938. **О равномерной суммируемости по Чезаро некоторых тригонометрических рядов. Накамура** (或る 3 角級數の uniform Cesaro summability について. 中村芳彦). 數學, (Сугаку), 1953, 5, № 3, 40—42 (япон.)

4939. **Чезаровское суммирование рядов Фурье. Хирокава** (On the Cesaro summability of Fourier series. Hirokawa Hiroshi), Kodai Math. Sem. Repts, 1955, 7, № 3-4, 79—82 англ.)

Положим

$$\varphi(t) \sim \sum a_n \cos nt, \qquad (1)$$

$$\Phi_\alpha(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \varphi(t)\,(t-u)^{\alpha-1} du \quad (\alpha > 0).$$

Обозначим через $S_n^\beta(C, \beta)$-средние ряда (1) при $t = 0$.

Дается новое доказательство следующей известной теоремы Лу (Loo C., Trans. Amer. Math. Soc., 1944, 46, 508—518): если $S_n^\alpha = o(n^\alpha/\ln n)$, $n \to \infty$, то $\Phi_{\alpha+1}(t) = o(t^{\alpha+1})$, $t \to 0$. И. Е. Жак

4940. **Об особенностях сходимости тригонометрических интерполяционных полиномов. Госселин** (On the convergence behaviour of trigonometric interpolating polynomials. Gosselin Richard P.), Pacif. J. Math., 1955, 5, Suppl. № 2, 915—922 (англ.)

Обозначим через $I_n^{(\alpha)}$ n-й тригонометрический интерполяционный полином, однозначно определенный периодической функцией $f(x)$ в точках

$$\alpha + [2i/(2n+1)]\,\pi, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

где α — некоторое действительное число. Положим $I_n(x, f) \equiv I_n^{(0)}(x, f)$. Имеет место следующая теорема: для некоторого действительного числа α, иррационального относительно π, существует непрерывная функция $f(x)$, для которой последовательность $I_n(x, f)$ расходится для всех $x \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$, но для которой последовательность $I_n^{(\alpha)}(x, f)$ сходится равномерно. И. Е. Жак

4941. **Эффективное нахождение всех средних Чезаро целых порядков для рядов по ортогональным полиномам (в частности по полиномам Лагерра и Эрмита). Кемпбелл** (Détermination effective de toutes les moyennes de Cesàro d'ordre entier pour des séries de polynômes orthogonaux comprenant ceux de Laguerre et de Hermite. Campbell Robert), C. r. Acad. sci., 1956, 243, № 13, 882—885 (франц.)

Работа является продолжением более ранней работы автора (РЖМат, 1956, 326). Рассматривается класс F ортогональных полиномов $\{P_n(x)\}$, которые, кроме рекуррентного соотношения $P_n = (A_n x + B_n) P_{n-1} - C_n P_{n-2}$, удовлетворяют соотношению $P_n = f_n(x) P_{n-1} - g_n(x) P'_{n-1}$, причем величины

$$U(x) = \frac{2f_n(x)}{A_n} - \left(x + \frac{B_n}{A_n}\right), \quad V(x) = \frac{2g_n(x)}{A_n}$$

не зависят от n. Для этого класса полиномов величины σ_n^k (т. е. средние (C, k)) могут быть найдены по формуле

$$\sigma_n^k = \frac{1}{A_n^k} \int_a^b \frac{\sum_n^k(x, t)}{x - t} f(t)\,dt, \quad \sum_n^k = \mathscr{C}^k S_n, \qquad (1)$$

где линейный оператор $\mathscr{C}$ имеет вид:

$$\mathscr{C} = \frac{1}{2}\left\{1 + \frac{U(x) - U(t)}{x - t} - \frac{V(x) + V(t)}{(x-t)^2}\right\} + \frac{V(x)\dfrac{\partial}{\partial x} - V(t)\dfrac{\partial}{\partial t}}{x - t}$$

Применяя эти результаты к полиномам Эрмита и Лагерра, автор находит асимптотические формулы для ядра процесса суммирования (C, k).

Л. Я. Геронимус

4942. **О некоторых простых процессах суммирования, относящихся к рядам по ортогональным полиномам и к рядам Неймана. Кемпбелл** (Sur certains procédés de sommation simples relatifs à des séries de polynômes orthogonaux et à des séries de Neumann. Campbell Robert), C. r., Acad. sci., 1956, 243, № 15, 1007—1009 (франц.)

Работа является продолжением и обобщением предыдущей работы. Вместо средних Чезаро, он рассматривает обобщенные средние

$$(\sigma_n^1)^* = \left(\sum_{r=1}^n \alpha_r S_r\right) \Big/ \left(\sum_{r=1}^n \alpha_r\right),$$

где α_r является линейной функцией r. Он снова вводит оператор $(\mathfrak{C})^*$, определяемый как $\mathfrak{C}$ (реф. 4941) с заменой 1 на α_n и получает формулы, аналогичные (1), где

$$S_n^k = \sum_{r=1}^n \alpha_r S_r^{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots; \; S_n^0 = S_n;$$

$$A_n^k = \sum_{r=1}^n \alpha_r A_r^{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots; \; A_n^0 = 1.$$

Автор применяет полученные результаты к рядам по ультрасферическим полиномам и к ряду Неймана по функциям Бесселя; в обоих случаях он находит асимптотические формулы для ядра суммационного процесса.

Я. Л. Геронимус

4943. **Некоторые тауберовы теоремы для двойных рядов. Огиевецкий И. Е.,** Докл. АН СССР, 1956, 110, № 3, 330—333

Скажем, что двойная последовательность $\{S_{m,n}\}$ ограниченно медленно колеблется, если

$$\lim_{(\theta_1, \theta_2) \to 0} \omega(\theta_1, \theta_2) = 0,$$

где

$$\omega(\theta_1, \theta_2) = \overline{\lim_{(m, n) \to \infty}} \omega_{m,n}(\theta_1, \theta_2),$$

$$\omega_{m,n}(\theta_1, \theta_2) = \max_{\substack{m < m_1 < m(1+\theta_1) \\ n < n_1 < n(1+\theta_2)}} |S_{m_1 n_1} - S_{mn}|,$$

причем m, n удовлетворяют условию $\lambda_n < m < \lambda^{-1} n$, а θ_1, θ_2 условию $\lambda\theta_2 < \theta_1 < \lambda^{-1}\theta_2$ $(\lambda > 1)$. Обозначим через $\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta}(C, \alpha, \beta)$-средние двойного ряда

$$\sum_{(\nu, \mu)=0}^{\infty} u_{\nu,\mu}. \qquad (1)$$

Имеет место следующая теорема тауберова типа: пусть ряд (1) ограниченно суммируем $(C, \alpha+1, \beta+1)$ к числу S и удовлетворяет условиям

$$\sigma_{m,n}^{\alpha+1,\beta+1} = \begin{cases} o(n^{\alpha+1}) & \text{для } m = 1, 2, \ldots, N, \\ o(m^{\beta+1}) & \text{для } n = 1, 2, \ldots, N, \\ O(1) & \text{для } (m, n) > N. \end{cases}$$

Если последовательность $\{\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta}\}$ ограниченно медленно колеблется, то ряд (1) ограниченно суммируется (C, α, β) к числу S, $-1 < \alpha, \beta \leqslant 0$.

(Выражение «ограниченная суммируемость (C, α, β) к числу» означает, что $\lim_{(m,n)\to\infty} \sigma_{m,n}^{\alpha,\beta} = S$, когда числа m, n стремятся к бесконечности, удовлетворяя условию $\lambda n < m < \lambda^{-1} n$, где $\lambda > 1$). И. Е. Жак

4944. **Односторонние тауберовы теоремы для борелевских, абелевых и римановых преобразований второго порядка.** Раджагопал, Виджаярагхаван (One-sided tauberian theorems for Borel, Abel and Riemann-second-order transforms. Rajagopal C. T., Vijayaraghavan T.), Rend. Circolo mat. Palermo, 1955, 4, № 3, 309—322 (англ.)

Пусть для больших величин x функции $c_0(x)$, $c_1(x)$, ... удовлетворяют условиям:

$$c_n(x) \geqslant 0, \quad c_n(x) \to 0 \text{ при } x \to \infty, \quad \sum_{i=0}^{\infty} c_i(x) = 1.$$

Тогда для $\tau(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x)\, s_n$ при соответствующих условиях, из предположения $\tau(x) \to s$, следует $s_n \to s$. Авторы выводят условия, при выполнении которых из $\tau(x) \to -\infty$ следует $s_n \to -\infty$ и из $\overline{\lim}_{x\to\infty} \tau(x) < \infty$ следует $\underline{\lim}_{M\to\infty} \{\tau(x) - s_M\} \geqslant -\mu$.

Частным случаем преобразования $\tau(x)$ над $\{s_n\}$ являются преобразования Бореля — $B(x)$, Абеля — $A(x)$, а также Римана — $R(x)$, если полагать $c_n(x)$ соответственно равным:

$$e^{-x}x^n/n!;\ (1 - e^{-1/x})e^{-n/x},\ 2/\pi x\,[\sin^2(n/x)/(n/x)^2].$$

Рассматривая соответствующие функции $\Phi(x)$ для $B(x)$, $A(x)$ и $R(x)$, можно из доказанных общих теорем получить теоремы о борелевских, абелевых и римановых суммируемых рядах. Например, для преобразования Бореля авторы доказывают, что если выполнено тауберово условие

$$s_n - s_{n-1} \geqslant -W/(2\sqrt{n}),\ 0 \leqslant W < \infty,$$

тогда

$$B(x) - s_M \sum_{n=M}^{\infty} e^{-x}x^n/n! \geqslant {}^1/_2 W \sqrt{\log M} + O(1),$$
$$M \to \infty,$$

где

$$x = M + \sqrt{M \cdot \log M} + \eta \log M,\ \eta(4\eta - 1) = 0;$$

при дополнительном условии $B(x) < O(1)$, $x \to \infty$ дается более простое неравенство: $s_M \leqslant {}^1/_2 W \sqrt{\log M}$ $(M \to \infty)$. K. K. Chen

4945 Д. **Некоторые вопросы линейных матричных преобразований.** Волков И. И., Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., МГУ, М., 1955

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

4946. **Некоторые функциональные соотношения и обобщенные функции Уиттекера $M_{k,m}$.** Шарма, Сривастава (On certain functional relations and a generalization of the $M_{k,m}$ function. Sharma A., Srivastava H. M.), Ann. polon. math., 1956, 3, № 1, 76—86 (англ.)

Функции Бесселя—Майтланда

$$J_\nu^\lambda(z) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r z^r / r!\, \Gamma(\lambda r + \nu + 1)$$

разлагаются в ряд

$$J_\nu^\lambda(sm^\lambda t^\lambda) = \sum_{r=0}^{\infty} (1 - m^\lambda)^r r! s^r t^{\lambda r} J_{\nu+\lambda r}^\lambda(st^\lambda).$$

Для интегрального преобразования

$$H_t^{\nu,\lambda}[F(s)] = \int_0^\infty J_\nu^\lambda(st^\lambda)(st)^{\nu/2} F(s)\, ds$$

имеет место следующая теорема о свертках:

$$y^{(\mu+\nu+1)/2} H_y^{\mu+\nu+1,\lambda}\left\{\left[s^{-(\mu+\nu+1)/2} s^{\nu/2} F_1(s) \circ s^{\mu/2} F_2(s)\right]\right\} =$$
$$= y^{\nu/2} H_y^{\nu,\lambda}[F_1(s)] \circ y^{\mu/2} H_y^{\mu,\lambda}[F_2(s)],$$

где

$$A(x) \circ B(x) = \int_0^x A(\xi)\, B(x - \xi)\, d\xi.$$

Обобщенные функции Уиттекера $M_{\mu,\nu}^\lambda(t)$ определяются формулой

$$M_{\mu,\nu}^\lambda(t) = \frac{\Gamma(\lambda + 2\nu)}{\Gamma(\mu + \nu + {}^1/_2)}\, t^{{}^1/_2} e^{t^\lambda/2}\, H_t^{2\nu,\lambda}\left(s^{\mu - {}^1/_2} e^{-s^{1/\lambda}}\right).$$

В частности,

$$M_{(\nu+1)/\lambda,\,\nu/2}^\lambda(t) = \frac{\lambda\Gamma(\nu + \lambda)}{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{\lambda}\right)}\, t^{(\nu+1)/2} e^{-t^\lambda/2}.$$

Далее, при целом положительном m имеем

$$H_t^{\nu,\lambda}\left(s^{(\nu+m+1)/\lambda - \nu/2 - 1} e^{-s^{1/\lambda}}\right) = \lambda t^{\nu/2} e^{-t^\lambda} L_{m,\lambda}^\nu(t^\lambda),$$

где

$$L_{m,\lambda}^\nu(t) = \sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n a_n}{n!}\, t^n, \quad (-1)^n a_n =$$
$$= \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \binom{n}{r} (\lambda r + \nu + 1) \ldots (\lambda r + \nu + m).$$

Далее изучаются некоторые свойства полиномов $L_{m,\lambda}(t)$. Ю. Л. Рабинович

4947. **О коэффициентах асимптотических факториальных разложений.** Райни (On the coefficients in asymptotic factorial expansions. Riney T. D.), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, 7, № 2, 245—249 (англ.)

В известном асимптотическом разложении

$$\prod_{i=1}^{p} \Gamma(w + \sigma_i) \Big/ \prod_{j=0}^{q} \Gamma(w + \rho_j) =$$
$$= (2\pi)^{(1-\alpha)/2} \alpha^{\alpha w + \beta - {}^1/_2} \left[\sum_{m=0}^{M} \frac{c_w}{\Gamma(\alpha w + \beta + m)} + \right.$$
$$\left. + O\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha w + \beta + M + 1)}\right)\right],$$

где $0 \leqslant p \leqslant q$, σ_i и ρ_j — произвольные комплексные параметры, $c_0 = 1$, $\alpha = q + 1 - p$ и $\beta = \sum_{j=0}^{q} \rho_j - \sum_{i=1}^{p} \sigma_i + (1 - \alpha)/2$; находится следующее рекуррентное соотношение между коэффициентами:

$$c_m = -(m\alpha^a)^{-1} \sum_{n=0}^{m-1} c_n e(m, n),$$

где

$$e(m, n) = \sum_{j=0}^{q} D_j \Gamma(\beta - \alpha\rho_j + \alpha + m)/\Gamma(\beta - \alpha\rho_j + n),$$

а

$$D_j = \prod_{i=1}^{p} (\sigma_i - \rho_j) \Big/ \prod_{k=0,\, k\neq j}^{q} (\rho_k - \rho_j).$$

В. И. Левин

4948. Заметка о двух производящих функциях для функций Лежандра. Казаринов (A note on two generating functions for Legendre functions. Kazarinoff Nicholas D.), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, 7, № 2, 230—231 (англ.)

Указывается, что в примерах 14.14 и 14.16, иллюстрирующих теоремы 14.4 и соответственно 14.7 книги Трусделла (Truesdell C., A unified theory of special functions, Princeton University Press, 1948), допущены ошибки при вычислении. В заметке соответствующие результаты записаны с необходимыми поправками. Результат, отвечающий примеру 14.14, будучи правильно оформлен, совпадает с формулой, установленной Э. Л. Блохом (РЖМат, 1956, 543); отмечается, в связи с этим, что ею должна быть заменена формула 19.10 (17) в 3-м томе справочника Эрдейи (Erdelyi A., РЖМат, 1957, 3259 К). М. Н. Олевский

4949. Теоретико-групповое происхождение некоторых производящих функций. Уэйснер (Group-theoretic origin of certain generating functions. Weisner Louis), Pacif. J. Math., 1955, 5, Suppl. № 2, 1033—1039 (англ.)

Если ряд

$$g(x, y) = \sum_{\alpha} v_\alpha(x) y^\alpha \qquad (1)$$

представляет производящую функцию решений $v_\alpha(x)$ обыкновенного линейного дифференциального уравнения

$$L(x, d/dx, \alpha) v = 0, \qquad (2)$$

то $g(x, y)$ удовлетворяет уравнению в частных производных

$$L(x, \partial/\partial x, \quad y\partial/\partial y)\, g = 0. \qquad (3)$$

При построении решений вида (1) уравнения (3) можно использовать группу преобразований этого уравнения. Рассмотрим, например, гипергеометрическое уравнение

$$x(1-x) v'' + \{\gamma - (\alpha + \beta + 1) x\} v' - \alpha\beta v = 0. \qquad (4)$$

Решение, регулярное при $x = 0$, имеет вид $v = F(\alpha, \beta; \gamma; x)$. Заменив в уравнении (4) α на $-y\partial/\partial y$, получим оператор второго порядка

$$L = x(1-x)\,\partial^2/\partial x^2 + xy\partial^2/\partial x\partial y +$$

$$+ \{\gamma - (\beta + 1) x\}\, \partial/\partial x + \beta y \partial/\partial y.$$

Введем операторы первого порядка

$$A = y\partial/\partial y; \quad B = (x/y)\,\partial/\partial x - \partial/\partial y;$$

$$C = xy(1-x)\,\partial/\partial x + y^2\partial/\partial y + \gamma y - \beta x y.$$

Обозначим через S элементы группы Г, образуемой произведениями конечного числа множителей вида e^{aA}, e^{bB}, e^{cC}, e^{d}. Оператор L можно выразить через A, B и C:

$$xL = CB + A^2 + (\gamma - 1) A.$$

Устанавливается коммутативность оператора L со всеми элементами S группы Г. Поэтому, совершив преобразование $v = Su$ решения u пары уравнений $Lu = 0$, $Ru = 0$, где $R = r_1 A + r_2 B + r_3 C + r_4$, r_1, r_2, r_3, r_4 — рациональные числа, мы получим решение v уравнений $Lv = 0$, $SRS^{-1}v = 0$. Если $v(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)\, y^{n-\alpha}$ и если v регулярно при $x = 0$, то $g_n = c_n F(\alpha - n, \beta; \gamma; x)$, где c_n — постоянные, определяемые разложением $v(0, y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n y^{n-\alpha}$.

Например, положив $R = A + \alpha$, $S = S_{-1/w,\,1}$, получаем:

$$(1-y)^{\alpha+\beta-\gamma}[1 + (w-1)y]^{-\alpha}[1 + (x-1)y]^{-\beta} \times$$

$$\times F(\alpha, \beta; \gamma; \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\gamma + n - 1}{n} F(-n, \alpha; \gamma; w) \times$$

$$\times F(-n, \beta; \gamma; x)\, y^n,$$

где

$$\zeta = \frac{wxy}{[1 + (w-1)y][1 + (x-1)y]}, \quad 1 - \zeta =$$

$$= \frac{(1-y)[1 - (w-1)(x-1)y]}{[1 + (w-1)y][1 + (x-1)y]}; \quad |y| < \min[1, |1-x|^{-1}, |1-w|^{-1}, |1-x|^{-1}|1-w|^{-1}].$$

При

$$\beta = \alpha = \lambda, \quad \gamma = 2\lambda, \quad x = 1 - e^{2i\varphi}, \quad w = 1 - e^{2i\theta}$$

получим, учитывая выражения гиперсферических полиномов

$$P_n^{(\lambda)}(\cos\theta) = \binom{2\lambda + n - 1}{n} e^{-ni\theta} F(-n, \lambda; 2\lambda; 1 - e^{2i\theta})$$

и, заменив y на $e^{-i(\varphi+\theta)}y$:

$$[1 - 2y\cos(\theta - \varphi) + y^2]^{-\lambda} \times$$

$$\times F\left(\lambda, \lambda; 2\lambda; \frac{-4y\sin\theta\sin\varphi}{1 - 2y\cos(\theta - \varphi) + y^2}\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2\lambda + n - 1}{n} P_n^{(\lambda)}(\cos\varphi)\, P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)\, y^n;$$

$$|y| < |e^{i(\pm\varphi \pm \theta)}|.$$

Приводятся и другие примеры.

Ю. Л. Рабинович

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

4950. Сходимость в среднем рядов Фурье и преобразований Фурье. Кавата (Mean convergence of a Fourier series and a Fourier transform. Kawata Tatsuo), Kodai Math. Sem. Repts, 1955, 7, № 3-4, 71—78 (англ.)

Положим

$$\varphi(t) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} f(x)\, dx,$$

$$\psi(t) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} f(x) \lambda(x)\, dx,$$

где $\lambda(x)=1$, если $a<x<b$, $\lambda(x)=0$, если $x\overline{\in}(a, b)$;

$$R_n(x)=\int_{-N}^{N}\varphi(t)\,e^{-ixt}dt-\int_{-N}^{N}\psi(t)\,e^{-ixt}\,dt.$$

Доказываются следующие теоремы:
1. Пусть $f(x)\in L_p(-\infty,\ \infty)$, $f(x)\in L_r(a,\ b)$, где $1\leqslant p\leqslant 2$, $p\leqslant r$.
Если существуют константы S_1, S_2 такие, что

$$\int_0^t|f(b+x)-S_2|\,dx=O(t^\alpha),\quad t\to 0,\qquad(1)$$

$$\int_0^t|f(a-x)-S_1|\,dx=O(t^\alpha),\quad t\to 0,\qquad(2)$$

где $\alpha>1-1/r$, то выполняется равенство

$$\lim_{N\to\infty}\int_a^b|R_N(x)|^r\,dx=0.$$

2. Пусть дана 2π-периодическая функция $f(x)$ такая, что $f(x)\in L_r(a, b)$, где $(a, b)\in(-\pi, \pi)$, $p\leqslant r$. Если $\alpha>1-1/r$ и выполняются условия (1), (2), то имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b|S_n(x)-f(x)|^r\,dx,$$

где $S_n(x)$ — частные суммы ряда Фурье функции $f(x)$.
И. Е. Жак

4951. Об одной тауберовой теореме о свертках. Боянич, Юркат, Пейеримхофф (Über einen Taubersatz für Faltungen. Bojanić R., Jurkat W., Peyerimhoff A.), Math. Z., 1956, 65, № 2, 195—199 (нем.)
Как уточнение результатов Эрдёша (Erdös, J. Ind. Math. Soc., 1949, 13, 145—147), доказаны теоремы:
I. Пусть функция $A(t)$ имеет ограниченное изменение: $A(0)=0$;

$$A(t)=1/2\,(A(t+0)+A(t-0)),\quad t>0;$$

$$\int_0^x A(x-t)\,dA(t)=x^2/2+O(x),\quad x\to\infty.$$

1) Если при этом функция $A(t)$ не убывает при возрастании t, то

$$A(x)=x+O(1)\cdot x^{2/3}(\ln x)^{1/3},\quad x\to\infty.$$

2) Если же при $t_2\geqslant t_1\geqslant 0$ имеем

$$A(t_2)-A(t_1)\geqslant -K\cdot(t_2-t_1+1)$$

(или $A(t_2)-A(t_1)\leqslant K\cdot(t_2-t_1+1)$),

где $k>0$, и $\overline{\lim}_{t\to\infty}(\ln|A(t)|)/t\leqslant 0$,

то

$$A(x)=\pm x+O(1)\cdot x^{2/3}(\ln x)^{1/3},\quad x\to\infty.$$

II. Пусть $s_n=\sum_{\nu=0}^{n}a_\nu$; $\sum_{\nu=0}^{n}s_{n-\nu}a_\nu=n^2/2+O(n)$.

1) Если при этом $a_\nu\geqslant 0$, то

$$s_n=n+O(1)\cdot n^{2/3}(\ln n)^{1/3}.$$

2) Если $a_\nu\geqslant -K$ (или $a_\nu\leqslant K$), где $K>0$ и

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}\leqslant 1,\ \text{то}\ s_n=\pm n+O(1)\cdot n^{2/3}(\ln n)^{1/3},$$

$n\to\infty$.
В. А. Магарик

4952. Преобразования Гильберта в E^n. Зигмунд, (Hilbert transforms in E^n. Zygmund A.), Proc. Internat. Congr. Math. 1954. Vol. 3. Groningen — Amsterdam, 1956, 140—151 (англ.)
Рассматриваются, частично без доказательств, некоторые результаты автора и Кальдерона (A. P. Calderón), отчасти опубликованные ранее (РЖМат, 1955, 5116; 1956, 1238, 5918).
Пусть $f(x)$ — функция точки $x=(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ евклидова пространства n измерений E_n. Преобразование Гильберта от $f(x)$ в E_n определяется как свертка функции $f(x)$ с некоторым ядром K:

$$\tilde f=f*K=\int f(y)\,K(x-y)\,dy.\qquad(1)$$

Ядра K возникают из различных задач теории потенциала и в важнейших случаях имеют вид $K(x)=\Omega(x')/|x|^n$, где Ω определено на единичной сфере $\sum: |x|=1$, а x' означает проекцию x на $\sum$. Ядро K, вообще говоря, не интегрируемо в окрестности $x=0$ и интеграл (1) следует рассматривать в смысле главного значения.
На ядро K накладываются два условия: 1) интеграл от Ω, распространенный по $\sum$, равен нулю, 2) Ω удовлетворяет условию Липшица с положительным показателем.
Приводятся следующие теоремы:
1. Пусть K удовлетворяет условиям 1) и 2). Пусть, далее, $f\in L_p$, $1\leqslant p<\infty$ и

$$f_\varepsilon(x)=\int_{|x-y|>\varepsilon}f(y)\,K(x-y)\,dy.$$

Тогда $\tilde f(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\tilde f_\varepsilon(x)$ существует почти всюду. Если $1<p<\infty$, то, кроме того,

$$\|\tilde f_\varepsilon\|_p\leqslant A_p\|f\|_p,\ \|\tilde f\|_p\leqslant A_p\|f\|_p,\ \lim_{\varepsilon\to+0}\|f-\tilde f_\varepsilon\|_p=0\ \text{и}$$

$$\|\tilde f_*\|_p\leqslant A_p\|f\|_p,\qquad(2)$$

где

$$\tilde f_*(x)=\sup_{\varepsilon>0}\Big|\int_{|x-y|>\varepsilon}f(y)\,K(x-y)\,dy\Big|.$$

Постоянные A_p зависят только от p и ядра K.
2. Пусть Ω — нечетная функция и $\Omega(x')$ интегрируема на $\sum$ (интеграл от Ω по $\sum$ равен нулю). Пусть, далее, $f\in L_p$, $1<p<\infty$. Тогда интеграл (1) сходится почти всюду. Кроме того, функция $\tilde f_*$ удовлетворяет неравенству (2).
3. Пусть $\Omega(x')\ln^+|\Omega(x')|$ интегрируемо на $\sum$ и интеграл от Ω по $\sum$ равен нулю. Тогда имеют место заключения теоремы 1 при любом $f\in L_p$, $p>1$.
Далее рассматриваются: 1) случай периодической функции f, 2) дискретное преобразование Гильберта и 3) так называемое радиальное ядро, имеющее сходство с ядром Гильберта. Свойства радиального ядра охватываются следующими двумя теоремами:

4. Пусть $h(t)$ является преобразованием Фурье—Стилтьеса на прямой

$$h(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{iut}d\gamma(u), \qquad (3)$$

где

$$\int_{-\infty}^{\infty}|d\gamma(u)|=V<\infty.$$

Тогда для любого $f\in L_p(-\infty,+\infty)$, $p>1$, интеграл

$$F(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)\frac{h(t)}{t}\,dt$$

сходится почти всюду и $\|F\|_p\leqslant A_pV\|f\|_p$.

5. Пусть $f\in L_p(E_n)$, $p>1$. Пусть, далее, $h(t)$ определенная равенством (3), является нечетной функцией от t, а $\Omega(x')$ — четная и интегрируемая на $\sum$. Тогда интеграл

$$\int_{E_n} f(x+y)\frac{h(|y|)}{|y|^n}\,\Omega(y')\,dy$$

сходится почти всюду и его значение $\tilde{f}(x)$ удовлетворяет неравенству $\|\tilde{f}\|_p\leqslant A_pV\|\Omega\|_1\|f\|_p$.

В заключение указывается отношение преобразования Гильберта к теории потенциала. Рассматривается потенциал

$$u(x)=u(\xi_1,\ldots,\xi_n)=\int_{E_n}|x-y|^{2-n}f(y)\,dy.$$

Приводится теорема:

6. Если $|f|\ln^+|f|$ интегрируемо, то почти в любом подпространстве $\xi_3=\xi_3^0,\ldots,\ \xi_n=\xi_n^0$ функция $u(\xi_1,\xi_2,\xi_3^0,\ldots,\xi_n^0)$ от ξ_1, ξ_2 абсолютно непрерывна и имеет второй дифференциал почти всюду в ξ_1, ξ_2.

Н. А. Бразма

4953. Линейная, с входа контролируемая переменная цепь. Джефри, Кейзер (The linear, input-controlled, variable-pass network. Jeffrey Alan, Keiser B. E.), IRE Trans. Inform. Theory, 1956, 2, № 1, 42—44 (англ.)

В дополнение к ранней работе Кейзера (РЖЭлектротехн, 1956, 15682) приводятся два доказательства теоремы: Если $F(t)$ — ограниченная, непрерывная, однозначная функция от t, то

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}F(t)\,dt=\lim_{T\to\infty}\frac{\alpha}{T}\int_{-T}^{T}\int_{-\infty}^{t}F(x)\,e^{-2\alpha(t-x)}\,dx\,dt.$$

$$(0<\alpha<\infty)$$

Второе из приведенных доказательств теоремы требует дополнительного предположения непрерывности и ограниченности $F'(t)$. Указывается возможность обобщения теоремы для суммируемой функции $F(t)$.

Н. А. Бразма

См. также: 4753, 4772, 4846, 4857, 5200—5204, 5206—5209.

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

4954. Заметка о полугруппах сжатий. Рёйтер (A note on contraction semigroups. Reuter G. E. H.), Math. scand., 1955, 3, № 2, 275—280 (англ.)

Положительный линейный оператор P в абстрактном (L)-пространстве X (Биркгоф Г., Теория структур, М., Изд-во ин. лит., 1952, гл. XV), удовлетворяющем условиям I—IX Какутани (Kakutani S., Ann. Math., 1941, 42, 523—537), называется оператором сжатия (перехода), если $\|Px\|\leqslant\|x\|$ (соответственно $\|Px\|=\|x\|$) при $x\geqslant 0$. Семейство операторов сжатия (перехода) P_t $(t\geqslant 0)$ называется полугруппой сжатий (переходов), если $P_0=I$, $P_{t+s}=P_tP_s$ $(t\geqslant 0,\ s\geqslant 0)$ и $\|P_tx-x\|\to 0$ при любом $x\in X$, когда $t\to+0$. Полугруппа сжатий $\sum'=\{P_t'\}$ называется доминирующей над полугруппой сжатий $\sum=\{P_t\}$, если $P_t'x\geqslant P_tx$ при всех $x\geqslant 0$ и $t\geqslant 0$.

Доказывается следующее предложение: Пусть $\sum$ — полугруппа сжатий с производящим оператором Ω. Тогда: а) если $\sum$ — полугруппа переходов, то любая полугруппа сжатий $\sum'$, доминирующая над $\sum$, совпадает с $\sum$; б) если $\sum$ не является полугруппой переходов, то оператор Ω_c, определенный равенством $\Omega_cx=\Omega x-(\|(\Omega x)^+\|-\|(\Omega x)^-\|)\,c$ $(x\in D(\Omega))$, где $c\geqslant 0$ и $0<\|c\|\leqslant 1$, служит производящим оператором некоторой полугруппы сжатий $\sum_c$, доминирующей над $\sum$ и отличной от $\sum$. При $c_1\neq c_2$ полугруппа $\sum_{c_1}$ отлична от $\sum_{c_2}$; $\sum_c$ является полугруппой переходов тогда и только тогда, когда $\|c\|=1$ (отсюда, в частности, следует, что когда X не одномерно, то существует бесконечно много различных полугрупп переходов, доминирующих над $\sum$).

Д. А. Васильков

4955. Об одной теореме Б. Надя об отображении. Лаугвиц (Über einen Abbildungssatz von B. Sz.-Nagy. Laugwitz Detlef), Math. Z., 1956, 64, № 1, 72—78 (нем.)

Как обобщение одного результата референта (см. Vincze St., Szüsz P., Acta scient. math. Szeged, 1951, 14, 96—100; Haupt O., Sitzungsber. math.-naturwiss. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München, 1951 (1952), 147—161; РЖМат, 1954, 4483) доказывается следующая теорема:

Пусть в линейном нормированном пространстве X задана действительная функция $\lambda(x)$, обладающая следующими свойствами: $\lambda(x)>0$, если $x\neq 0$; $\lambda(rx)=\lambda(x)$ для $r>0$. Рассматривается отображение $x\to f(x)=\lambda(x)\,x$. Для существования постоянной M, удовлетворяющей условию $\|f(x)-f(x')\|\leqslant M\|x-x'\|$, необходимо и достаточно, чтобы имелись в X такие звездные области S_1 и S_2 с непрерывной границей (O — их внутренняя точка) и такие окрестности U_1, U_2 точки O в X, что: 1) $f(S_1)=S_2$; 2) для любого двумерного подпространства $L\subset X$, проходящего через точку O, граница множества $S_i\cap L$ имеет только такие свободные касательные, которые не пересекают окрестности U_i, $i=1,2$ (Прямая называется свободной касательной множества Y, если существуют в Y такие последовательности $\{y_n\}$, $\{y_n'\}$ сходящиеся к одной и той же точке, что угол, составляемый хордой y_ny_n' с этой прямой, стремится к нулю при $n\to\infty$).

B. Sz.-Nagy

4956. Об одной теореме Мазура и Орлича. П т а к В л а с т и м и л (On a theorem of Mazur and Orlicz. P t á k V l a s t i m i l), Studia math., 1956, 15, № 3, 365—366 (англ.)

Дается очень простое доказательство следующей теоремы Мазура и Орлича (РЖМат, 1955, 1376): Пусть $\omega(x)$ — функционал в линейном пространстве X, удовлетворяющий условиям: $\omega(x_1+x_2) \leqslant \omega(x_1)+\omega(x_2)$ и $\omega(tx)=t\omega(x)$ для $t>0$. Пусть далее $c(\tau)$ и $x(\tau)$ — функции, определенные на произвольном множестве T и имеющие соответственно действительные значения и значения в X. Необходимым и достаточным условием существования дистрибутивного функционала ξ, удовлетворяющего условиям $\xi(x) \leqslant \omega(x)$, $\xi(x(\tau)) \geqslant c(\tau)$ ($\tau \in T$), является выполнение неравенства

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i c(\tau_i) \leqslant \omega\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x(\tau_i)\right)$$

для произвольных $\tau_1, \ldots, \tau_n \in T$ и неотрицательных $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Введением функционала

$$p(x) = \inf\left[\omega\left(x + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x(\tau_i)\right) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i c(\tau_i)\right]$$

с указанными выше λ_i и τ_i автор непосредственно сводит теорему к классической теореме Банаха.

A. Alexiewicz

4957. Некоторые замечания о пространстве Марцинкевича—Орлича. А л ь б р ы х т (Some remarks on the Marcinkiewicz—Orlicz space. A l b r y c h t J.), Бюл. Польской АН, Отд. 3, 1956, 4, № 1, 1—3; Bull. Acad. polon. sci., cl. 3, 1956, 4, № 1, 1—3 (англ.)

Пусть M и N — дополнительные функции в смысле Бирнбаума и Орлича (Birnbaum Z. M., Orlicz W., Studia Math., 1931, 3, 8). Автор обозначает через $\overline{M}$ класс всех измеримых функций $x=x(t)$, для которых $\overline{\lim}_{T\to\infty} (2T)^{-1}\int_{-T}^{T} M(|x(t)|)\,dt < \infty$; аналогично определяется класс $\overline{N}$. Оба класса будут выпуклыми (но не обязательно линейными) множествами. Пусть $\mathscr{M}$ — класс всех таких измеримых функций $x=x(t)$, что $\overline{\lim}_{T\to\infty} (2T)^{-1}\left|\int_{-T}^{T} xy\,dt\right| < \infty$ для каждой функции $y \in \overline{N}$.

Это множество линейно и $\overline{M} \subset \mathscr{M}$; функция x принадлежит $\mathscr{M}$ тогда и только тогда, когда существует такая постоянная $l>0$, что $lx \in \overline{M}$. Вводятся две псевдонормы в $\mathscr{M}$:

$$\|x\| = \sup\left\{\overline{\lim_{T\to\infty}} (2T)^{-1}\left|\int_{-T}^{T} xy\,dt\right| : y \in \overline{N}\right\},$$

$$\overline{\lim_{T\to\infty}} (2T)^{-1}\int_{-T}^{T} N(|y|)\,dt \leqslant 1\Big\},\quad \|x\|^* = \inf\Big\{m : m>0,$$

$$\overline{\lim_{T\to\infty}} (2T)^{-1}\int_{-T}^{T} M(m^{-1}|x|)\,dt \leqslant 1\Big\}.$$

Они эквивалентны $\|x^*\| \leqslant \|x\| \leqslant 2\|x\|^*$. Если $\|x_n\| \to 0$, то $\lim_{n\to\infty} \overline{\lim_{T\to\infty}} (2T)^{-1}\int_{-T}^{T} M(|x_n|)\,dt = 0$. Обратное верно только при выполнении следующего условия (Δ_2): $M(2u) \leqslant KM(u)$ для достаточно больших u. В этом случае $\overline{M} = \mathscr{M}$.

Если $<\mathscr{M}_1, \|\ \|_1>$ и $<M_2, \|\ \|_2>$ — пространства описанного выше типа, порожденные соответственно функциями M_1 и M_2, то $\mathscr{M}_1 \subset \mathscr{M}_2$, когда существует такая постоянная $l>0$, что $M_1(u) \leqslant lM_2(u)$ для достаточно больших u; при этом $\|x\|_1 \leqslant l\|x\|_2$, где l — надлежаще выбранная постоянная.

Обозначив через $\mathscr{Q}$ множество функций с нулевой псевдонормой $\|\ \|$, автор называет фактор-пространство $M/\mathscr{Q}$ пространством Марцинкевича—Орлича. Это пространство всегда полно и несепарабельно. Доказательства не приводятся.

A. Alexiewicz

4958. К теореме о среднем значении. М л я к (Note on the mean value theorem. M l a k W.), Ann. polon. math., 1956, 3, № 1, 29—31 (англ.)

Доказывается теорема о среднем значении для функций $x(t)$ действительного переменного, определенных на интервале Δ и принимающих значения в локально выпуклом линейном топологическом пространстве X. Пусть $\varphi(t)$ — действительная непрерывная строго возрастающая функция.

Т е о р е м а. Пусть A — замкнутое выпуклое множество в X. Если для каждого функционала ξ, линейного в X, существует такое не более чем счетное множество $\Delta_\xi \subset \Delta$, что для каждого $t \in \Delta \setminus \Delta_\xi$ имеются $y_n \in A$ и $\tau_n \to 0$, для которых

$$\xi\{[x(t+\tau_n)-x(t)]/[\varphi(t+\tau_n)-\varphi(t)] - y_n\} \to 0,$$

то для произвольных различных t_1, $t_2 \in \Delta$ будет

$$[x(t_1)-x(t_2)]/[\varphi(t_1)-\varphi(t_2)] \in A.$$

Этот результат обобщает теоремы Важевского и референта, относящиеся к случаю банаховых пространств.

A. Alexiewicz

4959. О линейных функциональных уравнениях в пространствах типа (B_0). А л ь т м а н (On linear functional equations in (B_0)-spaces. A l t m a n M.), Studia math., 1956, 15, № 2, 131—135 (англ.)

Пусть X — пространство типа (B_0), т. е. линейное полное метрическое пространство с топологией, определенной последовательностью псевдонорм. По определению, эндоморфизм T имеет конечный порядок, если имеется такое целое $\mu>0$, что из $T^{\mu+1}(x)=0$ следует $T^{\mu}(x)=0$. Наименьшее целое μ, обладающее этим свойством, называется порядком эндоморфизма T.

Рассматривается класс всех линейных эндоморфизмов T конечного порядка, для которых сопряженное преобразование $\overline{T}$ имеет конечный порядок $\bar{\mu}$ и области значений эндоморфизмов T^k ($k=1,\ldots,\bar{\mu}+1$) замкнуты. Доказывается, что некоторые теоремы теории Рисса—Шаудера справедливы и для таких эндоморфизмов T. Например, имеем $\bar{\mu}=\mu$, $T^n(X)=T^{\mu}(X)$ для $n>\mu$ и $T^{n+1}(X) \neq T^n(X)$ для $n<\mu$. Эндоморфизм T можно представить в виде $T=H+K$, где H обладает непрерывным обратным и область значений эндоморфизма K есть множество нуль-элементов эндоморфизма T (т. е. множество всех элементов X, для которых $T^{\mu}(x)=0$). Эндоморфизм $I-T$ (где I — тождественное преобразование) есть сумма эндоморфизмов B_1 и B_2 со следующими свойствами: 1) B_1 и B_2 отображают в 0 соответственно все нуль-элементы и все элементы ядра (т. е. элементы вида $T^{\mu}(x)$); 2) для каждого x элемент $B_1(x)$ есть элемент ядра, а $B_2(x)$ есть нуль-элемент; 3) эндоморфизмы B_1 и B_2 ортогональны.

R. Sikorski

4960. К теории Рисса—Шаудера линейных операторных уравнений в пространствах типа (B_0). А л ь т м а н M., Studia math., 1956, 15, № 2, 136—143

Пусть X — пространство типа (B_0) (т. е. линейное полное метрическое пространство с топологией, определенной последовательностью псевдонорм) и U — ли-

нейный вполне непрерывный эндоморфизм пространства X (т. е. линейное преобразование пространства X в себя, отображающее некоторую окрестность точки $0 \in X$ в компактное множество). Если $I - U = AB = BA$, где A, B — линейные эндоморфизмы пространства X и I — тождественное преобразование, то для каждого из эндоморфизмов A, B справедливы выводы теории Рисса-Шаудера линейных уравнений в банаховых пространствах.

Эта теорема содержит как частный случай следующий результат С. М. Никольского (Докл. АН СССР, 1936, 2, 315—319): Если оператор T^n вполне непрерывен, то для $I - T$ справедливы выводы теории Рисса—Шаудера. R. Sikorski

4961. Об относительно полных B_0-пространствах. Словиковский, Завадовский (Note on relatively complete B_0-spaces. Słowikowski W., Zawadowski W.), Studia math., 1956, 15, № 3, 267—272 (англ.)

Пусть $\langle X, \| \|_n \rangle$ — B_0-пространство с последовательностью псевдонорм $\| \|_n$, определяющей его топологию. Авторы решают проблему о нахождении условий, при которых в X существует последовательность $\| \|'_n$ псевдонорм, определяющая в X ту же топологию, что и последовательность $\| \|_n$, и, кроме того, фактор-пространства X/I_n (где $I_n = \{x : \|x\|'_n = 0\}$) являются полными относительно норм $\| \|'_n$. Такие пространства называются относительно полными.

Теорема. Пространство $\langle X, \| \|_n \rangle$ является относительно полным тогда и только тогда, когда существует такая двойная последовательность $\{a_{nk}\}$ положительных чисел, что

$$\sup_n [a_{nk} \inf \{\|y + x\|_n : 0 = \|y\|_k\}] < \infty$$

для каждых x и k.

Пространство функций, аналитических в круге $|z| < 1$, с псевдонормами

$$\|x\|_k = \sup \{|x(z)| : |z| \leqslant 1 - 1/k\}$$

будет примером B_0-пространства, не являющегося относительно полным. A. Alexiewicz

4962. О представлении резольвенты. Лежанский (On a representation of the resolvent. Leżański T.), Studia math., 1956, 15, № 2, 144—147 (англ.)

Автор дает достаточное условие разрешимости уравнения $Ax = y_0$ и некоторые достаточные условия существования обратного элемента или дисольвенты элемента банаховой алгебры.

I. Пусть R — банахова алгебра, $A \in R$, $F(A) = \sum_{n=1}^{\infty} A^n/n!$ и $V(t, A) = \int_0^t e^{-sF}(-sA)\, ds$. Если интеграл $V(t, A)$ слабо сходится к $V \in R$ при $t \to \infty$, то V будет дисольвентой элемента A, т. е. $A + V + AV = A + V + VA = 0$.

II. Пусть R — банахова алгебра с единицей, $A \in R$ и $U(t, A) = \int_0^t \exp(-sA)\, ds$. Если интеграл $U(t, A)$ слабо сходится к $U \in R$ при $t \to \infty$, то $U = A^{-1}$.

III. Пусть R — банахова алгебра эндоморфизмов A банахова пространства X и пусть $y_0 \in X$. Если элемент $U(t, A)(y_0)$ слабо сходится к $x_0 \in X$ при $t \to \infty$, то $Ax_0 = y_0$. Если элемент $V(t, A)(y_0)$ слабо сходится к $x_0 \in X$ при $t \to \infty$, то $Ay_0 + x_0 + Ax_0 = 0$. R. Sikorski

4963. Вполне непрерывные и квазивполне непрерывные элементы банаховой алгебры. Фояш (Elementi completamente continui e quasi completamente continui di un'algebra di Banach. Foiaș Ciprian), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sc. fis., mat. e natur., 1956, 20, № 2, 155—160 (итал.)

Пусть B — банахова алгебра. Автор вводит класс элементов, имеющих такие же свойства, что и вполне непрерывные операторы в банаховом пространстве. Пусть I — множество элементов $j \in B$, удовлетворяющих соотношению вида $(xjy)^2 = f_j(xy)\, xjy$, $f_j \in B^*$ при любых x, $y \in B$, и пусть K — множество конечных сумм элементов из I. Для каждого $x \in B$ положим

$$Q(\lambda;\ x) = \lambda^{-1}[(e - \lambda x)^{-1} - e].$$

Теорема 2. Если $x \in K$, то функция $Q(\lambda;\ x)$ рациональна и коэффициенты ее главных частей принадлежат множеству K; если $\lambda \in \rho(x)$ (резольвентное множество элемента x), то также $Q(\lambda;\ x) \in K$.

Теорема 3. Если $x \in K$ и $\|z - x\| \leqslant 1/\omega$, то функция $Q(\lambda;\ z)$ мероморфна в круге $|\lambda| < \omega$, и коэффициенты ее главных частей принадлежат множеству K.

Теорема 4. Если существует такой элемент $x \in \overline{K}$, что $\|a^m - x\| < 1$ для некоторого m и $\|a^n\| \leqslant N$ для каждого n, то $(e - \lambda a)^{-1}$ существует в круге $|\lambda| \leqslant 1$, за исключением, может быть, конечного числа точек $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ с модулем 1. При этом

$$a^n = \sum_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha^{-n} j_\alpha + c^n, \text{ где } j_\alpha^2 = j_\alpha,$$

$$j_\alpha j_\beta = 0\ (\alpha \neq \beta),\ j_\alpha c = c j_\alpha = 0,\ j_\alpha \in K\ (\alpha = 1, \ldots, k),$$

$$\|c^n\| \leqslant M(1 + \varepsilon)^{-n}\ (\varepsilon > 0).$$

G. Marinescu

4964. Теорема об операторных алгебрах. Огасавара (A theorem on operator algebras. Ogasawara Tôzirô), J. Sci. Hiroshima Univ., 1955, A18, № 3, 307—309 (англ.)

Доказывается следующая теорема: Пусть A — полное нормированное кольцо с инволюцией, удовлетворяющее условию $\|x^*x\| = \|x\|^2$ для всех $x \in A$, а A^+ — совокупность всех неотрицательных эрмитовых элементов кольца A. Тогда: а) если $x \geqslant y$, x, $y \in A^+$, то $x^{1/2} \geqslant y^{1/2}$; б) если для всех x, $y \in A^+$ из $x \geqslant y$ следует $x^2 \geqslant y^2$, то кольцо A коммутативно (неравенство $x \geqslant y$ означает, что $x - y \in A^+$).

Утверждение а) доказывается также для неограниченных самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.

В примечании к корректуре автор отмечает, что утверждение (а) содержится как частный случай в одной теореме Хейнца (Heinz E., Math. Ann., 1951, 123, 415—438, § 1, Satz 2). M. A. Наймарк

4965. Заметка о неприводимом разложении положительного линейного функционала. Умэгаки (Note on irreducible decomposition of a positive linear functional. Umegaki Hisaharu), Kōdai Math. Sem. Repts., 1954, № 1, 25—32 (англ.)

Рассматривается D^*-алгебра, т. е. кольцо $\mathfrak{A}$ с инволюцией $x \to x^*$, с множеством $\{e_\alpha\}$, $\alpha \in D$ (D — направленное множество), аппроксимирующим единицу (т. е. $e_\alpha^* = e_\alpha$, $\|e_\alpha\| \leqslant 1$, $\|e_\alpha x - e_\alpha\| \to 0$ для всех $x \in \mathfrak{A}$), и с группой G таких автоморфизмов $x \to x^s$ в $\mathfrak{A}$, что $\|x^s\| = \|x\|$ и $(x^s)^t = x^{st}$ для всех $x \in \mathfrak{A}$ и $s, t \in G$. Линейный функционал τ на $\mathfrak{A}^2$ называется полуследом на $\mathfrak{A}$, если $\tau(x^*x) \geqslant 0$, $\tau(yx) = \tau(xy) = \overline{\tau(y^*x^*)}$, $\tau((e_\alpha x)^* e_\alpha x) \to \tau(x^*x)$, $\tau((xy)^*(xy)) \leqslant \|x\|^2 \tau(y^*y)$, и G-стационарным полуследом, если, кроме того, $\tau(x^s y^s) = \tau(xy)$ для всех $x, y \in \mathfrak{A}$ и $s \in G$. По G-стационарному полуследу τ обычным образом строится гильбертово пространство $\mathfrak{H}$ — пополнение факторпространства $\mathfrak{A}^0 = \mathfrak{A}/\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N} = \{x \in \mathfrak{A} : \tau(x^*x) = 0\}$ по скалярному произведению $(x^0, y^0) = \tau(y^*x)$, x_0,

$x^0, y^0 \in \mathfrak{A}, x \in x^0, y \in y^0$, и операторы $x^a y^0 = (xy)^0$, $x^b y^0 = (yx)^0$, $U_s y^0 = (y^s)^0$, $jx^0 = (x^*)^0$, распространяемые по непрерывности до операторов в $\mathfrak{H}$. Слабо замкнутые кольца W^a, W^b, W_G, порожденные соответственно множествами $\{x^a, x \in \mathfrak{A}\}$, $\{x^b, x \in \mathfrak{A}\}$, обладают следующими свойствами: 1) $W^a = W^{b'}$; 2) $W^{a'} = W^b$; 3) $W^a \cap W^b \cap W'_G = \{\lambda 1\}$ тогда и только тогда, когда функционал τ является G-эргодичным, т. е. когда τ не принадлежит отрезку, составленному из G-стационарных полуследов; при этом F' обозначает совокупность всех ограниченных линейных операторов в $\mathfrak{H}$, перестановочных со всеми операторами из F.

Пусть $\mathfrak{B}$ — совокупность всех ограниченных элементов $v \in \mathfrak{H}$ (т. е. таких, что $\|x^b v\| < M \|x^0\|$); им отвечают такие операторы v^a, v^b, что $v^a x^0 = x^b v$, $v^b x^0 = x^a v$; $\mathfrak{B}$ есть кольцо с произведением $v_1 v_2 = v_1^a v_2 = v_2^b v_1$ и инволюцией $v^* = jv$.

Пусть далее, $\mathfrak{G}$ — унитарная группа, порожденная всеми операторами $U_s, s \in G$ и $U^{\#} = UjUj$, где U — унитарный оператор из W^a, Z — оператор проектирования на $\mathfrak{z} = \{\xi; U'\xi = \xi$ для всех $U' \in \mathfrak{G}\}$. В $\mathfrak{B}^a = \{v^a, v \in \mathfrak{B}\}$ вводится операция $(v^a)^{\S} = (Zv^a)$, которая распространяется по непрерывности на замыкание $\mathfrak{R}$ кольца $\mathfrak{B}^a$ по норме оператора. Доказывается, что: 1) если $A \in \mathfrak{R}^{\S}$, то $A^{\S} = A$; 2) $A^{*\S} = A^{\S *}$ и $(A^*A)^{\S} \geqslant 0$; 3) $(UAU^{-1})^{\S} = A^{\S}$ для всех унитарных операторов $U \in W^a$ и всех $U = U_s$, $s \in G$; 4) $(AB)^{\S} = (BA)^{\S}$ и $(A^{\S}B)^{\S} = (AB^{\S})^{\S} = A^{\S}B^{\S}$ для всех $A, B \in \mathfrak{R}$; 5) $(A\xi, \xi) = (A^{\S}\xi, \xi)$ для всех $A \in \mathfrak{R}$ и $\xi \in \mathfrak{z}$; 6) если, кроме того, выполнено следующее условие (A): множество $\{x^a \mathfrak{z}, x \in \mathfrak{A}\}$ плотно в $\mathfrak{H}$, то отображение $v^a \to v^{a\S}$ сильно непрерывно на сфере в $\mathfrak{B}^a$; 7) условие (A) выполнено, если множество $\{e_\alpha\}_{\alpha \in D}$, аппроксимирующее единицу, можно выбирать так, что e_α принадлежит центру кольца $\mathfrak{A}$ и $e_\alpha^s = e_\alpha$ для всех $\alpha \in D$ и всех $s \in G$ (условие (B)); 8) если выполнено условие (A) или (B), то отображение § единственным образом распространяется до отображения кольца W^a на $W^{\S} = W^a \cap W^b \cap W'_G$, обладающего свойствами 1) — 5) (с W^a вместо $\mathfrak{R}$); при этом $1^{\S} = 1$ и $(A^*A)^{\S} = 0$ для $A \in W^a$ лишь при $A = 0$; 9) если τ — некоторый G-стационарный полуслед на $\mathfrak{A}$ и Ω — пространство характеров на $\mathfrak{R}$, то на Ω существует такая положительная мера Радона ν, что $\tau(xy) = \int_\Omega \pi_\omega(xy)\, d\nu(\omega)$ для всех $x, y \in \mathfrak{A}$ и почти все (по мере $d\nu(\omega)$) π_ω суть G-эргодичные следы на $\mathfrak{A}$. Указывается на возможность применения этого последнего результата к эргодическому разложению инвариантной регулярной меры в сепарабельном локально компактном пространстве с группой гомеоморфизмов и к эргодическому разложению меры Хара на локально компактной группе.

В статье много опечаток; кроме того, в доказательствах имеются мелкие ошибки, которые, впрочем, легко исправить без существенного изменения доказательств.

М. А. Наймарк

4966. Причинность и аналитичность. Фурес, Сигал (Causality and analyticity. Fourès Y., Segal I. E.), Trans. Amer. Math. Soc., 1955, 78, № 2, 385—405 (англ.)

Рассматривается отображение T («система» в терминологии авторов) некоторого класса I функций на вещественной векторной группе G в другой такой класс O; при этом предполагается, что в G выделен замкнутый выпуклый конус C, содержащий внутреннюю точку. Система T называется: а) сильно причинной, если из $f_1, f_2 \in I$, $f_1 = f_2$ на $a - C$ при некотором $a \in G$ следует, что также $Tf_1 = Tf_2$ на $a - C$; б) однородной, если отображение T перестановочно со всеми сдвигами $(U_a f)(x) = f(x + a)$; в) гильбертовой, если I, O — линейные многообразия в гильбертовом пространстве H вектор-функций на G со значениями из некоторого гильбертова пространства K и со скалярным произведением $(f_1, f_2)_H = \int_G (f_1(g), f_2(g))_K\, dg$, $\int_G (f_1(g),$. Далее гильбертова система T называется: а) непрерывной (замкнутой), если T — непрерывный (соответственно, замкнутый) оператор в H; б) причинной (относительно данного конуса), если выполнены условия: 1) из $f \in I$, $f = 0$ вне $a + C$ следует $Tf = 0$ вне $a + C$; 2) совокупность всех указанных в условии 1) вектор-функций Tf порождает все пространство $L_2(a + C)$.

Основные результаты:

1. Для всякой замкнутой однородной гильбертовой системы T существует такая операторная функция $T(\chi)$ на группе характеров G^* группы G, значения которой являются замкнутыми операторами в K, что если $f \in I$ и $\hat{f}$ — преобразование Фурье вектор-функции f, то для почти всех $\chi \in G^*$ вектор $\hat{f}(\chi)$ находится в области определения оператора $\hat{T}(\chi)$ и преобразование Фурье вектор-функции Tf есть $\hat{T}(\chi)\hat{f}(\chi)$.

Функция $\hat{T}(\chi)$ называется определяющей функцией (термин референта, в оригинале: gain function) системы.

2. Непрерывная однородная система причинна относительно данного конуса C тогда и только тогда, когда ее определяющая функция $\hat{T}(\chi)$ имеет ограниченное аналитическое продолжение на множество Γ всех таких комплексных векторов $\chi_1 + i\chi_2$, $\chi_1, \chi_2 \in G^*$, что $\chi_1(x) \geqslant 0$ для всех $x \in C$.

3. Если для замкнутой однородной системы в $L_2(G)$ существует отличная от нуля функция $f \in L_2(G) \cap D_T$, равная нулю вне конуса C, то определяющая функция этой системы аналитически продолжается на множество Γ. Обратно, если функция φ аналитична в открытой части множества Γ и удовлетворяет неравенству вида $|\varphi(z)| \leqslant \mu e^{\|z\|^\alpha}$ (где $\|z\|$ — обычная евклидова норма в n-мерном пространстве, а μ, α — положительные постоянные, $\alpha < 1$), то φ есть аналитическое продолжение определяющей функции некоторой замкнутой однородной системы, причинной относительно конуса C.

4. Пусть C^* — совокупность всех таких векторов $\chi \in G^*$, что $\chi(x) \geqslant 0$ для всех $x \in C$, и пусть $p(\chi)$ — полином на G^*. Замкнутая однородная система в $L_2(G)$, определяющая функция которой есть p^{-1}, тогда и только тогда причинна относительно C, когда p не имеет нулей в открытой части множества Γ. Это предложение, устанавливающее связь между гиперболичностью системы дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами и причинностью ее оператора Грина, близко к соответствующим результатам Гординга (Gårding L., Acta Math., 1951, 85, 1—62) и Лере (Leray J., C. R. Acad. sci., 1952, 234, 1112—1115).

5. Непрерывная однородная система T в $L_2(G)$ имеет единственную область зависимости, содержащуюся во всяком ядре системы. При этом ядром системы T называется всякое замкнутое выпуклое множество N в G, обладающее тем свойством, что если $f \in D_T$ и $f = 0$ вне компактного множества $A \subset G$, то $Tf = 0$ вне $A + N$; минимальное ядро (если оно

существует) называется областью зависимости системы T. М. А. Наймарк

4967. Интеграл Пуассона—Стилтьеса и его применение в спектральной теории гильбертова пространства. Неванлинна, Ниэминен (Das Poisson—Stieltjes'sche Integral und seine Anwendung in der Spektraltheorie des Hilbert'schen Raumes. Nevanlinna F., Nieminen T.), Suomalais. tiedeakat. toimituks., 1955, Sar. A I, № 207, 38 S. (нем.)

Как известно, каждая гармоническая положительная функция в единичном круге комплексной плоскости допускает представление в виде интеграла Пуассона—Стилтьеса. Из получающейся формулы можно, как заметили впервые Купман и Дуб (Koopman B. O., Doob J. L, Bull. Amer. Math. Soc., 1934, 40, 601—605), вывести спектральное разложение самосопряженных операторов. Недавно Ниэминен (РЖМат, 1956, 8137) на основе этой формулы получил спектральное разложение унитарных операторов. Цель реферируемой работы — доказать в простом и ясном изложении оба указанных предложения на основе формулы с интегралом Пуассона—Стилтьеса. B. Sz-Nagy, A. Korányi

4968. Теория возмущений при переходе от дискретного спектра к непрерывному. Маслов В. П., Докл. АН СССР, 1956, **109**, № 2, 267—270

Попытка уточнить некоторые теоремы теории возмущений в связи с введенными И. М. Гельфандом и А. Г. Костюченко обобщенными собственными функциями дифференциальных и других операторов (РЖМат, 1956, 3924). Рассматривается последовательность самосопряженных операторов A_n с общей всюду плотной в гильбертовом пространстве областью определения, сходящаяся к самосопряженному оператору A. Спектр каждого из операторов A_n предполагается дискретным, а спектр оператора A — непрерывным. Формулируются некоторые предложения о близости обобщенных собственных функций операторов A_n и A. Имеются и другие результаты. В. Б. Лидский

4969. Интегрирование и дифференцирование функций эрмитовых операторов и приложения к теории возмущений. Далецкий Ю. Л., Крейн С. Г., Тр. Семинара по функцион. анализу. Воронежск. ун-т, 1956, вып. 1, 81—105

Пусть A — ограниченный эрмитов оператор в гильбертовом пространстве H, E_μ — его спектральная функция ($a \leqslant \mu \leqslant b$), а $F(\mu)$ — ограниченный оператор в H, зависящий от параметра μ ($a \leqslant \mu \leqslant b$). Указываются достаточные условия существования операторного интеграла $\int_a^b F(\mu)\, dE_\mu$, рассматриваемого как предел операторов $\sum_{k=1}^n F(\mu_k) E(\Delta_k)$, где

$$a = \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_{n-1} < \lambda_n = b,$$

$$\Delta_k = [\lambda_{k-1}, \lambda_k],\ \mu_k \in \Delta_k.$$

Аналогично определяются операторные интегралы типа

$$\int_a^b dE_\lambda F(\lambda) \quad \text{и} \quad \int_a^b F(\lambda)\, dE_\lambda G(\lambda).$$

Пусть $\Phi(\lambda, \mu)$ — непрерывная операторная функция в прямоугольнике $a \leqslant \lambda \leqslant b$, $c \leqslant \mu \leqslant d$, A — ограниченный оператор. Устанавливаются условия, достаточные для существования повторного интеграла $\int_c^d \left[\int_a^b \Phi(\lambda, \mu)\, dE_\lambda\right] A dE_\mu$. Более простые условия имеют место в случае числовой непрерывной функции $\Phi(\lambda, \mu)$.

Доказывается теорема: Пусть $A(t)$ — эрмитов ограниченный оператор в H, зависящий от параметра t и имеющий на сегменте $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ непрерывную по норме операторов производную dA/dt; $f(\lambda)$ — комплекснозначная функция с непрерывной второй производной на некотором сегменте $[a, b]$, содержащем внутри себя спектр оператора $A(t)$ при всех $t \in [\alpha, \beta]$. Тогда оператор $f(A(t)) = \int_a^b f(\lambda)\, dE_\lambda(t)$ имеет непрерывную на сегменте $[\alpha, \beta]$ производную, представимую повторным интегралом

$$\frac{df(A(t))}{dt} = \int_a^b \int_a^b \frac{f(\lambda) - f(\mu)}{\lambda - \mu}\, dE_\lambda(t) \frac{dA(t)}{dt}\, dE_\mu(t).$$

Устанавливаются также условия существования производных высших порядков от оператора $f(A(t))$ и даются формулы для их вычисления. Доказывается справедливость формулы Тейлора для функций эрмитовых операторов $f(A(t))$ и дается оценка для остаточного члена.

Полученные результаты позволяют по-новому подойти к решению основных задач теории возмущений. Этот новый путь заключается 1) в представлении оператора ортогонального проектирования $P(t)$ на некоторое инвариантное подпространство эрмитова оператора $A(t)$ в виде функции $f(A(t))$, где $f(\lambda)$ — числовая функция, равная единице на соответствующей этому инвариантному подпространству части спектра оператора $A(t)$ и нулю на остальной части спектра, и 2) в последующем разложении оператора $P(t)$ по формуле Тейлора. Таким способом для оператора $A(t) = A_0 + tA_1$, где A_0 и A_1 — эрмитовы операторы (A_1 ограниченный), получены известные формулы для возмущенного собственного вектора $\varphi(t)$ и возмущенного собственного значения $\lambda(t)$ в случае, когда оператор A_0 имеет чисто дискретный спектр. Д. Ф. Харазов

4970. Полугруппы неограниченных самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Курепа (Semigroups of unbounded self-adjoint transformations in Hilbert space. Kurepa Svetozar), Glasnik mat.-fiz. i astron., 1955, **10**, № 4, 233—238 (англ.; рез. сербо-хорв.)

Доказывается следующая теорема: Пусть $A(t)$ ($t \in C_+ = [0, +\infty)$) — полугруппа самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве R с общей всюду плотной областью определения D. Пусть при любом $t \in C_+$ из условия $A(t)f = 0$ следует, что $f = 0$. Пусть, далее, множество $T \subseteq C_+$ обладает тем свойством, что $m_i(T + T) > 0$, где m_i — внутренняя мера Лебега множества $T + T = \bigcup (t + s)$, $t, s \in T$. Тогда, если функция $(A(t)f, f)$ ограничена на T при каждом фиксированном f, то существует один и только один самосопряженный оператор A, для которого $A(t) = \exp tA$ при всех $t \in C_+$.

Сформулированная теорема является обобщением известных теорем об интегральном представлении полугрупп самосопряженных операторов (Хилл. Э., Функциональный анализ и полугруппы, М., Изд-во ин. лит., 1951). В доказательстве автор ссылается на свой неопубликованный результат о непрерывности ограниченных выпуклых функций. В. Б. Лидский

4971. Ожидания в операторной алгебре. Накамура, Цурумару (Expectations in an operator algebra. Nakamura Masahiro, Turumaru Takasi), Tôhoku Math. J., 1954, 6, № 2-3, 182—188 (англ.)

Ожиданием в C^*-алгебре A с единицей авторы называют всякое отображение $x \to x^\varepsilon$ алгебры A в себя,

обладающее следующими свойствами: 1) $(\alpha x+\beta y)^\varepsilon = \alpha x^\varepsilon + \beta y^\varepsilon$; 2) $x^{*\varepsilon} = x^{\varepsilon *}$; 3) из $x \geqslant 0$ следует $x^\varepsilon \geqslant 0$; 4) $(x^\varepsilon y)^\varepsilon = x^\varepsilon y^\varepsilon = (xy^\varepsilon)^\varepsilon$; 5) $1^\varepsilon = 1$; ожидание называется абелевым, если 6) $(xy)^\varepsilon = (yx)^\varepsilon$. Кроме того, рассматриваются отображения, удовлетворяющие только условиям 1)—4); они называются квазиожиданиями. Наконец, самосопряженная подалгебра $D = D_r \cap D_l$, где $D_r = \{a : (ax)^\varepsilon = ax^\varepsilon$ для всех $x \in A\}$, $D_l = \{a : (xa)^\varepsilon = x^\varepsilon a$ для всех $x \in A\}$, называется ассоциированной подалгеброй данного ожидания.

Основные результаты:

1. Ассоциированная подалгебра D ожидания в C^*-алгебре есть C^*-подалгебра с единицей, совпадающая с совокупностью всех неподвижных точек ожидания, и потому для D существует замкнутое дополнительное подпространство в A; если при этом ожидание ε абелево, то подалгебра D коммутативна. Кроме того, совокупность D' всех $a \in A$, перестановочных со всеми элементами из D, инвариантна относительно ε, т. е. из $a \in D'$ следует $a^\varepsilon \in D \cap D'$.

2. Для всякого ожидания в C^*-алгебре A существует такой нормированный положительный функционал $\sigma(x)$ в A, что $\sigma(x^\varepsilon) = \sigma(x)$ для всех $x \in A$; в частности, в случае абелева ожидания существует след $\sigma(x)$, удовлетворяющий тому же условию $\sigma(x^\varepsilon) = \sigma(x)$.

3. Ассоциированная алгебра нормального ожидания в W^*-алгебре A есть W^*-подалгебра. При этом ожидание называется нормальным, если из $x_\alpha \uparrow x$ следует $x_\alpha^\varepsilon \uparrow x^\varepsilon$, где $x_\alpha \uparrow x$ означает, что x есть верхняя грань направленного неубывающего множества x_α.

Кроме того: а) если $\sigma(x)$ — нормальный положительный функционал, то и $\sigma^\varepsilon(x) = \sigma(x^\varepsilon)$ есть нормальный положительный функционал; б) если A есть W^*-алгебра в гильбертовом пространстве, имеющая отделяющий вектор, то для всякого элемента $\varphi \in H$ существует такой элемент $\psi \in H$, что $(x^\varepsilon \varphi, \varphi) = (x\psi, \psi)$ для всех $x \in A$. Это последнее предложение остается справедливым и для квазиожидания. М. А. Наймарк

4972. Условное ожидание в операторной алгебре. Умэгаки (Conditional expectation in an operator algebra. Umegaki Hisaharu), Tôhoku Math. J., 1954, 6, № 2-3, 177—181 (англ.)

Рассматривается W^*-алгебра A операторов в гильбертовом пространстве H; в A заданы W^*-подалгебра A_1 и такой полный нормальный след μ, что $\mu(1) = 1$.

Пусть $L^1(A)$, $L^1(A_1)$ — соответствующие пространства L^1-интегрируемых операторов в смысле Сигала (РЖМат, 1954, 1713) с нормой $\|x\|_1 = \mu(|x|)$. Доказывается, что:

1. Существует отображение $x \to x^e$ из $L^1(A)$ на $L^1(A_1)$, удовлетворяющее следующим условиям:
1) $(\alpha x+\beta y)^e = \alpha x^e + \beta y^e$; 2) $x^{*e} = x^{e*}$; 3) из $x \geqslant 0$ следует $x^e \geqslant 0$; 4) из $x \geqslant 0$ и $x^e = 0$ следует $x = 0$; 5) $z^e = z$ для всех $z \in L^1(A_1)$; 6) $A^e = A_1$; 7) $\|x^e\| \leqslant \|x\|$ и $x^{*e}x^e \leqslant (x^*x)^e$ для $x \in A$; 8) $(x^e y)^e = (xy^e)^e = x^e y^e$ для $x \in L^1(A)$, $y \in A$ или $x \in A$, $y \in L^1(A)$; 9) из $x_\gamma \uparrow x$ следует $x_\gamma^e \uparrow x^e$ для x_γ, $x \in A$ (запись $x_\gamma \uparrow x$ означает, что x есть верхняя грань направленного неубывающего множества $\{x_\gamma\}$; 9') отображение $x \to x^e$ сильно и слабо непрерывно на единичной сфере алгебры A; 10) $(xy)^e = (yx)^e$ для $x \in L^1(A)$ и $y \in A_1' \cap A$; 11) $\mu(|x^e|) \leqslant \mu(|x|)$.

Это отображение $x \to x^e$ называется условным ожиданием в A по отношению к A_1.

2. Если отображение $x \to x^\varepsilon$ алгебры A в себя удовлетворяет условиям 1), 2), 8), 11) предложения 1 для $x, y \in A$ и условию $1^\varepsilon = 1$, то A^ε есть W^*-подалгебра в A и это отображение совпадает с условным ожиданием $x \to x^e$ по отношению к A^ε.

3. Если отображение $x \to x^\varepsilon$ алгебры A в себя удовлетворяет условиям 1), 3), 4) и 9) предложения 1 для $x, y, x_\gamma \in A$, то существует и притом только один положительный оператор $r \in L^1(A)$, удовлетворяющий условиям $1^\varepsilon = r^e$ и $x^\varepsilon = (xr)^e = (rx)^e$ для всех $x \in A$, где $x \to x^e$ — условное ожидание по отношению к W^*-подалгебре $A_1 = \{z : (zx)^\varepsilon = zx^\varepsilon$ и $(xz)^\varepsilon = x^\varepsilon z$ для всех $x \in A\}$. М. А. Наймарк

4973. Некоторые результаты в теории колец операторов. II. Гриффин (Some contributions to the theory of rings of operators. II. Griffin Ernest L., Jr), Trans. Amer. Math. Soc., 1955, 79, № 2, 389—400 (англ.)

Оператор C, построенный в первой части (РЖМат, 1955, 2299) для полуконечных колец, теперь строится для произвольных слабо замкнутых колец M операторов в гильбертовом пространстве. Сначала доказывается следующая теорема:

1. Пусть M — кольцо типа III в гильбертовом пространстве H и пусть $\mathfrak{N}$ — совокупность всех кардинальных чисел, не превосходящих размерности пространства H. Тогда для каждого $n \in \mathfrak{N}$ существует такой оператор проектирования $P_n \in M \cap M'$, что: а) $P_n = 0$ или P_n имеет размерность n; б) $\sum_{n \in \mathfrak{N}} P_n = 1$, и это разложение сохраняется при $*$-изоморфизме двух колец типа III.

В соответствии с разложением $\sum_{n \in \mathfrak{N}} P_n = 1$ и аналогичным разложением $\sum_{n \in \mathfrak{N}} P_n' = 1$ вводится оператор C как формальная сумма

$$C = \sum_{n,\, n' \in \mathfrak{N}} (n/n')\, P_n P_{n'}'.$$

Доказывается теорема:

2. Всякий $*$-изоморфизм двух колец типа III, переводящий друг в друга соответствующие операторы C, есть пространственный изоморфизм, т. е. порождается некоторым изометрическим отображением друг в друга гильбертовых пространств, в которых заданы эти кольца.

Перенесение конструкции оператора C и этого последнего результата на произвольные слабо замкнутые кольца M основано на том, что всякое такое кольцо есть прямая сумма кольца типа III и кольца, рассмотренного в ч. I.

Из этих результатов вытекают следующие теоремы:

3. Сильнейшая и σ-слабая топологии чисто алгебраичны, т. е. всякий $*$-изоморфизм двух слабо замкнутых колец операторов непрерывен в обе стороны в сильнейшей и σ-слабой топологиях.

4. Понятие слабо замкнутого подкольца чисто алгебраично, т. е. при $*$-изоморфизме слабо замкнутого кольца M_1 на слабо замкнутое кольцо M_2 образ слабо замкнутого подкольца в M_1 есть слабо замкнутое подкольцо в M_2.

5. Если оператор C существенно ограничен, то он ограничен тогда и только тогда, когда сильнейшая и сильная, а также σ-слабая и слабая топологии являются парами эквивалентных на M топологий.

Кроме того дается условие сильной и слабой непрерывности $*$-изоморфизма двух слабо замкнутых колец в терминах соответствующих операторов C. М. А. Наймарк

4974. Представления компактной группы в банаховом пространстве. Сига (Representations of a compact group on a Banach space. Shiga Kôji), J. Math. Soc. Japan, 1955, 7, № 3, 224—248 (англ.)

Рассматриваются следующие типы представлений $\{\mathfrak{N}, T_a\}$ компактной группы G в комплексном линей-

ном нормированном (не обязательно полном) пространстве $\mathfrak{N}$ ограниченными линейными операторами T_a в $\mathfrak{N}$:

1) алгебраические представления, т. е. соответствия $a \to T_a$, удовлетворяющие условиям $T_e = 1$, $T_{a_1 a_2} = T_{a_1} T_{a_2}$;

2) ограниченные представления, т. е. алгебраические представления, удовлетворяющие условию $\|T_a\| \leqslant C$, где C — постоянная, не зависящая от $a \in G$;

3) слабо измеримые представления, т. е. такие ограниченные представления, что функция $f(T_a x)$ измерима для всех $x \in \mathfrak{N}$, $f \in \mathfrak{N}^*$, где $\mathfrak{N}^*$ — пространство, сопряженное к $\mathfrak{N}$;

4) сильно измеримые представления, т. е. такие ограниченные представления, что $T_a x$ есть сильно измеримая (в смысле Бохнера) функция для каждого фиксированного $x \in \mathfrak{N}$;

5) слабо непрерывные представления, т. е. такие ограниченные представления, что $f(T_a x)$ есть непрерывная функция на G для любых $x \in \mathfrak{N}$, $f \in \mathfrak{N}^*$;

6) сильно непрерывные представления, т. е. такие ограниченные представления, что $T_a x$ есть непрерывная по норме в $\mathfrak{N}$ функция на G при любом $x \in \mathfrak{N}$;

7) почти сильно непрерывные представления, т. е. такие ограниченные алгебраические представления $\{\mathfrak{N}, T_a\}$, что существуют сильно непрерывное представление $\{\gamma, S_a\}$ и непрерывное линейное отображение A пространства $\mathfrak{N}$ на $\mathfrak{S}$, удовлетворяющие условию $AT_a x = S_a A x$, $x \in \mathfrak{N}$;

8) почти слабо непрерывные представления, т. е. такие ограниченные алгебраические представления $\{\mathfrak{N}, T_a\}$, что множество $\mathfrak{N}^*_G$ всех элементов $f \in \mathfrak{N}^*$, для которых функция $f(T_a x)$ непрерывна на G для каждого $x \in \mathfrak{N}$, является тотальным в $\mathfrak{N}^*$ (множество $\mathfrak{S} \in \mathfrak{N}^*$ называется тотальным, если из $f(x) = 0$ для всех $f \in \mathfrak{S}$ следует $x = 0$);

9) s-почти слабо непрерывные представления, т. е. такие ограниченные алгебраические представления $\{\mathfrak{B}, T_a\}$ в банаховом пространстве $\mathfrak{B}$, что

$$\sup_{f \in \mathfrak{B}^*_G} f(x)/\|f\| = \|x\|.$$

Если $\mathfrak{N}$ есть банахово пространство $\mathfrak{B}$, то представление называется B-представлением.

Основные результаты:

1. Если $\{\mathfrak{N}, T_a\}$ — неприводимое ограниченное алгебраическое представление группы G и если для некоторого отличного от нуля элемента $f_0 \in \mathfrak{N}^*$ и каждого $x \in \mathfrak{N}$ функция $f_0(T_a, x)$ непрерывна на G, то пространство $\mathfrak{N}$ конечномерно; в случае сепарабельного пространства $\mathfrak{N}$ условие непрерывности можно заменить условием измеримости.

2. Для слабо непрерывного B-представления $\{\mathfrak{B}, T_a\}$ следующие утверждения эквивалентны: а) $\{\mathfrak{B}, T_a\}$ вполне разложимо (т. е. $\mathfrak{B}$ есть замкнутая линейная оболочка конечномерных инвариантных подпространств, в которых представление $a \to T_a$ неприводимо); б) $\{\mathfrak{B}, T_a\}$ сильно непрерывно; в) $\{\mathfrak{B}, T_a\}$ сильно измеримо; г) для каждого $x \in \mathfrak{B}$ замкнутое инвариантное подпространство $[T_a x, a \in G]$ сепарабельно.

3. Если для слабо непрерывного представления $\{\mathfrak{N}, T_a\}$ существует такое счетное множество $\{f_n\} \in \mathfrak{N}^*$, что $\{T^*_a f_i, a \in G, i = 1, 2, \ldots\}$ есть тотальное множество в $\mathfrak{N}^*$, то представление $\{\mathfrak{N}, T_a\}$ почти сильно непрерывно.

4. Если пространство $\mathfrak{N}$ сепарабельно или рефлексивно, то из слабой непрерывности представления $\{\mathfrak{N}, T_a\}$ следует его сильная непрерывность.

5. Всякое почти сильно непрерывное представление является почти слабо непрерывным.

6. Если сильно измеримое B-представление $\{\mathfrak{B}, T_a\}$ почти слабо непрерывно, то пространство $\mathfrak{B}$ содержит такое плотное инвариантное подпространство $\mathfrak{C}$, что представление $\{\mathfrak{C}, T_a\}$ почти сильно непрерывно; если, кроме того, представление $\{\mathfrak{B}, T_a\}$ является s-почти слабо непрерывным, то $\{\mathfrak{B}, T_a\}$ сильно непрерывно.

7. Если $\{\mathfrak{B}, T_a\}$ — слабо непрерывное B-представление и $\{\mathfrak{B}^*, T^*_a\}$ сильно измеримо, то $\{\mathfrak{B}^*, T^*_a\}$ сильно непрерывно.

8. Если $\{\mathfrak{B}, T_a\}$ — слабо измеримое B-представление и $\mathfrak{B}^*$ сепарабельно, то $\{\mathfrak{B}^*, T^*_a\}$ сильно непрерывно.

9. Если $\mathfrak{B}^*$ сепарабельно, то сильная непрерывность представления $\{\mathfrak{B}, T_a\}$ равносильна сильной непрерывности представления $\{\mathfrak{B}^*, T^*_a\}$.

Кроме того, изучаются подпространства всех тех элементов, на которых данное ограниченное алгебраическое представление сильно или слабо непрерывно, а также дается разложение слабо непрерывного представления в непрерывную прямую сумму сильно непрерывных представлений, каждое из которых реализуется в виде правых сдвигов в некотором пространстве функций на группе. М. А. Наймарк

4975. Операторы Лапласа на полупростых группах Ли. **Березин Ф. А.**, Докл. АН СССР, 1956, 107, № 1, 9—12.

Если M — многообразие, на котором транзитивно действует группа Ли $\mathfrak{G}$, то в пространстве функций на M возникает линейное представление T_g, задаваемое формулой $T_g f(x) = f(g^{-1}x)$. Согласно И. М. Гельфанду (Докл. АН СССР, 1950, 70, № 1, 5—8), дифференциальный оператор Δ на M называется оператором Лапласа, если он перестановочен со всеми операторами T_g. Пусть R — множество функций на M, обладающих тем свойством, что $f(gx) = f(x)$, когда g пробегает стационарную подгруппу $\mathfrak{G}_0$, отвечающую фиксированной точке $x_0 \in M$. Множество R инвариантно относительно оператора Δ, и оператор, индуцированный оператором Δ в пространстве R, называется радиальной частью оператора Δ.

В заметке вычисляются радиальные части операторов Лапласа для случая, когда M — многообразие полупростой группы Ли с движениями $g \to g_1^{-1} g g_2$ (в этом случае R есть пространство функций, постоянных на классах сопряженных элементов), и для случая, когда M — пространство смежных классов комплексной полупростой группы по максимальной компактной подгруппе.

Так, если $\mathfrak{G}$ — компактная полупростая группа Ли, H — картановская подалгебра ее алгебры Ли, $t^1, \ldots, t^n$ — аффинные координаты в H, $x_1, \ldots, x_n$ — соответствующие им ковариантные координаты в H, то радиальная часть всякого оператора Лапласа на $\mathfrak{G}$ представима в виде

$$\frac{1}{j(t)}\left[P\left(\frac{\partial}{\partial t^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial t^n}\right)\right] j(t),$$

где $P(x_1, \ldots, x_n)$ — инвариантный относительно группы Вейля многочлен на H, а $j(t) = \prod_{\alpha > 0} \sin(\alpha, t)/2$ (α — корни алгебры H). Обратно, всякий оператор такого вида есть радиальная часть некоторого оператора Лапласа. Аналогичные выражения получаются для комплексной полупростой группы, произвольной вещественной полупростой группы, а также для пространства смежных классов комплексной полупро-

стой группы по ее максимальной компактной подгруппе.

В виде примера проводится вычисление зональных сферических функций на многообразии смежных классов комплексной полупростой группы по максимальной компактной подгруппе. (Другим методом эти функции были найдены И. М. Гельфандом и М. А. Наймарком). Попутно устанавливается, что не существует других неприводимых унитарных представлений класса 1 комплексной полупростой группы кроме тех, что были описаны И. М. Гельфандом и М. А. Наймарком (Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1950, 36). Иным методом этот результат получили И. М. Гельфанд и М. А. Наймарк (Тр. Моск. матем. о-ва, 1952, 1, 423—475). Устанавливается также, что всякое представление класса 1 комплексной полупростой группы однозначно задается порождаемым им гомоморфизмом центра инфинитезимального группового кольца в поле комплексных чисел.

В виде другого примера дается вычисление характеров неприводимых представлений компактных групп. Одновременно устанавливается, что неприводимое представление компактной группы полностью характеризуется порожденным им гомоморфизмом центра инфинитезимального группового кольца в поле комплексных чисел.

Вычисления основываются на том факте, что как зональные функции, так и характеры являются собственными функциями радиальных частей соответствующих операторов Лапласа. М. И. Граев

4976. Об одной теореме Фреше. Иванов Н. А., Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, 1956, 39, 51—53

Известна следующая теорема (Fréchet M., J. math. pures et appl., 1937, 16, 233—250): Для того чтобы функционал $f(x)$ в точке x_0 евклидова пространства имел дифференциал Фреше, необходимо и достаточно, чтобы в той же точке x_0 этот функционал имел сложную производную для любой дифференцируемой функции $x = x_0 + \psi(s)$, где $s = \| x - x_0 \|$, и чтобы эта сложная производная определялась формулой

$$\frac{d}{ds} f(x) = V\left(x_0, \frac{dx}{ds}\right)\Big|_{x=x_0},$$

где $V(x_0, h)$ есть линейный дифференциал Гато функционала $f(x)$.

Автор проводит доказательство этой теоремы методом Фреше для случая конечномерного банахова пространства.

Примечание референта. Перенос на случай конечномерных банаховых пространств различных утверждений о дифференцируемости функционалов не требует специальных доказательств, так как в конечномерном случае каждая банахова норма эквивалентна евклидовой. Ю. Г. Борисович

4977. О K-пространстве ограниченных самосопряженных операторов. Любовин В. Д., Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та им. Герцена, 1956, 125, 119—155

Изучаются некоторые свойства самосопряженных операторов, связанные с их частичным упорядочением.

Пусть S — произвольное множество самосопряженных операторов, заданных в гильбертовом пространстве H (область определения каждого оператора всюду плотна в H), S' — множество всех ограниченных самосопряженных операторов на H, перестановочных с любым оператором из S и $S'' = (S')'$. Пусть R_λ^A — резольвента оператора A. Если $R_\lambda^A R_\mu^B = R_\mu^B R_\lambda^A$ для любых A, $B \in S$ и любых невещественных λ и μ, то говорим, что множество S удовлетворяет условию (C). В множестве S'' вводится естественное частичное упорядочение: элемент $B \in S''$ считается строго положительным ($B > 0$), если B — положительный самосопряженный оператор, отличный от нулевого. Обобщая теорему В. И. Соболева (Успехи матем. наук, 1952, 7, № 4, 169—172), автор доказывает, что для того чтобы S'' было K-пространством, необходимо и достаточно, чтобы множество S удовлетворяло условию (C). Отсюда вытекает, что для того чтобы S'' было K-пространством, необходимо и достаточно, чтобы оно было коммутативным кольцом.

Далее, в предположении, что S'' есть K-пространство, изучается его структура.

Теорема 3. Пусть T_1 — верхняя грань, а T_2 — нижняя грань конечного множества M операторов из S''. Тогда пространство H можно разложить на конечное число взаимно ортогональных подпространств, приводящих S', на каждом из которых операторы T_1 и T_2 совпадают с некоторыми операторами из множества M.

Теорема 4. Пусть B, $C \in S''$. Для того чтобы B и C были дизъюнктны, необходимо и достаточно, чтобы пространство H разлагалось на два таких ортогональных подпространства H_1 и H_2, приводящих множество S', что оператор B аннулируется на H_1, а оператор C аннулируется на H_2.

Теорема 5. Тождественный оператор E обладает свойством единицы в S'' (т. е. $A \wedge E > 0$ для любого $A > 0$, $A \in S''$). Если его принять за единицу, то база в S'' будет состоять из всех операторов проектирования, входящих в S''.

Пусть B — ограниченный самосопряженный оператор, H' — его нулевое подпространство, H_B — ортогональное дополнение к H', и пусть оператор B, рассматриваемый на H_B, имеет ограниченный обратный; тогда то распространение последнего на все H, которое обращается в 0 на H', называется частично обратным оператором для B. Для операторов из S'' частично обратные операторы совпадают с обратными элементами в K-пространстве S'', понимаемыми в том смысле, как это определял референт (Матем. сб., 1948, 22, 27—77).

Последовательность операторов $B_n \in S''$ называется почти равномерно сходящейся к оператору $B \in S''$, если для любого $h \in H$ и произвольного $\varepsilon > 0$ можно найти такое натуральное N, что при любом конечном ортогональном разложении пространства H на подпространства H_k ($k = 1, 2, \ldots, r$), каждое из которых приводит множество S', и при любом выборе индексов $n_k > N$ будет выполняться неравенство

$$\sum_{k=1}^{r} \| Bh_k - B_{n_k} h_k \|^2 < \varepsilon^2,$$

где h_k — проекция элемента h на H_k. Доказывается, что (o)-сходимость в S'' совпадает с почти равномерной сходимостью. Если же пространство H сепарабельно, то (t)-сходимость в S'' совпадает с сильной сходимостью.

Теорема 11. Для того чтобы S'' было непрерывным K-пространством, необходимо и достаточно, чтобы операторы из множества S не имели общих собственных векторов.

Теорема 12. Для того чтобы S'' было дискретным K-пространством, необходимо и достаточно, чтобы замкнутая линейная оболочка множества всех общих собственных векторов операторов из S совпадала с H. Б. З. Вулих

4978. Инвариантные линейные функции. Силверман (Invariant linear functions. Silverman Robert J.), Trans. Amer. Math., Soc., 1956, 81, № 2, 411—424 (англ.)

Пусть имеются: 1) линейные множества Y и $X \subset Y$; 2) частично упорядоченное пространство V, конус K положительных элементов которого является острым, т. е. $-K \cap K = \{0\}$; кроме того, предполагается, что всякое ограниченное сверху множество в V имеет точную верхнюю границу; 3) полугруппа G операторов в Y; 4) положительно однородная полуаддитивная операция p, отображающая Y в V и удовлетворяющая условию $p(gy) \leqslant p(y)$ для $g \in G$; 5) такая дистрибутивная операция f, отображающая X в V, что $f(gx) = f(x)$ и $f(x) \leqslant p(x)$ для $g \in G$, $x \in X$. По определению, совокупность $[Y, X, V, p, f, G]$ обладает свойством распространимости в смысле Хана—Банаха (Hahn—Banach extension property — HBEP), если существует такая дистрибутивная операция F, отображающая Y в V, что $F(x) = f(x)$, $F(gy) = F(y)$, $F(y) \leqslant p(y)$ для $x \in X$, $y \in Y$, $g \in G$.

Пусть 1) Y — частично упорядоченное пространство; 2) X — линейное множество в Y, причем конус C положительных элементов в Y и множество X удовлетворяют условию: пересечение $y + C \cap X$ не пусто ни при каком $y \in Y$; 3) G — такая полугруппа операторов в Y, что для любых $g \in G$, $y \in C$, $x \in X$ имеют место включения $gy \in C$, $gx \in X$; 4) f — такая монотонная дистрибутивная операция, отображающая X в V (где V имеет тот же смысл, что и выше), что $f(gx) = f(x)$ для $x \in X$, $g \in G$. По определению совокупность $[Y, X, V, f, G]$ обладает свойством монотонной распространимости [monotone extension property — MEP], если существует такая монотонная дистрибутивная операция F, отображающая Y в V, что $F(x) = f(x)$, $F(gy) = F(y)$ для $x \in X$, $y \in Y$, $g \in G$.

Пусть, наконец, $\mathfrak{G}$ — абстрактная полугруппа. Она обладает свойством HBEP, если свойством HBEP обладает всякий набор $[Y, X, V, p, f, G]$, где G — представление (т. е. гомоморфный образ) полугруппы $\mathfrak{G}$. Аналогичным образом можно говорить, что абстрактная полугруппа обладает свойством MEP.

Доказывается ряд теорем. Например,

Теорема 1. Полугруппа $\mathfrak{G}$ обладает свойством HBEP тогда и только тогда, когда она обладает свойством MEP.

Теорема 3. Коммутативная полугруппа обладает свойством MEP.

Теорема 4. Конечная группа обладает свойством MEP.

В конце статьи рассматриваются инвариантные средние на полугруппах. Г. П. Акилов

4979. О булевой мере. Вулих Б. З., Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та, 1956, 125, 95—114

Отправляясь от разложения единицы $\{e_\lambda\}$, $-\infty < \lambda < \infty$, в полной булевой алгебре E с наименьшим элементом 0 и наибольшим элементом 1, автор строит меру линейных точечных множеств, значения которой принадлежат алгебре E. Устанавливается, что эта мера обладает обычными свойствами. Доказывается ее счетная аддитивность при дополнительном предположении, что на E существует достаточное число неотрицательных вещественных функций φ, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $\varphi(e_1 \vee e_2) = \varphi(e_1) + \varphi(e_2)$; $e_1, e_2 \in E$, $e_1 \wedge e_2 = 0$;

2) если множество $\{e_\xi\} \subset E$ направлено по убыванию, т. е. для любых двух индексов ξ_1 и ξ_2 найдется такой индекс ξ_3, что $e_{\xi_3} \leqslant e_{\xi_1} \wedge e_{\xi_2}$, то

$$\inf \varphi(e_\xi) = \varphi(\inf e_\xi).$$

Далее рассматриваются измеримые относительно построенной меры вещественные функции вещественной переменной и вводится интеграл Лебега—Стилтьеса $\int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)\, de_\lambda$, значения которого принадлежат K-пространству X с единицей, надстроенному над алгеброй E. Если разложение $\{e_\lambda\}$ порождено элементом $x \in X$, то введенные интегралы называются функциями элемента x, соответствующими функциям вещественной переменной λ. Эта часть работы обобщает результаты референта по теории полуупорядоченной меры (РЖМат, 1953, 1134).

Для случая K-пространств ограниченных элементов и счетного типа доказывается, что множество всех функций от элемента x есть наименьшее кольцо, замкнутое в смысле сходимости, порожденной полуупорядочением, и содержащее элементы x и 1. Отсюда как частный случай получается теорема Рисса—Неймана о функциях от ограниченных самосопряженных операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве. В. И. Соболев

4980. Единственность интегральных представлений с помощью экстремальных точек в выпуклых полуупорядоченных конусах. Шоке (Unicité des représentations intégrales au moyen de points extrémaux dans les cônes convexes réticulés. Choquet Gustave), C. r. Acad. sci., 1956, 243, № 6, 555—557 (франц.)

Пусть E — локально выпуклое линейное топологическое пространство, $C \subset E$ — выпуклый конус, $A \subset E$ — некоторое линейное многообразие, пересекающееся с каждым лучом из C; предположим, что множество $B = A \cap C$ компактно, $\mathcal{E}$ — множество экстремальных точек из B. Посредством конуса C в E вводится частичное упорядочение.

Обозначим, далее, через $\mathfrak{M}$ множество положительных мер Радона на B. Если $\mu \in \mathfrak{M}$, то результантом меры μ называется элемент $x_\mu = \int x\, d\mu$. Мера μ называется носимой множеством $\mathcal{E}$ (portée par $\mathcal{E}$), если μ-мера множества $B \setminus \mathcal{E}$ равна нулю.

Теорема. Если конус C является структурой, то каждая точка из C может быть результантом только одной меры, носимой множеством $\mathcal{E}$. Б. З. Вулих

4981. Существование интегральных представлений с помощью экстремальных точек в выпуклых конусах. Шоке (Existence des représentations intégrales au moyen des points extrémaux dans les cônes convexes. Choquet Gustave), C. r. Acad. sci., 1956, 243, № 8, 699—702 (франц.)

Используются обозначения предыдущей статьи (реф. 4980).

Теорема. Если множество B метризуемо, то каждая точка из C является результантом по крайней мере одной меры, носимой множеством $\mathcal{E}$.

Теорема опирается на 6 лемм, приведенных частью без доказательства, частью с кратким наброском доказательства. Б. З. Вулих

4982. Существование интегральных представлений в выпуклых конусах. Шоке (Existence des représentations intégrales dans les cônes convexes. Choquet Gustave), C. r. Acad. sci., 1956, 243, № 9, 736—737 (франц.)

Результат предыдущей заметки автора (реф. 4981) распространяется на случай, когда множество B не метризуемо (обозначения те же, что и в двух предыдущих статьях, реф. 4980, 4981). Утверждается, что если $\mathcal{E} \subset H \subset \overline{\mathcal{E}}$ и H — множество типа G_δ в $\overline{\mathcal{E}}$, то, при выполнении вместо метризуемости множества B некоторых других условий, каждая точка из C является результантом по крайней мере одной меры, носимой множеством H. В частности, если $\mathcal{E}$ локально компактно или если $\overline{\mathcal{E}} \setminus \mathcal{E}$ счетно, то существует такая мера, носимая самим множеством $\mathcal{E}$.

В случае, если C — структура, обозначим через R множество всех элементов $x \in C$, которые представимы как результанты мер, носимых множеством $\mathcal{E}$, а через N — множество всех элементов $x \in C$, совершенно непредставимых (purement non représentables), т. е. таких, что каждый элемент $y < x$ ($y \in C$, $y \neq 0$) также не является результантом. Тогда R и N нормально содержатся в C, и C есть прямая сумма множеств R и N. Б. З. Вулих

4983. Общий билинейный векторный интеграл. Бартл (A general bilinear vector integral. Bartle R. G.), Studia math., 1956, 15, № 3, 337—352 (англ.)

Излагается теория интегрирования векторных функций, основывающаяся на понятии билинейного произведения. Пусть X и Y — действительные или комплексные линейные нормированные пространства и xy — билинейное произведение, определенное на этих пространствах, со значениями в банаховом пространстве Z, причем $\|xy\| \leqslant K\|x\|\|y\|$. Далее пусть $\mathfrak{S}$ — кольцо подмножеств множества S и μ — конечноаддитивная функция на $\mathfrak{S}$.

Основную роль играет полувариация «меры» μ, т. е. функция множества, определенная формулой

$$\|\mu\|(E) = \sup\Big\|\sum\nolimits_{i=1}^{n} x_i \mu(E_i)\Big\|,$$

где $\{E_i\}$ — произвольное разбиение множества $E \in \mathfrak{S}$ ($E_i \in \mathfrak{S}$) и $\|x_i\| \leqslant 1$. Эта функция распространяется на произвольные множества A при помощи формулы

$$\|\mu\|(A) = \inf\{\|\mu\|(E) : A \subset E,\ E \in \mathfrak{S}\}.$$

Понятия «почти всюду в смысле меры μ» и «сходимость по мере μ» относятся к функции множества $\|\mu\|$; например, последнее означает, что $\lim_{n\to\infty}\|\mu\|(\{x : \|f_n(x) - f(x)\| \geqslant \varepsilon\}) = 0$ для каждого $\varepsilon > 0$.

Функция f называется простой, если она принимает конечное число значений $x_1, \ldots, x_n \in X$ соответственно на множествах $E_1, \ldots, E_n \in \mathfrak{S}$, причем при $x_i \neq 0$ будет $\|\mu\|(E_i) < \infty$.

Интеграл простой функции определяется формулой

$$\int_E f(s)\,\mu(ds) = \sum\nolimits_{i=1}^{n} x_i \mu(E \cap E_i).$$

В общем случае функция f называется интегрируемой, если существует такая последовательность $\{f_n\}$ простых функций, что: 1) $\{f_n\}$ сходится по мере μ; 2) функции $\lambda_n(E) = \int_E f_n(s)\,\mu(ds)$ равностепенно абсолютно непрерывны «в нуле», т. е. для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из $E \in \mathfrak{S}$, $\|\mu\|(E) < \delta$ следует неравенство $\|\lambda_n(E)\| < \varepsilon$; 3) функции $\lambda_n(E)$ равностепенно абсолютно непрерывны «в бесконечности», т. е. для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое множество $E_\varepsilon \in \mathfrak{S}$, что $\|\lambda_n(G)\| < \varepsilon$ для каждого множества $G \subset S - E_\varepsilon$, $G \in \mathfrak{S}$.

Интеграл от интегрируемой функции определяется формулой

$$\int_E f(s)\,\mu(ds) = \lim\nolimits_{n\to\infty} \lambda_n(E)$$

и доказывается, что эта сходимость равномерна на кольце $\mathfrak{S}$. Интеграл обладает дистрибутивным свойством и является абсолютно непрерывной функцией множества в нуле и бесконечности. Функция называется измеримой, если она будет пределом по мере μ простых функций. Каждая измеримая и существенно ограниченная в смысле меры μ функция интегрируема на каждом множестве, удовлетворяющем условию $\|\mu\|(E) < \infty$, причем

$$\Big\|\int_E f(s)\,\mu(ds)\Big\| \leqslant \|\mu\|(E) \cdot \operatorname*{ess\,sup}_{s\in E}\|f(s)\|.$$

Классические теоремы об интегрировании последовательностей имеют следующие аналоги.

Пусть $\{f_n\}$ — последовательность интегрируемых функций, сходящаяся к f по мере μ. Тогда

$$\int_E f(s)\,\mu(ds) = \lim_{n\to\infty}\int_E f_n(s)\,\mu(ds), \qquad (1)$$

если выполняется одно из следующих условий: а) интегралы $\lambda_n(E)$ удовлетворяют условиям 1) и 2) (теорема типа Витали); б) существует такая интегрируемая функция g, что для каждого $E \in \mathfrak{S}$ и $n = 1, 2, \ldots$

$$\Big\|\int_E f_n(s)\,\mu(ds)\Big\| \leqslant \Big\|\int_E g(s)\,\mu(ds)\Big\|$$

(теорема типа Лебега о сходимости с мажорантой). В частности, последнее условие удовлетворяется, если функции ограничены в совокупности.

В заключение рассматривается случай, когда функция μ является σ-аддитивной; в этом случае имеются некоторые упрощения. Функция f интегрируема тогда и только тогда, когда существует последовательность простых функций, сходящаяся к f почти всюду в смысле меры μ, и для каждого множества E функции $\lambda_n(E)$ сходятся по норме. Теорема типа Витали теперь формулируется так: если последовательность $\{f_n\}$ сходится к f почти всюду в смысле меры μ и интегралы $\lambda_n(E)$ равностепенно абсолютно непрерывны в нуле, то имеет место соотношение (1).

Теория автора включает интегралы Бохнера, второй интеграл Данфорда и для измеримых функций интегралы Биркгофа, Гельфанда и Петтиса.

A. Alexiewicz

4984. О теореме Планшереля. Мацусита (Sur le théorème de Plancherel. Matsushita Shin-ichi), Proc. Japan Acad., 1954, **30**, № 7, 557—561 (франц.)

Пусть G — произвольная локально компактная группа, $P(G)$ — множество всех заданных на G непрерывных положительно определенных функций ψ, удовлетворяющих условию $\psi(e) \leqslant 1$. Хорошо известно, что $P(G)$ можно рассматривать как компактное в слабой топологии множество в пространстве, сопряженном к подходяще подобранному банахову пространству. Пусть далее V означает слабое замыкание множества элементарных, положительно определенных функций, принадлежащих множеству $P(G)$ (за исключением нулевой функции), а $L(G)$ — множество всех непрерывных комплекснозначных функций, обращающихся в нуль вне некоторого компактного множества в G. Как показал Годман (Godement R., Trans. Amer. Math. Soc., 1948, **63**, 1—84), для любой положительно определенной функции ψ на G существует такая конечная положительная мера μ_F на V, что для $f \in L(G)$ имеет место равенство

$$\int_G \overline{\psi(x)}\, f(x)\,dx = \int_V \Big(\int_G \overline{\varphi(x)}\, f(x)\,dx\Big)\,d\mu_F,$$

где dx — элемент инвариантной слева меры Хара. Из этой теоремы легко вытекает следующее утверждение, которое автор считает обобщением теоремы Планшереля на общие локально компактные группы. Пусть H_φ означает принадлежащее элементу φ мно-

жества V гильбертово пространство, для которого, таким образом, выполняется соотношение:

$$(X_f^\varphi, X_g^\varphi) = \int_G \varphi(ux^{-1})\,\overline{g(u)}\,f(x)\sqrt{\rho(ux)}\,dxdu,$$

где $f, g \in L(G)$, $X_f^\varphi \in H_\varphi$ — канонический образ функции f, $\rho(x) = \Delta(x)^{-1}$ (Вейль А., Интегрирование в топологических группах и его применения, М., 1950, стр. 49).

Тогда существует такое направленное множество положительных конечных мер μ_λ на V, что для $f, g \in L(G)$ имеем

$$\lim_\lambda \int_V (X_f^\varphi, X_g^\varphi)\,d\mu_\lambda(\varphi) = \int_G f(x)\,\overline{g(x)}\,dx.$$

Отсюда следует доказательство теоремы Планшереля для абелевых групп (в этом случае V можно отождествить с группой характеров $\hat{G}$ группы G), которое, однако, по-видимому, имеет пробел как раз в решающем пункте, а именно в доказательстве того, что для $f \in L(G)$ будет

$$\lim_\lambda \int_G \hat{f}(\varphi)\,d\mu_\lambda(\varphi) = \int_{\hat{G}} \hat{f}(\varphi)\,d\varphi,$$

где $d\varphi$ означает элемент меры Хара на $\hat{G}$.

Нужно заметить, что в случае произвольной группы вполне может оказаться, что $V +$ нулевая функция $= P(G)$ (ср. Yoshizawa H, Osaka Math. J., 1951, 3, 55—63), причем тогда вышеизложенная теория будет полностью бессодержательна. В целом кажется, что далеко идущее отличие теории неприводимых представлений и характеров в общем случае, равно как новые исследования по этому предмету, остались полностью неизвестными автору. L. Pukánszky

4985. Эргодическая теорема для ограниченных групп преобразований в гильбертовом пространстве. Якобс (Ein Ergodensatz für beschränkte Gruppen im Hilbertschen Raum. Jacobs Konrad), Math. Ann., 1954, 128, № 4, 340—349 (нем.)

Пусть G — группа непрерывных линейных преобразований гильбертова пространства H, равномерно ограниченных по норме; K — множество линейных преобразований вида $B = n^{-1}\sum_{\nu=1}^n b_\nu$, $b_\nu \in G$ и пусть $K(h)$ есть (для $h \in H$) замкнутая по норме в H оболочка множества $\{Bh, B \in K\}$. Тогда в $K(h)$ существует в точности одна неподвижная относительно группы G точка f, т. е. элемент $f \in K(h)$, для которого $Af = f$ $(A \in G)$.

В случае унитарных групп эта теорема сводится к одному результату Биркгофа (Birkhoff G., Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1939; 25, 625—627), к которому применимо подходящим образом модифицированное рассуждение автора. Z. Pukánszky

4986. Об одной эргодической теореме. Гладыш (Ein ergodischer Satz. Gładysz S.), Studia math., 1956, 15, № 2, 148—157 (нем.)

Пусть $(S, \mathfrak{S}, m)$ и $(X, \mathcal{E}, \mu)$ — пространства с мерой, T — отображение пространства X в себя, сохраняющее меру μ, и $\{\varphi_x\}$ $(x \in X)$ — семейство отображений пространства S в себя, сохраняющих меру m. Предполагается, что $\varphi_x(s)$ есть измеримая функция переменных x, s. Тогда имеет место следующая теорема: Для каждой функции $f(s, x) \in L^p(S \times X)$ $(p \geqslant 1)$ последовательность средних

$$n^{-1}\sum_{k=1}^n f(\varphi_{T^{k-1}x} \dots \varphi_{Tx}\varphi_x s, T^k x) \qquad (1)$$

сходится почти всюду и в p-й степени относительно меры $m \times \mu$. Предельная функция также принадлежит к $L^p(S \times X)$.

Автор исследует случай, когда предельная функция не зависит от x. Приводится пример семейства $\{\varphi_x\}$ неразложимых отображений и такой функции $f(s, x) = f(s)$, что предел последовательности (1) в действительности зависит от x. Вообще, имеет место теорема: Предел последовательности (1) не зависит от x для всех интегрируемых функций $f(s, x) = f(s)$ тогда и только тогда, когда каждая интегрируемая функция h, удовлетворяющая равенству $h(s, x) = h(\varphi_x s, Tx)$, также удовлетворяет почти всюду (относительно меры $m \times \mu$) уравнению

$$\int_X h(s, y)\,\mu(dy) = \int_X h(\varphi_x s, y)\,\mu(dy).$$

Беря за S интервал $[0, 1)$, за $\mathfrak{S}$ — кольцо борелевских множеств и за m — лебегову меру, автор дает применения теорем. В частности, получается следующая теорема: Если $q(x)$ — измеримая функция относительно меры μ и $|q(x)| \equiv 1$, то для каждой функции $f(x) \in L^p(X)$ $(p \geqslant 1)$ последовательность средних

$$n^{-1}\sum_{k=1}^n q(x)\,q(Tx) \dots q(T^{k-1}x)\,f(T^k x)$$

сходится почти всюду и в p-й степени относительно меры μ. Предельная функция $F(x)$ почти всюду удовлетворяет уравнению $F(x) = q(x)F(Tx)$, и для каждого T-инвариантного множества $E \in \mathcal{E}$, на котором $|F(x)| > a > 0$, выполняется равенство

$$\int_E \frac{f(x)}{F(x)}\,\mu(dx) = \mu(E).$$

K. Urbanik

4987. О стохастической эргодической теореме. Гладыш (Über den stochastischen Ergodensatz. Gładysz S.), Studia math., 1956, 15, № 2, 158—173 (нем.)

Пусть $(S, \mathfrak{S}, m)$ и $(X, \mathcal{E}, \mu)$ — пространства с мерой, $(X_r^*, \mathcal{E}_r^*, \mu_r^*)$ — произведение r экземпляров пространств $(X, \mathcal{E}, \mu)$, $(X^*, \mathcal{E}^*, \mu^*)$ — произведение счетного множества таких пространств и $\Phi_r = \{\varphi_{(x_1, \dots, x_r)}\}$ (где $(x_1, \dots, x_r) \in X_r^*$) — семейство отображений пространства S в себя, сохраняющих меру m. В произведении $(S \times X^*, \mathfrak{S} \times \mathcal{E}^*, m \times \mu^*)$ отображением, сохраняющим меру $m \times \mu^*$, будет отображение

$$\varphi^*(s, x^*) = \varphi^*(s, x_1, x_2, \dots) = (\varphi_{(x_1, \dots, x_r)}s, x_2, x_3, \dots).$$

Доказывается следующая теорема: Если $q(s, x_1, \dots, x_r)$ — измеримая функция относительно меры $m \times \mu_r^*$ и $|q| \equiv 1$, то для каждой функции $f(s, x^*) \in L^p(S \times X^*)$ $(p \geqslant 1)$ последовательность средних $n^{-1}\sum_{k=1}^n q(s, x^*) \dots q(\varphi^{*k-1}(s, x^*))\,f(\varphi^{*k}(s, x^*))$ сходится к функции $f^*(s, x_1, \dots, x_{r-1}) \in L^p(S \times X^*)$ почти всюду и в p-й степени относительно меры $m \times \mu^*$.

При $r = 1$ и $q \equiv 1$ отсюда получается эргодическая теорема в форме, данной Рыль-Нардзевским. Дается пример, в котором предельная функция $f^*(s, x_1, \dots, x_{r-1})$ действительно зависит от аргументов $s, x_1, \dots, x_{r-1}$. Автор называет семейство Φ_r эргодическим, если каждое множество $A \in B \times \mathcal{E}_1 \times \dots \times \mathcal{E}_{r-1}$, почти инвариантное относительно почти всех (в смысле меры μ_r) отображений

$$(s, x_1, \dots, x_{r-1}) \to (\varphi_{(x_1, \dots, x_r)}s, x_2, \dots, x_r),$$

имеет меру $m \times \mu_1 \times \dots \times \mu_{r-1}$, равную 0 и 1.

Доказывается, что эргодичность семейства Φ_r эквивалентна эргодичности отображения φ^*. В качестве применения автор получает теорему: Пусть $x_1(t), x_2(t), \ldots$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ — последовательность независимых действительных функций с одной и той же функцией распределения; тогда для каждой интегрируемой функции периода 1 почти для всех (s, t) выполняется равенство

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{k=1}^{n} f\left(s + \sum_{j=1}^{k} x_j(t)\right) = \int_0^1 f(s)\, ds,$$

если значения функции $x_1(t) \pmod 1$ не сводятся к конечному числу рациональных чисел (без учета множества меры нуль аргумента t); в противном случае имеем для некоторого N

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{k=1}^{n} f\left(s + \sum_{j=1}^{k} x_j(t)\right) =$$

$$= N^{-1}\left[f(s) + f(s + N^{-1}) + \ldots + f(s + (N-1)N^{-1}\right].$$

Даются условия, накладываемые на семейства Φ_r, при выполнении которых отображение φ^* будет слабо перемешивающим. K. Urbanik

4988. Вклад венгров в спектральную теорию линейных операторов. Надь (Contribution en Hongrie à la théorie spectrale des transformations linéaires. Szökefalvi-Nagy Béla), Чехосл. матем. ж., 1956, 6, № 2, 166—176 (франц.; рез. русск.)

Обзорный доклад автора на IV съезде чехословацких математиков в Праге 2 сентября 1955 г.

Содержание обзора: 1) ограниченные самосопряженные операторы (спектральная теорема); 2) неограниченные самосопряженные операторы (спектральная теорема); 3) общие линейные операторы (метод контурного интегрирования и теория Ф. Рисса вполне непрерывных операторов); 4) возмущения спектра; 5) группы и полугруппы операторов (теорема Стоуна для группы унитарных операторов и ее обобщения на группу и полугруппу самосопряженных операторов, группу равномерно ограниченных операторов и полугруппу сжатий).

Библиография работ венгерских математиков по теории линейных операторов, 25 названий.

И. М. Глазман

4989 К. Введение в абстрактный гармонический анализ. Люмис Л. М., Изд-во ин. лит., 1956, 252 стр., 10 р. 90 к.

Перевод с английского (РЖМат, 1955, 353 К) с добавлением предисловия к русскому изданию и примечаний переводчика.

См. также: 4780, 4799, 4816, 4837, 4843, 4849, 4861, 5135, 5181.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

4990. О проблеме сходимости относительных частот в теории вероятностей. Туллен (Über das Konvergenzproblem der relativen Häufigkeiten in der Wahrscheinlichkeitstheorie. Thull en Peter), Math. Ann., 1956, **131**, № 4, 346—353 (нем.)

Бесконечная последовательность опытов с простой альтернативой $E(=1)$ и $E(=0)$ рассматривается как числовая последовательность, состоящая из единиц и нулей, и, таким образом, исследование вопроса о существовании предела относительных частот h_n наступления события E за n первых опытов сводится к чисто арифметическому анализу свойств средних арифметических.

Последовательность относительных частот $\{h_n\}$ называется квазисходящейся к числу p, если для любого $\varepsilon > 0$ доля тех h_i среди $h_1, h_2, \ldots, h_n$, которые удовлетворяют неравенству $|h_i - p| < \varepsilon$, стремится к 1 при $n \to \infty$. Доказывается теорема: из квазисходимости последовательности относительных частот следует обычная сходимость этой последовательности.

Желая дать чисто арифметическое описание содержания теоремы Бернулли о законе больших чисел, автор вводит понятие бернуллиевой последовательности; рассматриваемая последовательность, состоящая из единиц и нулей, разбивается на счетное число отрезков A_i, каждый из которых состоит из n последовательных элементов последовательности; h_{A_i} — относительная частота единиц в отрезке A_i, $H_t(\varepsilon, n)$ — доля тех отрезков A_i среди $A_1, A_2, \ldots, A_t$, для которых удовлетворяется неравенство $|h_{A_i} - p| < \varepsilon$, где ε — заданное положительное число, p — некоторое число. Последовательность, состоящая из единиц и нулей, называется бернуллиевой, если существует такое число p, что для любых заданных $\varepsilon > 0$ и $0 < \eta < 1$ найдется натуральное число n_0, обладающее свойством: для каждого $n \geqslant n_0$ выполняется неравенство $\underline{\lim}_{t\to\infty} H_t(\varepsilon, n) > \eta$. Теорема: для всякой бернуллиевой последовательности относительная частота h_n имеет предел при $n \to \infty$, причем $\lim_{n\to\infty} h_n = p$.

А. А. Бобров

4991. Точечные стохастические процессы. Бартлетт (Processus stochastiques ponctuels. Bartlett M. S.), Ann. Inst. Henri Poincaré, 1954, 14, № 1, 35—60 (франц.)

Обзор задач теории точечных стохастических процессов (т. е. процессов, которые реализуются системами точек); задачи касаются метода характеристических функционалов и их частных случаев — производящих функций. Автор изучает различные типы точечных процессов, применяемых в физике и биологии.

В первой части рассматривается процесс космической радиации, в котором учитывается энергия преобразований частиц. Согласно Рамакришнану и Бхабха, этот процесс описывается плотностями появления частиц в непересекающихся интервалах энергии. Рассматривается соотношение между этими плотностями и характеристическим функционалом процесса. Вторая часть содержит интегро-дифференциальные уравнения для некоторых характеристических функционалов (именно производящих функционалов) процессов увеличения. В этом классе процессов автор рассматривает процессы Кендалла развития популяций из бактерий, в которых интенсивность деления и смерти зависит от возраста бактерий. В третьей части рассматриваются процессы эпидемий и дифференциальные уравнения для производящих функций и производящих функционалов этих процессов. Четвертая часть посвящена точечным стационарным процессам. Обсуждаются применения моделей, описывающих явления генетической рекомбинации и родственные явления в биологии и астрономии. Пятая часть содержит примеры применения точечных процессов, однородных во времени и пространстве, выходящих за границы классической теории флюктуаций Смолуховского. Дается мо-

дель, описывающая эмульсию коллоидных частиц, а также развитие микроорганизмов. Для этих процессов автор дает представление характеристических функционалов, следующих из уравнения Ланжевена.
K. Urbanik

4992. Реализации некоторых, чисто прерывных, стохастических процессов. Фиш (The realizations of some purely discontinuous stochastic processes. Fisz M.), Bull. Acad. Polon. Sci., 1956, Cl. 3, 4, № 2, 63—65 (англ.); Бюл. Польской АН, 1956, Отд. 3, 4, № 2, 59—61

Рассматриваются сепарабельные стохастические процессы $x_t(\omega)$ без фиксированных точек разрыва. Пусть $x_I(\omega)$ обозначает приращение для процесса $x_t(\omega)$ в интервале I и $a(I) = P(x_I(\omega) \neq 0)$. Формулируются теоремы:

1) Если верхний интеграл Беркилла от $a(I)$ конечен, то почти все реализации процессов являются ступенчатыми функциями со средним числом скачков, равных интегралу Беркилла.

2) Если почти все реализации процесса являются ступенчатыми функциями с конечным средним числом скачков, тогда это число равно интегралу Беркилла от функции $a(I)$. Доказательства теорем будут опубликованы в Studia math.
K. Urbanik

4993. О невозвратных марковских процессах со счетным числом состояний и стационарными вероятностями перехода. Блекуэлл (On transient Markov processes with a countable number of states and stationary transition probabilities. Blackwell David), Ann. Math. Statistics, 1955, 26, № 4, 654—658 (англ.)

Рассматривается последовательность случайных величин $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$, образующая однородную цепь Маркова со счетным числом состояний, заданную вероятностями перехода p_{ij}.

Для любого множества состояний I обозначим через $U(I)$ событие, состоящее в том, что для бесконечно многих n $\xi_n \in I$, и через $L(I)$, событие, состоящее в том, что $\xi_n \in I$ для всех n, начиная с некоторого. Через $\mathfrak{M}$ обозначим совокупность множеств I, для которых вероятность $P\{U(I) = 0\}$. Через $\mathfrak{L}$ обозначим совокупность множеств I таких, что с точностью до вероятности нуль множества $L(I)$ и $U(I)$ совпадают. Наконец, если $I \in \mathfrak{L}$ и $I \notin \mathfrak{M}$, то множество I называется почти замкнутым.

Назовем измеримую по Борелю функцию f, заданную на пространстве последовательностей $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$, где x_i — состояния системы, инвариантной, если $f(x_0, x_1, \ldots) = f(x_1, x_2, \ldots)$.

Событие называется инвариантным, если инвариантна его характеристическая функция.

Автор доказывает, что для любого инвариантного события найдется множество V такое, что с точностью до вероятности 0 события V и $U(I)$ совпадают. Далее, существует счетная совокупность непересекающихся почти замкнутых множеств состояний c_i такая, что: 1) каждое из c_i, кроме, быть может, одного, является атомом в том смысле, что внутри c_i не лежат два непересекающихся почти замкнутых множества, 2) то из c_i, которое не является атомом, не содержит внутри себя атомов, 3) $\sum_i P\{L(c_i)\} = 1$.

Приводится пример цепи, имеющей почти замкнутое множество, не являющееся атомом.

Рассматриваются связи изученного вопроса с вопросом о решениях бесконечной системы уравнений $a_i = \sum_j a_j p_{ji}$.

Полученные результаты прилагаются к изучению сумм независимых случайных величин.
Р. Л. Добрушин

4994. О свертке распределений. Тейкер (On the convolution of distributions. Teicher Henry), Ann. Math. Statistics, 1954, 25, № 4, 775—778 (англ.)

Дается несколько нетрудно доказываемых теорем о виде аддитивно замкнутых семейств распределений. Семейство распределений $F(x; \lambda)$, зависящих от параметра λ, называется аддитивно замкнутым при $\lambda \in D$, где D есть абелева полугруппа относительно сложения, если для любых $\lambda_i \in D$ $(i = 1,2)$

$$F(x; \lambda_1) * F(x; \lambda_2) = F(x; \lambda_1 + \lambda_2)$$

($*$ — знак свертки). Типичная теорема: Если D — множество положительных чисел, то для аддитивной замкнутости семейства $F(x; \lambda)$ при непрерывности по λ характеристической функции $\varphi(t; \lambda)$, отвечающей $F(x; \lambda)$, необходимо и достаточно, чтобы $\varphi(t; \lambda) = [f(t)]^\lambda$, где $f(t)$ — характеристическая функция безгранично делимого распределения.
Ю. В. Линник

4995. Об одной теореме Джуна. Станоевич (О једном ставу K. L. Chung-a.; Станојевић Часлав В.), Весн. Друшт. матем. и физ. Н. Р. Србије, 1956, 8, № 1—2, 59—60 (сербо-хорв.; рез. англ.)

Доказывается одна разновидность теоремы Джуна (Chung K. L., Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, University of California, 1951, 348—349). Пусть $\{X_n\}$ — последовательность независимых случайных величин, причем $M(X_n) = 0$, $M(|X_n|^{2r}) < \infty$ и $n\varepsilon_n^{2r} \to \infty$, $\varepsilon_n > 0$, $\varepsilon_n \to 0$ для некоторого $r \geqslant 1$. Если

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M(|X_n|^{2r})}{n^{r+1}\varepsilon_n^{2r}} < \infty,$$

то

$$P\left\{\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n\varepsilon_n} = 0\right\} = 1.$$

Резюме автора

4996. Случайные уравнения. Шпачек (Zufällige Gleichungen. Špaček Antonín), Чехосл. матем. ж., 1955, 5, № 4, 462—466 (нем.; рез. русс.)

Рассматриваются сжатые отображения метрического пространства, зависящие от параметра, причем в множестве значений параметра задана вероятностная мера. При некоторых предположениях типа регулярности доказывается, что существующая в соответствии с известной теоремой Банаха неподвижная точка этого преобразования является случайной величиной, т. е. зависит от параметра измеримым образом. В качестве приложения доказывается теорема существования решения для «случайного» интегрального уравнения Фредгольма.
Р. Л. Добрушин

4997. О законе Пуассона для распределения частиц в пространстве. Добрушин Р. Л., Укр. матем. ж., 1956, 8, № 2, 127—134

Тема работы связана с теоремой Дуба (Doob J. L., Stochastic processes, New York—London, 1953, стр. 404) об инвариантности закона Пуассона пространственного распределения частиц при независимых движениях. Пусть $\{\xi_i(t)\}$ $(i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, 0 \leqslant t < \infty)$ — последовательность случайных величин, причем приращения $\xi_i(t) - \xi_i(0)$ (для всех i при фиксированном t) взаимно независимы, одинаково распределены и не зависят от $\xi_j(0)$. Пусть, далее, Δ — любой интервал длины $|\Delta|$, $\eta_\Delta(t)$ — число тех $\xi_j(t)$, для которых $\xi_j(t) \in \Delta$, и

$$P_t(a, b) = P\{a \leqslant \xi_i(t) - \xi_i(0) \leqslant b\}.$$

Теорема 1. Если

$$\lim_{|\Delta|\to\infty} M\left|\frac{\eta_\Delta(0)}{|\Delta|}-\lambda\right|=0, \qquad (1)$$

равномерно по всем Δ, и при любом $l>0$

$$\lim_{t\to 0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}|P_t(nl,\ (n+1)l)-P_t((n-1)l,\ nl)|=0,$$

то при $t\to\infty$ величины $\eta_{\Delta_j}(t)$ ($j=1, 2, \ldots$, интервалы Δ_j — попарно без общих точек) асимптотически независимы и распределены по закону Пуассона с параметром $\lambda|\Delta_j|$.

Далее условие (1) отбрасывается и заменяется предположением о пространственной однородности распределения величин $\eta_\Delta(0)$. В этом случае величины $\eta_{\Delta_j}(t)$ ($j=1, 2, \ldots, n$) в пределе при $t\to\infty$ имеют совместное обобщение распределения Пуассона. Из последнего результата и теоремы Дуба вытекает, что инвариантными распределениями частиц при независимых движениях и конечности $M\eta_\Delta$ (для всех Δ) являются обобщенные распределения Пуассона и только они. И. И. Гихман

4998. **Предельные теоремы в случае переходных вероятностей, стремящихся к нулю. Кангиссер** (Grenzwertsätze für verschwindende Übergangswahrscheinlichkeiten. Kanngiesser W.), Mitteilungsbl. math. Statist., 1956, 8, № 1, 15—31 (нем.).

В случае простой однородной цепи Маркова с двумя возможными состояниями (0, 1) рассматриваются три распределения вероятностей: 1) $W_n(x)$ — вероятность появления x единиц при n испытаниях ($x=0, 1, \ldots, n$) (аналог распределения Бернулли для независимых испытаний); 2) $\hat{W}_m(z)$ — вероятность появления m-й единицы впервые при $m+z$-м испытании ($z=0, 1, 2, \ldots$) (аналог распределения Паскаля для независимых испытаний); 3) $\hat{W}^*_m(z)$ — аналогичная $\hat{W}_m(z)$ вероятность относительно появления нуля.

Ставится задача изучения предельного поведения этих вероятностей при n (соответственно m), стремящемся к бесконечности, в случае, когда одна или две переходные вероятности в различных строках матрицы вероятностей перехода стремятся к нулю как $1/n$ (соответственно $1/m$). Приведенные при этом без доказательства предельные теоремы для $W_n(x)$ известны в литературе, аналогичные теоремы для $\hat{W}_m(z)$ и $\hat{W}^*_m(z)$ приводятся впервые.

В работе выписываются довольно громоздкие точные значения средних и дисперсий указанных распределений. Б. С. Флейшман

4999. **Изучение истории теории вероятностей и статистики. Дейвид** (Studies in the history of probability and statistics. I. Dicing and gaming (a note on the history of probability). David F. N.), Biometrika, 1955, 42, № 1—2, 1—15 (англ.)

На основании анализа письменных источников и музейных фондов Лувра и Британского музея автор излагает историю азартных игр от их возникновения до зарождения теории вероятностей в XVII в. Возникновение азартных игр он относит к 3 тыс. г. до н. э. Рассказывается об использовании астрагалов для азартных игр. Описываются первые найденные игральные кости (3 тыс. г. до н. э.), которые были не всегда в форме куба. Делается обоснованное предположение о применении игральных костей для религиозных ритуалов. Не вызывает сомнений, что игральные кости употреблялись для предсказаний.

В Римской империи игры в кости достигли огромной популярности. Дается описание некоторых образцов костей классической древности, хранящихся в Британском музее (Лондон).

В средневековой литературе, в том числе и художественной, можно найти описание азартных игр в кости, количество таких ссылок со временем растет. Более кратко изложен период, к которому относится деятельность Кардано, Галилея, Ферма, Паскаля и Гюйгенса. Автор не считает возможным приписывать Паскалю и Ферма большего значения для теории вероятностей, чем другим названным лицам. Имеется много ссылок на литературу.

Примечание референта. Автор не связывает возникновение теории вероятностей как науки с экономическим развитием общества, в частности с возникновением буржуазного общества, поэтому он вынужден делать несостоятельные объяснения, почему теория вероятностей не возникла в древности или средние века, когда азартные игры имели широкое распространение. Л. Е. Майстров

5000. **Ошибки, возникающие при обычном правиле округления десятичных дробей. Мано** (Errors due to count fractions of five and over as a unit and disregard the rest. Mano Takayoshi), 山口大學理學會誌, Ямагути дайгаку ригаккайси, Yamaguchi J. Sci., 1955, 6, 95—105 (англ.)

Пусть x_i — целые неотрицательные числа и ξ_i ($i=1, 2$ или $i=1, 2, \ldots,$) — независимые случайные величины, равномерно распределенные в $\langle x_i-{}^1/_2, x_i+{}^1/_2\rangle$. Автор приводит выражения для плотностей распределения случайных величин $\xi_1\pm\xi_2$, $\xi_1\xi_2$, ξ_1/ξ_2 ($x_1\neq 0$, $x_2\neq 0$) и, принимая операторную символику, также для $\sum_{i=1}^n\xi_i$, $\sum_{i=1}^n a_i\xi_i$ ($a_i>0$), $\prod_{i=1}^n\xi_i$ ($x_i\neq 0$).

V. Dupač

5001. **О теории дифференциальных уравнений стохастических процессов. II. Гихман** (On the theory of differential equations of stochastic processes. II. Gihman I. I.), Amer. Math. Soc. Translat., 1955, 1, 139—161 (англ.)

Часть 1 см. РЖМат, 1957, 1627.

5002. **Связь теории вероятностей и математической статистики. Заксер** (Beziehungen zwischen Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung. Saxer W.), Math.-phys. Semesterber., 1956, 5, № 1—2, 49—62 (нем.)

На различных этапах развития науки автор прослеживает связь между теорией вероятностей и ее статистическими приложениями, подчеркивая их выдающееся значение для формирования научных идей. Н. В. Смирнов

5003. **Одна проблема теории вероятностей. Нараяна** (A problem in the theory of probability. Narayana T. V.), J. Indian Soc. Agric. Statist., 1954, 6, № 2, 139—146 (англ.)

Рассматривается последовательность из $2n+r$ опытов, исходом каждого из которых является появление одного из событий A или B с соответствующими вероятностями p и $q=1-p$, причем $p>q$. Игра g_r заключается в том, что вышеупомянутые опыты продолжаются до тех пор, пока впервые число опытов, в которых произошло событие A, окажется ровно на r больше, чем число опытов, в которых произошло событие B. Доказано, что производящей функцией для g_r будет

$$g_r(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r}{n+r}\binom{2n+r-1}{n}p^{n+r}q^n s^{2n+r}.$$

Из полученных результатов автор получает ряд формул комбинаторного анализа, которые могут быть истолкованы как соотношения между моментами функций распределений, определяемых производящими функциями $g_{r_1}(s)$, $g_{r_2}(s)$ и $g_{r_1+r_2}(s)$.

Б. В. Финкельштейн

5004. Элементарное определение значения интеграла вероятностей. Крафт (Elementare Bestimmung des Wertes des Wahrscheinlichkeitsintegrals. Krafft Maximilian), Math.-phys. Semesterber., 1956, 5, № 1—2, 120—122 (нем.)

Пусть

$$J_m = \int_0^{\pi/2} \sin^m x\,dx,$$

где m — целое неотрицательное число. Имеем:

$$J_m = \frac{m-1}{m} J_{m-2}, \quad J_1 = 1, \quad J_0 = \frac{\pi}{2}.$$

$$J_{2k} J_{2k+1} = \frac{1}{2k+1} \frac{\pi}{2}. \qquad (1)$$

На основании (1) автор получает неравенства

$$\frac{1}{1+q}\left(\int_0^\infty e^{-\xi^2} d\xi\right)^2 < \frac{\pi}{2} < \frac{1}{1-q}\left(\int_0^\infty e^{-\xi^2} d\xi\right)^2,$$

$$q = 1/(2k+1).$$

При $k \to \infty$ получаем хорошо известное равенство

$$\int_0^\infty e^{-\xi^2} d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

А. К. Митропольский

5005 К. Сообщение о съезде по теории вероятностей и математической статистике в Берлине с 19 по 22 октября 1954 г. (Bericht über die Tagung Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik in Berlin vom 19. bis 22. Oktober 1954. Berlin, Dtsch. Verl. Wiss., 1956, 130 S., ill., 14. — DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1956, A, № 30, 2127 (нем.)

5006 К. Исчисление вероятностей. Часть 2. Общая теория случайных величин. Дармуа, Жиро (Calcul des probabilités. 2 part. Théorie générale des variables aléatoires quelconques. Darmois Georges, Girault Maurice. Paris, Centre docum. univ., 1954, 175 p., ill.), Bibliogr. France, 1956, 145, № 20, 463 (франц.)

5007 Д. Предельные теоремы для случайных процессов. Скороход А. В. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., МГУ, М., 1956

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

5008. Существование и единственность для равномерно наиболее мощного теста в биномиальном случае. Бланк (Existence and uniqueness of a uniformly most powerful randomized unbiased test for the binomial. Blank A. A.), Biometrika, 1956, 43, № 3—4, 465—466 (англ.)

Пусть θ означает вероятность появления события в каждом из n независимых испытаний схемы Бернулли. На основе наблюденных X появлений события проверяется гипотеза $\theta = p \in (0, 1)$ при альтернативной гипотезе $\theta \neq p$. Выбор теста эквивалентен определению критерия $\psi(X) \leqslant 1$, так что проверяемая гипотеза принимается с вероятностью $\psi_\nu = \psi(\nu)$ при $X = \nu$ ($\nu = 0, 1, \ldots, n$). Полная вероятность принятия гипотезы удовлетворяет равенству

$$\lambda(p) = \sum_{\nu=0}^{n} \psi_\nu b_\nu(p) = 1 - \alpha,$$

где $b_\nu(p)$ — биномиальный член $\binom{n}{\nu} p^\nu (1-p)^{n-\nu}$ и α — «объем» теста. Тест будет несмещенным, если для любого $\theta \in [0, 1]$ $\lambda(\theta) \leqslant 1 - \alpha$, и равномерно наиболее мощным, если для него минимизируется вероятность ложного принятия гипотезы для любого $\theta \neq p$. Точер (Tocher K. D., Biometrika, 1950, 37, 130) показал, что если равномерно наиболее мощный тест существует среди несмещенных тестов объема α, он должен иметь следующий вид: $\psi_\nu = 1$ для $s+1 \leqslant \nu \leqslant t-1$, $\psi_s = c$, $\psi_t = d$, $\psi_\nu = 0$ при прочих значениях ν. Автор показывает, что такой тест действительно существует и притом единственный.

Н. В. Смирнов

5009. Мощность некоторых критериев случайности выборки. Де-Мюнтер (Fonction de puissance de certains tests du caractère aléatoire d'un échantillon. De Munter P.), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1956, 42, № 3, 291—312 (франц.)

Автор занимается вопросами состоятельности и мощности в случае специальных видоизменений двух тестов, предложенных Манном, и двух тестов, предложенных Фостером и Стюартом, для гипотезы случайности временного ряда.

Примечание референта. Понимание теста затруднено многочисленными ошибками и неточностями, например: соотношение (7) справедливо только для независимых x_i; (8) справедливо только, если в сумме $\sum$ ограничиться $i' \leqslant r'$; в соотношении (9) в последнем равенстве должно быть $p^0_{ii'rr'}$; соотношение (10) неверно и т. д.

V. Fabian

5010. Медианové оценки. Зитек (Medianové odhady. Zítek František), Apl. mat., 1956, 1, № 3, 237—244 (чеш.; рез. русс., англ.)

Пусть X — измеримое пространство, $\mathfrak{R}$ — система мер вероятностей в X, F — вещественный функционал в $\mathfrak{B}$. Медианové оценкой для F называется всякая вещественная функция φ, определенная в X и удовлетворяющая

$$\pi\{\varphi^{-1}(-\infty, F(\pi))\} = \pi\{\varphi^{-1}(F(\pi), \infty)\}$$

(все вещественные случайные переменные здесь предполагаем непрерывными). Свойства медианových оценок исследуются главным образом с точки зрения теории «тесности» (closeness) Питмана. Главными результатами этой работы являются, с одной стороны, теоремы 3 и 4, которые дают условия, достаточные для того, чтобы медианová оценка φ была более «тесной», чем другая оценка ψ; теорема 3 является обобщением одной теоремы Питмана (Pitman E. J. G., Proc. Cambridge Philos. Soc., 1937, 33, 212—222) и, с другой стороны, § 4, где в качестве примера используется изложенная теория для оценки дисперсии σ^2 (или среднего квадратического отклонения σ) случайной величины с нормальным распределением. Указывается, что медианové оценки φ_i (соответственно ψ_i) являются более тесными (хотя и менее эффективными), чем соответствующие несмещенные оценки.

Резюме автора

5011. Новые таблицы для критерия значимости Беренса. Фишер, Хили (New tables of Behrens'-test of significance. Fisher R. A., Healy M. J. R.), J. Roy. Statist. Soc., 1956, B18, № 2, 212—216 (англ.)

Находится точное распределение для критерия зна-

чимости разности между средними двух выборок из нормальных совокупностей (с различными дисперсиями) для тех случаев, когда число степеней свободы для статистик Стьюдента в каждой выборке будет нечетно. Указывается метод вычисления таблиц полученного распределения в случае малых объемов выборок.
Н. В. Смирнов

5012. Статистический анализ стохастических процессов. Бартлетт (The statistical analysis of stochastic processes. Bartlett S.), Colloq. analyse statist., CBRM, Bruxelles, 1954, Paris, 1955, 113—132 (англ.)

Рассматривается проблема статистических оценок стационарных процессов. Если теоретическая модель изучаемого процесса известна, то задача сводится к оценке параметров, для которой может быть использован принцип максимума правдоподобия оценок. Так, например, в случае «автокорреляции»

$$X_r = \beta X_{r-1} + Y_r,$$

если Y_r независимы и нормальны $(0, \sigma_Y^2)$, то логарифм функции правдоподобия (L) определяется из

$$\frac{L}{n} = -\frac{1}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\log\sigma_Y^2 - \frac{1}{2n}\sum_{r=1}^{n}\frac{X_r - \beta X_{r-1}}{\sigma_Y^2} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Отсюда оценка для β:

$$\hat{\beta} \sim \sum_{r=1}^{n} X_r X_{r-1} : \sum_{r=1}^{n} X_{r-1}^2.$$

Оценка σ_Y^2 для данного значения β:

$$\hat{\alpha}(\beta) = \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}(X_r - \beta X_{r-1})^2.$$

Наконец доверительный интервал для β:

$$\hat{\beta} \pm \frac{\lambda_q}{\sqrt{n}} : \left[(1-\hat{\beta}^2) + \frac{\hat{\beta}}{n} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right],$$

где λ_q — $q^0/_0$-ная граница нормального отклонения.

Рассматриваются также процессы с непрерывным временем. Автор указывает, что в большинстве случаев путем предельного перехода от рассмотрения значений X в моменты $t_1, t_2, \ldots, t_n$, при котором так $(t_r - t_{r-1}) \to 0$, что можно получить лишь асимптотические результаты. Приводятся конкретные примеры. Библ. 41 назв.
М. И. Эйдельнант

5013. Асимптотическое распределение критерия χ^2 при одновременном возрастании объема наблюдений и числа групп. Туманян С. Х., Теория вероятностей и ее применения, 1956, 1, № 1, 131—145 (рез. англ.)

Пусть $G(x)$ — известная функция распределения случайной величины, $E_1, \ldots, E_{s+1}$ — непересекающиеся множества возможных значений этой случайной величины,

$$p_i = \int_{E_i} dG(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, s+1),$$

n — число независимых наблюдений

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{s+1}\frac{n}{p_i}\left(\frac{m_i}{n} - p_i\right)^2, \qquad P(\chi^2 < x) = F(x),$$

$$K_s(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{s/2}\Gamma(s/2)}\displaystyle\int_0^x x^{s-1}e^{-x/2}\,dx & \text{при } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{при } x \leqslant 0, \end{cases}$$

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{u}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt.$$

Доказываются:

Теорема 1. Если при одновременном безграничном возрастании n и s выполняется соотношение

$$\min np_i \to \infty \qquad (1 \leqslant i \leqslant s+1),$$

то равномерно по u

$$F(s + u\sqrt{2s}) \to \Phi(u).$$

Теорема 2. Как бы ни изменялись одновременно n, s и p_i при условии

$$\min np_i \to \infty \qquad (1 \leqslant i \leqslant s+1)$$

равномерно по x имеет место соотношение

$$|F(x) - K_s(x)| \to 0.$$

Б. В. Финкельштейн

5014. О векторандах и непараметрическом критерии согласия для двух конечных выборок (Метод векторандов). Озолс В., Latv. PSR zinātņu Akad. vēstis, Изв. АН ЛатвССР, 1956, № 8, 153—158 (рез. латыш.)

Автор, не приводя точных доказательств, указывает, что развитый им метод «векторандов» позволяет решать различные задачи, связанные с непараметрическим критерием согласия для двух конечных выборок и, в частности, получить результаты Б. В. Гнеденко, В. С. Королюка и Е. Л. Рвачевой (Докл. АН СССР, 1951, 80, № 4; 1952, 82, № 4).
Н. В. Смирнов

5015. Оценка масштабных параметров и параметров положения упорядоченными статистиками из односторонне и двухсторонне усеченных выборок. Часть I. Выборки объемом до 10 из нормальной совокупности. Сархан, Гринберг (Estimation of location and scale parameters by order statistics from singly and doubly censored samples. Part. I. The normal distribution up to samples of size 10. Sarhan A. E., Greenberg B. G.), Ann. Math. Statistics, 1956, 27, № 2, 427—451 (англ.)

Рассматриваются выборки, извлеченные из нормальной совокупности. Известны количество членов в выборках, но неизвестны значения r_1 наименьших членов (односторонне усеченные выборки) или неизвестны r_1 наименьших значений и наибольших значений (двусторонне усеченные выборки). Предполагается, что выборки извлечены из нормальной совокупности.

В работе табулированы значения следующих величин: 1) дисперсии и ковариации членов упорядоченной выборки с объемом $n \leqslant 20$ (с 10 десятичными знаками); 2) коэффициенты наиболее эффективных линейных систематических статистик для математического ожидания и стандартного отклонения для выборок с объемом $n \leqslant 10$ (8 десятичных знаков); 3) дисперсии и ковариации оценок 2) (8 десятичных знаков); 4) $^0/_0$ эффективности оценок математического ожидания и стандартного отклонения для усеченных выборок по сравнению с соответствующими оценками для полных выборок. 5) дисперсия и относительная эффективность «альтернативных» оценок математического ожидания и стандартного отклонения, предложенные Гупта (Gupta A. K., Biometrika, 1952, 39, 260—273).

Путем анализа помещенных таблиц в заключении получен ряд выводов. Б. В. Финкельштейн

5016. Об обращении некоторого класса специальных матриц. Рой, Сархан (On inverting a class of patterned matrices. Roy S. N., Sarhan A. E.), Biometrika, 1956, 43, № 1, 227—231 (англ.)

Выписываются в явном виде обратные матрицы для матриц следующих типов:

1) $\mathbf{M} = \|m_{ij}\|_1^n$, где $m_{ij} = 0$ при $i < j$ и $m_{ij} = a_i b_j$ при $i \geqslant j$.

2. $\mathbf{C} = \|c_i c_j (a_1 + a_2 + \ldots + a_k)\|_{i,j=1}^n$, $k = \min(i, j)$.

3. $\mathbf{C} = \|p_i \delta_{ij} + \lambda q_i z_j\|_{i,j=1}^n$, $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера.

4. $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} k\mathbf{I} & a\mathbf{J} \\ a\mathbf{J} & m\mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{matrix} \} n \\ \} p \end{matrix}$, где $\mathbf{I}$ — единичная матрица, а $\mathbf{J}$ — матрица, у которой все элементы равны единице.

5. $$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} k\mathbf{I} & \mathbf{J} & \mathbf{J} \\ \mathbf{J} & k\mathbf{I} & \mathbf{J} \\ \mathbf{J} & \mathbf{J} & k\mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{matrix} \} k \\ \} k-1 \\ \} k-1 \end{matrix}$$
$$\underbrace{}_{k} \quad \underbrace{}_{k-1} \quad \underbrace{}_{k-1}$$

6. $$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} a & b & b & \ldots & b \\ b & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ b & \cdot & & & \\ \vdots & \vdots & & k\mathbf{I} + d\mathbf{J} & \\ b & \cdot & & & \end{pmatrix}$$

В качестве примеров рассматриваются применения к задачам математической статистики.

Ф. Р. Гантмахер

5017. Систематическая ошибка при некоторых оценках параметров распределения крайних членов. Кимболл (The bias in certain estimates of the parameters of the extreme value distribution. Kimball Bradford F.), Ann. Math. Statistics, 1956, 27, № 3, 758—767 (англ.)

В статье главное внимание уделяется оценкам по максимуму правдоподобия шкальных параметров распределения крайних членов нормальной выборки, для которых систематическое смещение может быть получено в явном виде. Выводится формула для подсчета смещения, и множитель смещения табулируется для объемов выборок от $n = 2$ до $n = 112$.

По резюме автора.

5018. Погрешности нормальных приближений к t, τ и подобным им распределениям. Чжу (Errors in normal approximations to the t, τ, and similar types of distribution. Chu J. T.), Ann. Math. Statistics, 1956, 27, № 3, 780—789 (англ.)

С помощью ряда элементарных неравенств автор получает верхние и нижние границы для функции $S(t, n)$ t-распределения Стьюдента (с n степенями свободы), τ-распределения Томпсона, распределения χ^2 и некоторых других. Так, при $x, y \geqslant 0$, $n \geqslant 3$ имеем:

$$S(y, n) - S(-x, n) \begin{cases} \leqslant \sqrt{\dfrac{7n-3}{7n-14}} \left[\Phi\left(y\sqrt{\dfrac{n-2}{n}}\right) - \right. \\ \left. - \Phi\left(-x\sqrt{\dfrac{n-2}{n}}\right) \right], \quad (1) \\ \geqslant \dfrac{n}{n+1} \left[\Phi\left(y\sqrt{\dfrac{n+1}{n}}\right) - \right. \\ \left. - \Phi\left(-y\sqrt{\dfrac{n+1}{n}}\right) \right], \quad (2) \end{cases}$$

где $\Phi(x)$ — нормальная функция распределения.

На основе неравенств (1) и (2) показывается, что для $n \geqslant 8$ погрешность обычной нормальной аппроксимации к $S(x, n)$ равномерно меньше $1/n$.

Н. В. Смирнов

5019. Меры общей эффективности выборочных мультиномиальных таблиц. Поти (Measures of over-all efficiency of sample multinomial tables. Poti S. J.), Calcutta Statist. Assoc. Bull., 1956, 6, № 23, 102—112 (англ.)

Приведены некоторые теоретические и эмпирические данные о трех конкретных статистиках, оценивающих совместное отклонение k эмпирических частот от соответствующих вероятностей. И. И. Гихман

5020. Многомерное распределение и критерий χ^2. Ирон (Loi multinomiale et test du χ^2. Huron Roger), C. r. Acad. sci., 1955, 240, № 21, 2047—2048 (франц.)

Для проверки соответствия частот фиксированному полиномиальному распределению предлагается использовать наряду с обычным критерием χ^2 также отдельные линейные комбинации частот. Приведен пример из генетики. Б. А. Севастьянов

5021. Проверенные верхние процентные точки для наибольшего стьюдентизированного отклонения от средней выборки. Дейвид (Revised upper percentage points of the extreme studentized deviate from the sample mean. David H. A.), Biometrika, 1956, 43, № 3—4, 449—451 (англ.)

Даются таблицы $q\%$-ных ($q = 10, 5, 2, 5, 1, 0, 5, 0, 1$) верхних точек распределения статистики

$$\max\left(\frac{x_n - \bar{x}}{s_\nu}, \frac{\bar{x} - x_1}{s_\nu}\right),$$

где x_1 и x_n — крайние члены выборки из нормальной совокупности объема n, $\bar{x}$ — среднее арифметическое выборки, а s_ν — оценка для среднего квадратического с ν степенями свободы, сделанная на основании независимой выборки. Приведены значения $q\%$-ных точек для $n = 3(1), 4, 5, \ldots, 10, 12$ и $\nu = 10(1), \ldots, 20, 24, 30, 40, 60, 120, \infty$.

Н. В. Смирнов

5022. Метод статистики, использующий обобщенные кривые распределения, с обсуждением недостатков существующих методов. (1). Хуан Ваньли (論現行數理統計法的缺點並建議 採用概括性頻率線的一種統計 方法(上)。黃萬里), 土木工程學報, Туму гунчэн сюэбао, Chinese J. Civil Engng, 1956, 3, № 1, 5—18 (кит.)

5023. Статистические оценки с квантилями. Дальхер (Statistische Schätzungen mit Quantilen. Dalcher Andreas), Mitt. Ver. schweiz. Versicherungsmathematiker, 1955, 55, № 3, 475—498 (нем.)

Рассматривается выборка объема n, извлеченная из совокупности, распределенной согласно закону $F(x; \theta, \theta')$, где θ, θ' — требующие оценки параметры. Пусть y_i и ξ_i $(i = 1, \ldots, k)$ — квантили выборочного (эмпирического) и соответственно теоретического распределений. Делается предположение линейности параметров относительно величин ξ_i, так что

$$\theta = \sum_{i=1}^k b_i \xi_i, \quad \theta' = \sum_{i=1}^k b_i' \xi_i;$$

в этом предположении естественно искать оценки вида

$$T = \sum_{i=1}^k b_i y_i, \quad T' = \sum_{i=1}^k b_i' y_i.$$

Дается выражение для дисперсии оценок и выводится условие их независимости. Показано, как можно добиться минимизации дисперсии этих оценок и оценить их эффективность. В качестве применения рассматриваются оценки параметров показательного, нормального распределений и закона Коши.

Б. В. Финкельштейн

5024. Таблицы математических ожиданий порядковых статистик и произведений порядковых статистик для выборок объемом до 20 из нормального распределения. Тейкроу (Tables of expected values of order statistics and products of order statistics for samples of size twenty and less from the normal distribution. Teichroew D.), Ann. Math. Statistics, 1956, 27, № 2, 410—426 (англ.)

Даны таблицы математических ожиданий $E(x_i; N)$; $E(x_i x_j; N)$ для выборки из нормированной нормальной совокупности с десятью десятичными знаками. Здесь x_i обозначает i-й член упорядоченной выборки.

Кроме того, даны таблицы с двадцати пятью десятичными знаками интегралов

$$\psi(a) = \int_{-\infty}^{\infty} [F(x)]^a [1 - F(x)]^a \, dx, \quad a = 1, 2, \ldots, 10,$$

$$\psi(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} [F(x)]^a \, dx \int_{x}^{\infty} [1 - F(y)]^b \, dy, \quad a, b = 1, 2, \ldots, 19,$$

где

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} \, dt.$$

При этом дается краткий исторический обзор работ по составлению таблиц для моментов членов упорядоченной выборки из нормальной совокупности.

Б. В. Финкельштейн

5025 К. Основные статистические понятия. Адамс (Basic statistical concepts. Adams Joe Kennedy. New York—London, McGraw-Hill, 1955, xvii, 304 pp., ill., 41 sh. 6d.) (англ.)

Цель автора — познакомить читателей, не владеющих высшей математикой, с основными понятиями и методами математической статистики. Книга построена таким образом, чтобы читатель мог ознакомиться с этими методами с помощью самых простых средств комбинаторики без привлечения понятия бесконечности и непрерывности. Первые семь глав дают понятие о конечных и дискретных распределениях вероятностей, о случайных выборках, о проверке статистических гипотез, о мощности критериев и о доверительных интервалах. В остальных главах (гл. 8—14) вводится и используется понятие непрерывных распределений. При этом сжато изложены основы дифференциального и интегрального исчисления. В обзорном порядке даются краткие сведения по следующим вопросам: доверительные интервалы и критерии для проверки статистических гипотез, связанные с нормальным распределением; критерий χ^2 Пирсона без параметров и с параметрами; распределение Стьюдента; двумерное распределение и исследование зависимости случайных величин; дисперсионный анализ; некоторые непараметрические критерии. В конце книги имеются приложения, в которых приведены таблицы, краткое изложение начал дифференциального и интегрального исчисления и некоторые теоремы теории вероятностей. Имеются задачи, часть из них снабжена ответами.

Б. А. Севастьянов

ТЕОРИЯ ИГР И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭКОНОМИКА

5026. Приближение оптимальных стратегий для одного класса игр. Фогель (Die Annäherung guter Strategien bei einer gewissen Klasse von Spielen. Vogel Walter), Math. Z., 1956, 65, № 3, 283—308 (нем.)

Рассматривается игра двух лиц с нулевой суммой на единичном квадрате. Приводится критерий существования последовательности ε-оптимальных стратегий игрока, сходящейся к его оптимальной стратегии.

Игра, названная дуэлью, задается ядром

$$K(x, y) = f(x) - pg(y) \begin{cases} +pf(x)\,g(y), & \text{если } x < y, \\ +0, & \text{если } x = y, \\ -f(x)\,g(y), & \text{если } x > y, \end{cases}$$

где f, g полунепрерывны снизу, $0 \leqslant f, g \leqslant 1$ и $p \geqslant 0$.

Доказывается, что каждая дуэль обладает значением. Дуэль называется симметрической, если $f = g$ и $p = 1$. Устанавливается, что в симметрических дуэлях каждый игрок имеет оптимальную стратегию. У дуэлей с $p \neq 0$ и непрерывной функцией g первый игрок имеет оптимальную стратегию. У обоих типов дуэлей имеется последовательность ε-оптимальных стратегий, которая сходится к оптимальной стратегии.

Подробно изучается структура некоторых типов дуэлей.

О. В. Шалаевский

5027. Дуальные системы однородных линейных соотношений. Таккер (Dual systems of homogeneous linear relations. Tucker A. W.), Ann. Math. Studies, 1956, № 38, 3—18 (англ.)

Излагается ряд результатов (частично известных) об однородных линейных системах и указывается, что эти результаты можно использовать в теории матричных игр и в теории линейного программирования.

Изучаются 4 пары дуальных систем и одна система, дуальная себе:

(1) $A^T U \geqslant 0$ и $AX = 0$, $X \geqslant 0$.

(2) $A^T U \geqslant 0$, $B^T U = 0$ и $AX + BY = 0$, $X \geqslant 0$.

(3) $V \geqslant 0$, $C^T V \geqslant 0$ и $-CX \geqslant 0$, $X \geqslant 0$.

(4) $V \geqslant 0$, $A^T U + C^T V \geqslant 0$, $B^T U + D^T V = 0$
$-AX - BY = 0$, $-CX - DY \geqslant 0$, $X \geqslant 0$.

(5) $KW \geqslant 0$, $W \geqslant 0$ $(K^T = -K)$.

Здесь U, V, W, X, Y — векторы; A, B, C, D, K — матрицы (причем K — обязательно квадратная); A^T — матрица, транспонированная с A.

Термин «дуальные системы» употребляется в том смысле, что (а) существует взаимно однозначное соответствие между свободными переменными в одной системе и уравнениями в другой и между неотрицательными переменными в одной системе и неравенствами в другой (например в (4), $U \leftrightarrow AX + BY = 0$, $V \geqslant 0 \leftrightarrow -CX - DY \geqslant 0$ и т. д.) и (б) матрицы коэффициентов в одной системе соответствуют отрицательные или транспонированные в другой.

Примером доказываемых теорем может служить

Теорема 4. Общие дуальные системы (4) обладают решениями U^*, V^* и X^*, Y^* такими, что

$$V^* - CX^* - DY^* > 0, \quad A^T U^* + C^T V^* + X^* > 0.$$

Примечание референта. В списке изучаемых систем в системе (1) вместо $AX > 0$ должно быть $AX = 0$.

И. А. Ибрагимов

5028. Равновесие сбыта. Дебрё (Market equilibrium. Debreu Gerard), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1956, 42, № 11, 876—878 (англ.)

Пусть полярой Γ конуса C с вершиной 0 в l-мерном пространстве R^l называется множество $\{z \in R^l: pz \leqslant 0, \ p \in C\}$; многозначная функция ψ внешне полунепрерывна, если из $x^q \to x^0$ и $y^q \in \psi(x^q)$ следует $y^0 \in \psi(x^0)$.

Теорема. Пусть C — выпуклый замкнутый конус в R^l с вершиной 0, не являющийся линейным многообразием. Пусть Γ — поляра C. Если многозначная функция ζ из $C \cap S$ (S — сфера единичного радиуса) в R^l внешне полунепрерывна и ограничена и если для каждого p в $C \cap S$ множество $\zeta(p)$ — непусто, выпукло и $p\zeta(p) \leqslant 0$, то существует такое $p \in C \cap S$, что $\Gamma \cap \zeta(p) \neq \Lambda$.

Если p — вектор цен на l товаров, а $\zeta(p)$ — множество возможных превышений предложения над спросом, то в широком классе экономических задач из $\Gamma \cap \zeta(p) \neq \Lambda$ следует $0 \in \zeta(p)$.

В определении внешней полунепрерывности опечатка: вместо x^q напечатано z^q.

И. В. Романовский

5029. Об устойчивости некоторых экономических систем. Бургер (On the stability of certain economic systems. Burger E.), Econometrica, 1956, 24, № 4, 488—493 (англ.)

Дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом

$$\dot{y}(t) = ay(t) + by(t-\theta)$$

играет важную роль во многих динамических моделях экономики. В статье приводится необходимое и достаточное условие устойчивости решений этого уравнения (т. е., отрицательности вещественных частей всех корней уравнения $\lambda = a + be^{-\lambda\theta}$). Приводится пример из области экономики.

Н. Н. Воробьев

5030. Модель экономического роста с возрастающей эффективностью капитала. Йохансен (A model of economic growth with increasing efficiency of capital. Johansen Leif), Ekon. tidskr., 1956, 58, № 4, 237—240 (англ.)

5031. Статистика и исследование операций. Морс (Statistics and operations research. Morse Philip M.), Operat. Res., 1956, 4, № 1, 2—18 (англ.)

Дается описание предмета и методов исследования операций, проиллюстрированное рядом конкретных примеров.

И. Л. Канторович

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫХ И СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

5032. Математические методы теории массового обслуживания. Хинчин А. Я., Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1955, 49, 122 стр.

В монографии систематически излагаются основные идеи и методы приложения теории вероятностей к вопросам массового обслуживания.

В части I изучается поток поступающих вызовов. Автор называет простейшим поток вызовов, обладающий свойствами: 1) стационарности, 2) отсутствия последействия, 3) ординарности (свойство, заключающееся в том, что вероятность наступления за время $\Delta t \to 0$ более одного вызова имеет порядок $o(\Delta t)$). Хорошо известно, что для простейшего потока число вызовов в промежутке времени t распределено по закону Пуассона с параметром λt. Далее изучаются потоки вызовов, получающиеся при отказе от некоторых требований простейшего потока. В частности, в § 8 изучается общая форма стационарного потока без последействия. Такой поток представляет собой суперпозицию счетного числа пуассоновских потоков отдельных вызовов, пар вызовов и т. д. Далее изучаются потоки, характеризующиеся тем, что промежутки между вызовами независимы друг от друга (потоки с ограниченным последействием). Часть I завершается доказательством предельной теоремы, показывающей, что при суперпозиции большого числа независимых стационарных ординарных потоков в пределе получается простейший поток, если на составляющие потоки наложить требование равномерной малости интенсивностей и некоторое ограничение, которое не позволяет вызовам скапливаться на небольших участках времени.

В части II монографии излагается теория телефонных систем с потерями. Дается вывод известных формул Эрланга в случае показательного распределения длительности разговора и простейшего потока вызовов. Разобраны также задачи с бесконечным числом линий и с переменным параметром потока поступающих вызовов. Доказывается теорема Пальма о том, что поток вызовов, потерянный на первых r линиях, есть поток с ограниченным последействием. В конце части II изучаются эти потоки.

В части III изучаются системы с ожиданием. Вычисляются законы распределения времени ожидания для простейшего потока вызовов и показательного и несобственного законов распределения длительности разговоров. В последней главе излагается содержание статьи автора (Матем. сб., 1932, **39**, 73—84), где находится закон распределения времени ожидания в однолинейной системе при простейшем потоке вызовов и при произвольном распределении длительности разговора.

Дано строгое и достаточно простое изложение перечисленных вопросов теории массового обслуживания. Автор дает строгое доказательство ряда фактов, которые до сих пор появлялись в печати без достаточного обоснования. Некоторые результаты (например, предельная теорема для потоков) публикуются впервые. К монографии приложены литературные указания; отмечены параграфы текста, содержащие существенно новый материал.

Б. А. Севастьянов

5033. Некоторые задачи статистического анализа данных об эпидемиях. Бейли (Some problems in the statistical analysis of epidemic data. Bailey Norman T. J.), J. Roy Statist. Soc., 1955, B17, № 1, 35—68 (англ.)

Обзор по стохастической теории эпидемий. Результаты многочисленных исследований в этой области излагаются без доказательств.

Эпидемия моделируется как марковский процесс, состояниями которого являются тройки целых чисел (x, y, z), где $x + y + z = n = \text{const}$. Здесь x — число здоровых субъектов, могущих подвергнуться заражению, y — число инфекцированных субъектов и z — число выбывших субъектов (т. е. выздоровевших, умерших или изолированных в медицинском учреждении). В качестве основной модели рассматривается процесс с непрерывным временем, где за время dt система переходит из состояния (x, y, z) с вероятностью $\alpha xy dt$ в состояние $(x-1, y+1, z)$ и с вероятностью $\beta y dt$ — в состояние $(x, y-1, z+1)$. Для некоторых болезней (корь, ветряная оспа, свинка), отличающихся длительным инкубационным периодом после заражения и коротким периодом острой инфекционности, оказывается удобнее модель дискретной цепи Маркова. Получение явных формул в случае непрерывного времени является трудной задачей. Главное внимание отдано случаю малого n ($n \leqslant s$), что соответствует распространению инфекции внутри

семьи. Проводится сравнение с детерминистическим подходом, основанным на том, что x, y и z считаются неслучайными функциями от t, удовлетворяющими дифференциальным уравнениям

$$\frac{dx}{dt} = -axy, \quad \frac{dy}{dt} = axy - \beta y, \quad \frac{dz}{dt} = \beta y.$$

Много места уделено статистическим задачам оценки параметров процесса эпидемии. Обсуждаются различные обобщения, связанные с учетом случайности длительности инкубационного периода, с тем, что различные субъекты в разной степени подвержены инфекции и т. д. Здесь приходится вводить постулаты, кажущиеся несколько произвольными.

В конце приводятся результаты обсуждения реферируемого доклада, в котором участвовали Бартлетт, Фостер, Кендалл и др. Наряду с математическими аспектами вопроса здесь подробно обсуждаются постулаты теории эпидемий с точки зрения их медицинских предпосылок. Р. Л. Добрушин

5034. **К теории индексов. Сен Ю По** (Some theory of index numbers. Seng You Poh), J. Roy. Statist. Soc., 1956, **A119**, № 3, 312—332 (англ.)

Выясняются условия обеспечения непрерывности временных рядов индексов цен при изменениях базисного года, состава товаров и системы взвешивания. Для этого производятся соответствующие выкладки в формулах индексов аггрегатной, арифметической и средней геометрической, невзвешенных и взвешенных по весам базисного, текущего и произвольно выбранного периодов. Приводятся примерные числовые расчеты. Предполагается продолжить обсуждение данного вопроса в следующей статье. А. А. Конюс

5035. **К теории идеального кодирования бинарной передачи. Сифоров В. И.,** Радиотехн. и электроника, 1956, 1, № 4, 407—417

Рассматривается бинарная передача с независимо действующими помехами, переводящими бинарные символы друг в друга с постоянной вероятностью p.

Кодирование 2^{Cn} высоковероятных цепочек n бинарных символов источника осуществляется 2^{Cn} кодовыми комбинациями n бинарных символов, выбранных случайным образом из совокупности всевозможных 2^n таких комбинаций ($C < C_0 < 1$, где C_0 — пропускная способность канала). Декодирование принятой кодовой комбинации осуществляется выбором из 2^{Cn} возможно переданных кодовых комбинаций той, которая имеет с принятой по сравнению с $2^{Cn} - 1$ остальными минимальное число несовпадающих соответственно символов. При этом вероятность y ошибки декодирования совпадает с вероятностью отличия принятой кодовой комбинации от посланной в большем числе соответствующих символов по сравнению с хотя бы одной из остальных $2^{Cn} - 1$, возможно переданных кодовых комбинаций. Приводится асимптотическая оценка значения y сверху при $n \to \infty$ вида: $Ae^{-(B-C)n}$, где A и B являются функциями p. Подробно исследуется зависимость этой оценки от p, C и n. В. С. Флейшман

5036. **Теория информации и статистическая лингвистика. Белевич** (Théorie de l'information et statistique linguistique. Belevitch V.), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1956, 42, № 4, 419—436 (франц.)

Рассматриваются текстовые (знаки, слова) или фонетические (фонемы) элементы данного языка. Элементы (i) каждой такой совокупности рассматриваются как независимые события с вероятностями появления p_i и некоторыми числовыми весами c_i. Далее рассматривается энтропия совокупности

$$H = -\sum p_i \log_2 p_i$$

и средний вес элемента $C = \sum C_i p_i$.

Распределением, обращающим в максимум «среднюю» энтропию $M = H/C$, оказывается $p_i = 2^{-MC_i}$. Оно в дальнейшем изложении рассматривается для случая слов и фонем и сверяется с экспериментальными данными.

Дополнительно вводится число n знаков алфавита данного языка и число N_i элементов с одними и теми же вероятностями и весами.

Для случая слов, когда i интерпретируется как число знаков, входящих в слово, полагая $N_i = an^i$ и $C_i = i + \alpha$, где a и $\alpha > 0$ — некоторые константы, простыми арифметическими выкладками показывается, что

$$p_i = (AR + B)^{-D},$$

где $A = (n-1)\, n^{\alpha-1}/a$; $B = n^\alpha$; $D = M \log_n 2$ и $R = an\,(n^i - 1)/(n-1)$.

Аналогичные рассмотрения проводятся и для фонем.

В конце работы сверяются теоретические результаты с экспериментальными данными по английским словам и русским фонемам. Приводятся частоты знаков английского, немецкого и французского текстов, а также японского текста на 48-значном алфавите «катакана». Б. С. Флейшман

5037. **Теория информации. Клейн, Вильямс, Морган** (Information theory. Klein Martin L., Williams Frank K., Morgan Harry C.), Instrum. and Automat., 1956, 29, № 8, 1519—1524 (англ.)

Излагаются некоторые принципы применения теории информации к моделирующим и счетнорешающим системам дискретного счета. Подчеркивается важность известной теоремы Котельникова о дискретном представлении непрерывной функции времени с ограниченным спектром. Б. С. Флейшман

5038. **О состоянии теории информации. Фрюауф** (Zum Stand der Informationstheorie. Frühauf Hans), Wiss. Z. Techn. Hochschule Dresden, 1955—1956, 5, № 3, 535—547 (нем.)

Излагаются основы теории информации с приложениями к общей теории связи. Дается известная геометрическая интерпретация «объема информации» сигнала с координатами: амплитудой, временем и полосой частот. Проводится сравнение различных существующих способов модуляции сигнала при наличии «белого» шума с «идеальной» модуляционной системой, обеспечивающей максимальную пропускную способность канала. Б. С. Флейшман

5039. **Последовательный статистический контроль хода производства. Романовский В. И.,** Тр. Ин-та матем. и механ. АН УзССР, 1956, вып. 17, 13—19

Продолжение статьи автора (РЖМат, 1956, 6034).

Пусть X — количественный признак выпускаемой производством продукции. Предполагается, что X — нормальная случайная величина с приближенно известными средней и дисперсией.

Из совокупности X берется выборка объема n и определяются числа n_1 результатов измерений, заключенных в пределах $-\infty$ до x_1 и n_3 результатов измерений в пределах x_2 до $+\infty$, после чего составляются разность $\Delta = |n_1 + n_3|$ и сумма $S = n_1 + n_3$.

Числа x_1 и x_2 определяют нижнюю и верхнюю границы «допустимых значений» X.

Одновременное выполнение неравенств $\Delta \leqslant \Delta^*$ и $S \leqslant S^*$, где Δ^* и S^* — предварительно установленные и зависящие от x_1 и x_2 числа, указывает на отсутствие расстройства в производстве как по средней, так и по дисперсии.

На примерах показано, что имеют место случаи, когда отдельные выборки, взятые в определенные промежутки времени, указывают на отсутствие расстройства производственного процесса. В то же время объединение этих выборок в одну указывает на явное расстройство хода производства как по средней, так и по дисперсии, вследствие изменения средней и дисперсии за время между выборками. Этим обстоятельством диктуется необходимость наряду с текущим контролем хода производства вести и последовательный контроль. А. М. Бендерский

5040. **Простейшая форма контроля продукции. Кордонский Х. Б.,** Стандартизация, 1956, № 5, 8—12

Рассматриваются основы теории так называемого «ступенчатого» выборочного контроля при приемке партий изделий определенного вида; объем выборки (а также, вообще говоря, и браковочные числа) при инспекции данной партии назначаются в зависимости от результатов обследования предшествующих k партий. В простейшем случае, приводящем к простой цепи Маркова с двумя состояниями, назначаются всего два возможных значения для объема выборки n_1 и $n_2 < n_1$, а браковочные числа C_1 и C_2 полагаются равными нулю. Контроль выборками объема n_1 (соответственно n_2) производится в том случае, когда предшествующая партия была забракована (соответственно принята). Указывается верхняя граница для выходного качества в предположении, что доля дефективности не варьирует. Рассмотрен случай картин малых объемов. В заключительном разделе анализируется вопрос об определении средних издержек от текущего (профилактического) контроля и рациональном объеме выборки для такого контроля.
Н. В. Смирнов

5041. **Статистический качественный контроль. Пфанцагль** (Statistische Qualitätskontrolle. Pfanzagl J.), MTW-Mitt., 1956, **3**, № 2, 68—76 (нем.)

Небольшая статья популярного характера с описанием математических основ некоторых известных способов статистического контроля. Р. Х. Дивеев

5042. **Максимизация национального дохода. Холдейн** (The maximisation of national income. Haldane J. B. S.), Sankhyā, 1955, **16**, № 1—2, 1—2 (англ.)

Отыскивается максимум предложенного Махаланобисом (Mahalanobis E. C., Sankhyā, 1953, **12**, 1—6) выражения для национального дохода y_t

$$y_t = y_0 \left\{ 1 + \alpha \left(\frac{\lambda_i \beta_i + \lambda_c \beta_c}{\lambda_i \beta_i} \right) [(1 + \lambda_i \beta_i)^t - 1] \right\}$$

как функции от доли национальных вложений λ_i, идущей в производство средств производства (y_0 — национальный доход в исходном году, α — отношение национальных вложений к национальному доходу, β_c — ежегодный прирост потребления, как доля от вложений в производство предметов потребления, β_i — ежегодный прирост вложений, как доля от вложений в производство средств производства, λ_c — доля вложений, идущая в производство предметов потребления, $\lambda_c + \lambda_i = 1$). Автор определяет число лет t, когда достигается максимум y_t, при заданных значениях β_c, β_i и λ_i. А. А. Конюс

5043. **Вычисление на машинах функции восстановления. Шпринг** (Die maschinelle Berechnung der Erneuerungsfunktion. Spring Osc. W.), Mitt. Ver. schweiz. Versicherungsmathematiker, 1955, **55**, № 3, 417—422 (нем.)

Рассматривается вычисление среднего числа операций восстановления (циклов) за время t

$$m_1(t) = \sum_{r=0}^{\infty} r f(r, t),$$

где $f(r, t)$ — вероятность иметь r операций за время t, причем

$$f(r, t) = \int_0^t f(r-1, t-\tau)\, q(\tau)\, d\tau,$$

$q(\tau)$ — плотность продолжительности жизни объектов. Значения $q(t)$ и $l(t) = f(0, t)$ задаются в виде таблицы по аргументу t. Для практического вычисления $f(r, t)$ представляется в виде

$$f(r, t) = \sum_{t=a}^{b} f(r-1, t-\tau)\, q(\tau).$$

Излагается удобный прием использования перфокарт для проведения вычислений на электронной машине «Гамма 3» (Machines Bull, Париж). Указывается, что процесс расчета представляет собой весьма громоздкую операцию. Приводится таблица результатов расчета $f(r, t)$ для некоторых значений r и t. Н. П. Бусленко

5044. **Взвешенные пробиты, применяемые для ненулевых ответов в контроле. Хилл** (Weighted probits allowing for a non-zero response in the controls. Healy M. J. R.), Biometrika, 1956, **43**, № 1, 207—208 (англ.)

Описываются случаи, в которых применения взвешенных пробитов имеют некоторые преимущества. О пробитном анализе см., например, Black A. N., Biometrika, 1950, **37**, 158—168. Р. Х. Дивеев

5045. **Выборочная процедура путем почтовых анкет. Эль-Бадри** (A sampling procedure for mailed questionnaires. El-Badry M. A.), J. Amer. Statist. Assoc., 1956, **51**, № 274, 209—227 (англ.)

Главным недостатком выборочных обследований путем опросов, рассылаемых по почте, является неполучение ответов. Указывается, что сплошное обследование всех, не давших ответа, не всегда эффективно и должно быть заменено последовательными выборочными; оптимальные доли этих выборок зависят от доли ответивших и относительной дисперсии признака в группах неответивших (первый, второй и т. д. раз).
Н. В. Смирнов

5046. **К теории ошибок. Корнфельд М.,** Докл. АН СССР, 1955, **103**, № 2, 213—214

Постулируется, что «истинное» значение измеряемой величины при отсутствии систематических погрешностей является медианой закона распределения возможных результатов измерений. Для оценки медианы рекомендуется хорошо известный непараметрический метод получения доверительных интервалов с помощью членов вариационного ряда. Н. В. Смирнов

5047. **Вероятность и операционное исследование. Бенсон** (Probability and operational research. Benson F.), Research, 1956, **9**, № 9, 329—334 (англ.)

На нескольких примерах отыскания оптимальных решений задач, возникающих в промышленности, автор стремится показать пути, которыми вероятностные методы могут быть использованы в промышленности.
Б. В. Финкельштейн

5048. **Ошибки в переменных. Дербин** (Errors in variables. Durbin J.), Rev. Inst. Internat.

statist., 1954, 22, № 1—3, 23—32 (англ.; рез. франц.)

Обзорная статья о методах оценки углового коэффициента линейного соотношения в случае, когда в наблюдениях переменных величин допускаются ошибки. Для метода инструментальных переменных предлагаются некоторые удобные переменные. Библ. 23 назв. V. Fabian

5049. Оценка популяции, основанная на изменении состава, вызванного перемещением в результате отбора. Чапман (Population estimation based on change of composition caused by a selective removal. Chapman Douglas G.), Biometrika, 1955, 42, № 3—4, 279—290 (англ.)

5050. К математической теории распределения дохода в зависимости от возраста и времени. Лёйенбергер (Zur mathematischen Theorie Einkommensverteilung in Abhängigkeit von Alter und Zeit. Leuenberger Franz), Mitt. Ver. schweiz. Versicherungsmathematiker, 1955, 55, № 3, 577—615 (нем.)

Рассматривается вопрос о распределении населения по уровню дохода u ($0 < u < \infty$), возрасту x ($x_0 \leqslant x \leqslant x_1$) во время t. Обсуждается ряд гипотез относительно этих распределений, выдвинутых в работах Кайзера (Kaiser E., Mitt. Ver. schweiz. Versicherungsmathematiker, 1950, 50, 2) и автора. Б. В. Финкельштейн

5051. Об ошибках в определении урожая по пробным делянкам, происходящих от скошенности краев делянок. Масуяма (On the error in crop cutting experiment due to the bias on the border of grid (Application of integral geometry to areal sampling problems — Part IV.) Masuyama Motosaburo), Sankhyā, 1954, 14, № 3, 181—186 (англ.)

Рассматриваются различные способы оценки ошибки в определении урожая на малых делянках, связанные с несовпадением намеченной и фактически убранной площади. М. И. Эйдельнант

5052 Д. К применению метода выравнивания по скользящим средним к оценке полевых опытов. Гейдель (Zur Anwendung von Gleitmittelwertverfahren bei der Auswertung von Feldversuchen. (Doktorarbeit). Geidel Hans. Mitt. Math. Semin. Giessen, 1956, Beih. 2, 86 S.) (нем.)

Излагаются методы, позволяющие определить и устранить ошибки, возникающие в полевых агрономических опытах при наличии систематического изменения («тренда») в плодородии опытного участка. В основе предлагаемых способов анализа положены методы наименьших квадратов и выравнивания с помощью скользящих средних. М. И. Эйдельнант

См. также: 4511 К, 4954.

ГЕОМЕТРИЯ

5053. Дифференциальная геометрия за 100 лет. Пинль («100 Jahre Differentialgeometrie». Pinl M.), Math.-phys. Semesterber., 1956, 5, № 1—2, 34—48 (нем.)

Автор дает краткий исторический очерк развития дифференциальной геометрии за столетие. На немногих страницах он не смог дать полного освещения развития дифференциальной геометрии. В частности, недостаточно освещаются работы русских, французских и итальянских геометров. М. П. Черняев

5054. Роль развертки в системе упражнений по стереометрии. Поляков А. Н., Уч. зап. Ростовск. н/Д. гос. пед. ин-та, 1955, вып. 3, 117—127

Выясняется, как может быть использована развертка в стереометрии и какова ее роль в школьном преподавании. Приводятся примеры. О. С. Редозубова

5055. Об использовании внутреннего произведения двух векторов для изучения матрицы, обратной одной квадратной матрице. Вашен (Sur l'utilisation du produit intérieur de deux vecteurs pour l'étude be la matrice inverse d'une matrice carrée. Vachin Ch.), Rev. math. spéc., 1956, 66, № 10, 237—238 (франц.)

Рассматриваются квадратные матрицы A и B порядка m. В терминах векторной алгебры описывается построение обратной (справа и слева) матрицы к A и доказываются известные теоремы алгебры матриц. Н. В. Наумович

5056. Определение главных радиусов кривизны нормальных сечений поверхностей, заданных уравнениями с одним параметром. Сенютович В. А., Сб. тр. общетехн. кафедр. Ленингр. технол. ин-т холодильн. пром-сти, 1956, 12, 39—48

Статья методического характера. Новых геометрических фактов она не содержит. Автор показывает, как следует располагать вычисления при определении главных радиусов кривизны и главных направлений, когда поверхности заданы двумя уравнениями с одним параметром. М. П. Черняев

5057. Некоторые немецкие книги по аналитической геометрии. Эрм (Quelques livres allemands de géométrie analytique. Herme A.), Bull. Assoc. professeurs math. enseign. public, 1956, 36, № 180, 133—138 (франц.)

5058. Графическое решение задачи Хансена. Презенца (Una soluzione grafica del problema di Hansen. Presenza Ivo), Riv. militare, 1956, 12, № 7—8, 1140—1142 (итал.)

Если известно расстояние между двумя данными точками A и B и величины четырех углов $\angle ACB$, $\angle BCD$ $\angle ADC$ и $\angle ABB$, то задача Хансена состоит в определении положения точек C и D. Автор предлагает простое элементарное построение для определения положения искомых точек C и D и дает анализ своего решения. М. П. Черняев

5059. Применение принципов золотого сечения. Цзэн Чжао-ань (黃金分割原理的應用. 曾昭安), 數學通訊, Шусюэ тунсюнь, 1955, № 51, 1—3 (кит.)

В заметке изложены известный принцип золотого сечения и некоторые применения его к рисованию. Чэнь Чин-ин

5060. О некоторых интересных геометрических местах. Поццоло-Феррарис (Sopra alcuni notevoli luoghi geometrici. Pozzolo Ferraris Giulia), Archimede, 1956, 8, № 3, 135—139 (итал.)

Показывается, как некоторые задачи из известного сборника задач по аналитической геометрии Ремона (Rémond A., Exercices élémentaires de géométrie analytique, Paris, 1898) проще решаются средствами элементарной геометрии. И. Я. Депман

5061. Замечание о теореме Птолемея. Бонн (Remarque sur le théorème de Ptolémée. Bonn M.), Bull. Assoc. professeurs math. enseign. public, 1956, 36, № 180, 133 (франц.)

5062. Об обобщении одной теоремы Карно. Гурматай (Sur une généralisation d'un théorème de Carnot. Goormaghtigh R.), Mathesis, 1956, 65, № 4—6, 192—196 (франц.)

Обобщая теорему Карно относительно отрезков, отсеченных прямой на сторонах многоугольника, автор рассматривает пару одноименных многоугольников, расположенных в одной плоскости.

Исследование этой пары позволяет найти свойства касательных к кривым, описанным вершинами многоугольника, деформирующегося в своей плоскости, и свойства точек касания сторон к соответствующим огибающим кривых.

Приводится ряд теорем, из которых отметим следующую. В многоугольнике, вписанном в коническое сечение, произведение отношений синусов углов, образуемых касательными к кривой со смежными сторонами, равно единице (касательные проводятся в последовательных вершинах многоугольника). С. И. Зетель

5063. Равносторонние и другие треугольники, связанные с треугольниками. Саттерли (Equilateral and other triangles associated with triangles. Satterly John), School Sci. and Math., 1956, 56, № 1, 11—20 (англ.)

Приводится доказательство известной теоремы: Если на сторонах произвольного треугольника ABC построить во вне или внутри равносторонние треугольники, то центр этих треугольников — вершины равносторонних треугольников DEF и PQR. Приводятся различные метрические соотношения в полученных равносторонних треугольниках, например, сумма квадратов одной стороны $\triangle DEF$ и одной стороны $\triangle PQR$ равна $(a^2+b^2+c^2)/3$, где a, b, c — стороны $\triangle ABC$, разность площадей $\triangle DEF$ и $\triangle PQR$ равна $\triangle(ABC)$ и т. д. Координатным методом доказывается, что центры тяжестей $\triangle ABC$, $\triangle DEF$ $\triangle PQR$ совпадают.

Задача обобщается на случай построения на сторонах данного треугольника произвольных подобных треугольников. С. И. Зетель

5064. К одной теореме Штейнера—Эйлера—Жергонна. Паше (Zum Fraktionssatz von Steiner bzw. Euler—Gergonne. Paasche I.), Math. und naturwiss. Unterr., 1956, 9, № 5, 212—213 (нем.).

Теорема: Каждая из трех прямых Чевы треугольника делится в их точке пересечения соответственно в отношении $-\lambda$, μ, ν, считая от соответственной стороны, где $\lambda+\mu+\nu=1$ (например, для медиан $\lambda=\mu=\nu=1/3$).

Дано векторное доказательство обобщения теоремы. Из произвольной точки плоскости проведены три луча до пересечения со сторонами треугольника или их продолжениями. Величина этих лучей соответственно u, v, w (они могут быть и отрицательными). Отрезки прямых, выходящих из вершин треугольника параллельно соответственно лучам, до пересечения с противоположными сторонами соответственно равны U, V, W.

Теорема: $\frac{u}{U}+\frac{v}{V}+\frac{w}{W}=1$. Важно отметить, что прямые, выходящие из вершин треугольника, могут не пересекаться в одной точке, тогда как в теореме Штейнера—Эйлера—Жергонна они являются прямыми Чевы. С. И. Зетель

5065. Фокусы и директрисы конических сечений. Февр (Foyers et directrices des coniques. Faivre W.), Bull. Assoc. professeurs math. enseign. public, 1956, 36, № 180, 130—132 (франц.)

5066. Парабола на сфере. Фаччотти (La parabola sulla sfera. Facciotti Guido), Period. mat., 1956, 34, № 1, 38—50 (итал.)

На единичной сфере вводятся криволинейные координаты, в которых окружности больших кругов имеют линейные уравнения и именуются «сферическими прямыми». «Сферическое расстояние» между точками сферы определяется как дуга «сферической прямой», соединяющей эти точки. Аналогично вводится понятие о «расстоянии» точки от прямой. «Параболе на сфере» дается определение, формально совпадающее с обычным метрическим определением параболы. Выводится уравнение «параболы на сфере» и исследуются некоторые геометрические свойства этой кривой.

С. Г. Кислицын

5067. К задаче о двойной локсодроме. Вундерлих (Contributi al problema delle lossodromiche doppie. Wunderlich Walter), Rend. mat. e applic., 1956, 15, № 1—2, 24—35 (итал.)

Двойной локсодромой называется кривая, пересекающая плоскости двух пучков с осями a_1 и a_2 под постоянными углами λ_1 и λ_2. Если ввести декартову систему координат, в которой уравнения осей пучков будут

$$y=\pm mx,\quad z=\pm h,$$

то нахождение двойных локсодром сведется к интегрированию системы уравнений

$$\frac{(z-h)(mdx-dy)-(mx-y)\,dz}{\sqrt{(mx-y)^2+(1+m^2)(z-h)^2}\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}=\sin\lambda_1,$$

$$\frac{-(z+h)(mdx+dy)+(mx+y)\,dz}{\sqrt{(mx+y)^2+(1+m^2)(z+h)^2}\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}=\sin\lambda_2.$$

В статье эта система интегрируется для случаев 1) $h=0$ и 2) $m=i$. Приведен также ряд других результатов, относящихся к задаче о двойной локсодроме. С. Г. Кислицын

5068. Геометрия простых n-мерных тел. Ивата (*n* 次元單體の幾何學. II. 岩田至康), 數學, Сугаку, 1953, 5, № 3, 28—31 (япон.)

5069. Обобщение теоремы Гюльдена—Паппа. Курита (Guldin-Pappus の定理の擴張. 栗田稔), 數學, Сугаку, 1953, 5, № 2, 87—89 (япон.)

5070 К. Равновеликие и равносоставленные фигуры. Болтянский В. Г. М., Гостехиздат, 1956, 64 стр., илл., 1 руб.

5071 К. Индукция в геометрии. Головина Л. И., Яглом И. М. М., Гостехиздат, 1956, 99 стр., илл., 1 р. 60 к.

5072 К. Дополнения к аналитической геометрии. Мартинелли (Complementi di geometria analitica. Raccolti a cura di M. Benedicty. Martinelli Enzo. Roma, Ed. univ., 1956, 36 p.), Bibliogr. ital., 1956, 90, № 660—663, 184 (итал.)

5073 К. Сборник задач по аналитической геометрии. Изд. 4-е, стереотип. Клетеник Д. В. М., Гостехиздат, 1956, 240 стр., илл., 5 р. 45 к.

5074 К. Курс дифференциальной геометрии. (Для гос. ун-тов.) Изд. 4-е. Рашевский П. К. М., Гостехиздат, 1956, 420 стр., илл., 9 р. 25 к.

5075 К. Наглядная геометрия. Гильберт, Кон-Фоссен (Geometria poglądowa. Hilbert D., Cohn-Vossen S. Tłum. z niem. Warszawa, Państw. Wydawn. Nauk., 1956, 319 s., 1 nlb., 24, 50 zł.), Przew. bibliogr., 1956, 12, № 45, 669 (польск.)

5076 К. Тензорное исчисление. Коломб (Rachunek tensorowy. Gołąb Stanisław. Warszawa, Państw. Wydawn. Nauk., 1956, 309, 3 nlb. s., il., 30.70 zł); Przew. bibliogr., 1956, 12, № 34, 509 (польск.)

5077 К. «Начала» Евклида. 6-я книга. (Еуклидови елементи. 6 књига. Прев. с грчк. Српска акад.

наука, 1955, 57 стр.), Bibliogr. jugosl., 1955, 6, № 13, 441 (серб.)

5078 К. **«Начала» Евклида. 7-я книга.** (Еуклидови елементи. 7 књига. Прев. с грчк. Српска акад. наука, 1955, 58 стр.), Bibliogr. jugosl., 1955, 6, № 23, 827 (серб.)

5079 К. **«Начала» Евклида. Кн. 8.** (Еуклидови елементи ΣΤΟΙΧΕΙΑ. Кн. 8. Прев. и комент. Билимовић. Антон. Клас. научни списи. Српска АН. Матем. ин-т, 1955, № 8, 44 стр.) (сербо-хорв.)

5080 К. **«Начала» Евклида. Кн. 9.** (Еуклидови елементи ΣΤΟΙΧΕΙΑ. Кн. 9. Прев. и комент. Билимовић Антон. Клас. научни списи. Српска АН. Матем. ин-т, 1956, № 9, 48 стр.) (сербо-хорв.)

5081 К. **«Начала» Евклида. Кн. 10.** (Еуклидови елементи ΣΤΟΙΧΕΙΑ. Кн. 10. Прев. и комент Билимовић Антон. Клас. научни списи. Српска АН. Матем. ин-т, 1956, № 10, 194 стр.) (сербо-хорв.)

ПРИЛОЖЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ

5082. **Условия интегрируемости сингулярного электромагнитного поля.** Каэн (Conditions d'intégrabilité du champ électromagnétique singulier. Cahen Michel), C. r. Acad. sci., 1956, 243, № 9, 737—740 (франц.)

В римановом дифференцируемом многообразии V_4, снабженном гиперболической метрикой нормального типа, рассматривается сингулярное электромагнитное поле, характеризуемое кососимметрическим тензором $F_{\alpha\beta}$ (Mariot L., C. r. Acad. sci., 1954, 238, № 21, 2055—2056). Если подвижной репер выбрать, так, что

$$ds^2 = (\omega^0)^2 - \sum (\omega^i)^2,$$

то плоскость E_3, касающаяся изотропного конуса, будет задаваться уравнением

$$\omega^0 + \omega^3 = 0,$$

условия интегрируемости которого и уравнения Максвелла показывают, что системы Пфаффа

$$\omega^0 + \omega^3 = 0,\ \omega^1 = 0 \text{ и } \omega^0 + \omega^3 = 0,\ \omega^2 = 0$$

вполне интегрируемы. Следовательно, существуют два семейства поверхностей, касающихся изотропного конуса и электрического поля, с одной стороны, изотропного конуса и магнитного поля, — с другой. Имеется ссылка на работу Лихнеровича (РЖМат, 1954, 4168).

К. М. Белов

5083. **Разложение четырехмерных векторных и тензорных полей и его применение в электродинамике.** Балаж (The resolution of four-dimensional vector fields and tensor fields, and its application to electrodynamics. Balázs N. L.), Canad. J. Phys., 1955, 33, № 5, 235—240 (англ.)

См. РЖФиз, 1956, 18847.

5084. **Ортогональное проектирование на кривые поверхности и его приложения к вопросам геометрии пространственных зубчатых зацеплений.** Поспянский А. Д. В сб. Методы начертательной геометрии и ее приложения, М., Гостехиздат, 1955, 232—252

Рассматривается ортогональное проектирование прямой линии на плоскость и некоторые кривые поверхности лучами линейного комплекса, осью которого служит проектируемая прямая. Отдельно показывается построение проекции прямой на поверхности лучами вырожденного линейного комплекса и лучами общего линейного комплекса. Изложенные методы построения таких обобщенных проекций используются для графического решения некоторых задач геометрии пространственных зубчатых зацеплений. В работе приводятся графические методы определения линий мгновенного контакта поверхности зацепления и поверхности зуба, сопряженного данному зубу. Н. В. Наумович

5085. **Геометрическое построение изотерм Ван-дер-Ваальса.** Чуб А. Т. Изв. Крымск. пед. ин-та, 1955, 21, 211—215

Уравнению изотермы Ван-дер-Ваальса придается вид: $pv^3 - bpv^2 - RTv^2 + av - ab = 0$, где a, b, T — параметры, R — универсальная газовая постоянная, p, v — переменные. Этой кривой 4 порядка ставится в соответствие гипербола $xy - RTy^2 - bx + ay - ab = 0$, одна асимптота которой параллельна оси абсцисс. Соответствие устанавливается следующим образом: $x = pv^2$, $y = v$, т. е. каждая точка гиперболы преобразуется в соответствующую точку изотермы. Дается геометрический способ построения теоретических изотерм Ван-дер-Ваальса при различных температурах с помощью вспомогательной гиперболы. При любой температуре прямая $y = b$ является асимптотой. Дается построение центра такой гиперболы и бесчисленного множества ее точек. Есть возможность строить изотермы, не вычерчивая самой гиперболы.

Наконец, в силу того, что преобразование является однозначным, можно делать обратное построение, что дает возможность по координатам центра гиперболы графически находить параметры a и b, характеризующие исследуемое вещество. О. С. Редозубова

ПРОЕКТИВНАЯ СИНТЕТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

5086. **Об обобщении теоремы Дезарга.** Таллини (Su una estensione del teorema di Desargues. Tallini Giuseppe), Boll. Unione mat. ital., 1956, 11, № 1, 46—48 (итал.)

Опираясь на результаты из книги Сегре (Segre B., Lezioni di geometria moderna, vol. 1, Bologna, 1948), автор дает более простое, по его мнению, доказательство первых двух теорем работы Белла (РЖМат, 1956, 7558). Л. А. Скорняков

5087. **Синтетическое исследование аффинного преобразования.** Некулче (Studiul sintetic al transformării afine. Neculce M.), Studii şi cercetări mat., 1956, 7, № 1—2, 179—196 (рум.; рез. русс., франц.)

Определяется параллельно-аффинное преобразование плоскости и подробно исследуются его основные свойства. Показывается, что общее аффинное преобразование плоскости, а также произведение нескольких таких преобразований может быть сведено к произведению двух параллельно-аффинных преобразований. В. Ф. Рогаченко

5088. **Об основных положениях проективной геометрии.** Массера (Acerca de las nociones fundamentales de la geometría proyectiva. Massera J. L.), Publ. didact. Inst. mat. y estadist. Fac. ingr. y agrimens., 1956, 1, № 1, 3—56 (исп.)

Работа предназначается для студентов, начинающих изучать синтетическую геометрию, и имеет целью правильно, с педагогической точки зрения, ввести основные понятия проективной геометрии.

В гл. I даются ответы на вопросы: что такое геометрия, равенство фигур, геометрическое свойство. Рассматриваются подобное, перспективное и проективное преобразования. Указываются свойства, которыми должна обладать система аксиом. В гл. II вводятся несобственные элементы и рассматриваются аксиомы связи. Гл. III посвящена аксиомам порядка и непрерывности. В гл. IV показано построение проективной

геометрии на базе введенной аксиоматики и дан принцип двойственности. В заключение приводятся некоторые исторические замечания о развитии проективной геометрии. Библ. 13 назв. В. А. Маневич

5089. Теория T-системы. Глаголев А. А., Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, 1956, 39, 71—101

Автор связывает теорию T-системы с теорией кубических инволюций. Каждая инволюция I_3', имеющаяся на кривой 2-го порядка C^2, отображается в некоторую кривую 2-го порядка K^2 (H^2 — кривая 2-го порядка, на которой лежат вершины треугольников, стороны которых касаются C^2 в тройках точек инволюции I_3'), а все ∞^4 инволюции I_3', существующие на C^2, отображаются в ∞^4 кривых 2-го порядка K^2, образующих некоторую систему 4-й ступени кривых 2-го порядка. Эту систему кривых автор называет T-системой. Доказывается ряд теорем о пучках и сетях кривых 2-го порядка, принадлежащих T-системе. Показано, что система T является квадратичной системой кривых 2-го порядка. На основании доказанных теорем рассматриваются некоторые положения о линейных пространствах, лежащих на гиперповерхности V_4^2 пространства S_5. При помощи данного конического сечения M^2 осуществляется преобразование системы T в самое себя. Рассматривается также выродившееся преобразование системы T в самое себя при помощи такой кривой M^2, относительно которой треугольники, вписанные в K^2 и описанные около C^2, будут полярными. Показано, что теоремы, относящиеся к преобразованию системы T в самое себя, аналогичны основным теоремам относительно нуль-системы.

Дается определение особой точки треугольника и рассматривается преобразование системы T в самое себя при помощи этих особых точек. Указано построение, с помощью которого осуществляется взаимно однозначное отображение точек пространства в треугольники, описанные около C^2, прямых пространства в кривые T-системы и т. д.

Доказывается, что сами себе соответствующие кривые 2-го порядка системы T при ее преобразовании в самое себя отображаются в лучи линейного комплекса. Обобщаются некоторые классические теоремы Кремона и К. Сегре. Дается определение пучка комплексов как совокупности комплексов, отображающихся в совокупность кривых 2-го порядка M^2 плоскости P, образующих ряд. Дается определение линейной системы 2-й ступени линейных комплексов и доказывается ряд теорем, относящихся к сети линейных комплексов. В. А. Маневич

5090 К. Введение в проективную геометрию конических сечений. Гавличек (Úvod do projektivní geometrie kuželoseček. Havlíček Karel. Brno, SNTL, 1956, 214, 1 s., 32, 20 Kčs, il.), Bibliogr. katal. ČSR, České knihy, 1956, № 39, 774 (чеш.)

ГЕОМЕТРИЯ ЛОБАЧЕВСКОГО

5091. Некоторые вопросы геометрии треугольника в плоскости Лобачевского. Коба (Деякі питання геометрії трикутника в площині Лобачевського. Коба В. І.), Наук. зап. Київськ. держ. пед. ін-т, 1956, 19, 114—128 (укр.)

В § 1 доказано несколько теорем, относящихся к свойствам перпендикуляров, проведенных к сторонам треугольника. В § 2 доказано свыше двадцати теорем теории трансвенсалей треугольника и некоторых многоугольников и их модификаций в плоскости Лобачевского. В § 3 доказываются некоторые теоремы, относящиеся к равнобедренному треугольнику и к вписанному в окружность треугольнику, одна из сторон которого является диаметром окружности.

При доказательствах используются формулы гиперболической тригонометрии. В. Ф. Рогаченко

5092. О геометрических построениях в плоскости Лобачевского с помощью линейки при условии, что в плоскости построения начерчена конечная дуга некоторой плоской кривой постоянной кривизны. Мозговая Л. И., Изв. Киевск. политехн. ин-та, 1956, 19, 382—388

Предполагая начерченными в плоскости Лобачевского: 1) окружность, ее центр и две параллельные прямые, или 2) эквидистанту, ее базис и две параллельные прямые, не параллельные базису эквидистанты, или 3) предельную линию, ее ось и две параллельные прямые, не являющиеся осями предельной линии, — автор, пользуясь только линейкой, находит точки пересечения каждой из этих линий с произвольно заданной прямой и тем доказывает разрешимость всех конструктивных задач второй степени в плоскости Лобачевского при помощи одной только линейки, если в плоскости построений будет начерчена одна из фигур 1)—3) (Смогоржевский А. С., Геометрические построения в плоскости Лобачевского, М.—Л., ГИТТЛ, 1951, гл. VI). К. К. Мокрищев

5093. О построениях в плоскости Лобачевского, выполняемых с использованием трисектора угла или трисектора отрезка. Мозговая Л. И., Изв. Киевск. политехн. ин-та, 1956, 19, 369—381

Показывается, что с помощью линейки, циркуля и трисектора угла можно решить следующие задачи: 1. Решить любое уравнение третьей степени вида $\operatorname{th}^3 z + 3p \operatorname{th}^2 z + 3q \operatorname{th} z + r = 0$ с положительным дискриминантом, если его коэффициенты могут быть выражены через гиперболические косинусы данных отрезков и число 1 с помощью конечного числа рациональных операций и извлечений квадратного корня. 2. Построить правильный семиугольник. 3. Разбить треугольник на три равновеликих треугольника прямыми, выходящими из его вершины. Трисекция отрезка с помощью указанных инструментов невозможна.

С помощью линейки, циркуля и трисектора отрезка можно решить следующие задачи: 4. Решить любое уравнение третьей степени вида $\operatorname{ch}^3 z + 3p \operatorname{ch}^2 z + 3q \operatorname{ch} z + r = 0$ с отрицательным дискриминантом, если p, q, r удовлетворяют требованиям первой задачи. 5. Построить такой отрезок z, чтобы площадь круга радиуса $8z$ была в k^2 раз больше ($k > 4$), чем площадь круга радиуса $2z$. В. Ф. Рогаченко

5094. О конусах и конических сечениях геометрии Лобачевского—Бойаи. Гергей (Despre conurile și conicele geometriei lui Lobacevschi—Bolyai. Gergely Eugen), Bul. ştiinţ. Acad. R. P. Romîne. Sec. mat. şi fiz., 1955, 7, № 4, 1025—1034 (рум.; рез. русс., франц.)

Доказываются простейшие свойства конических поверхностей вращения в пространстве Лобачевского: равенство всех конических поверхностей с образующими, параллельными оси, и существование одной или двух плоскостей, параллельных всем образующим поверхности. Рассматриваются очевидные обобщения формул объемов некоторых тел, ограниченных конической поверхностью и одной или двумя плоскостями, перпендикулярными к оси. Сохранена ошибка, которую сделал Либман — лишний множитель 2 в выражении объема конуса с параллельными образующими.

Автор предлагает определять конические сечения в плоскости Лобачевского как геометрические места точек пересечения соответствующих лучей двух проективных пучков, отмечая в дальнейшем необходимость

использования идеальных точек. Поэтому его определение фактически совпадает с проективным. Дается классификация конических сечений, основанная на учете числа и характера несобственных точек и на сопоставлении ориентаций пучков, порождающих кривую.

Примечание референта. Эта классификация не имеет геометрического смысла, так как для некоторых кривых, например для выпуклой гиперболы, совпадение или различие ориентаций пучков зависит от выбора их центров. Е. Г. Гонин

5095 К. **Основы неевклидовой геометрии Лобачевского. Павличек** (Základy neeukleidovské geometrie Lobačevského. Pavlíček Jan B. Praha, Přírodoved. vyd., 1953, 223 s., ill., 136 Kčs) (чеш.)

Книга состоит из двух частей: математической и исторической. В первой части имеется обширное введение, где автор знакомит читателей с историей и значением открытия Лобачевского и приводит сведения, необходимые для дальнейшего. Главное внимание уделяется аксиоматике математических дисциплин и, в качестве примера, аксиоматическому введению отношения упорядочения множества.

Первая глава содержит аксиоматическое изложение основ абсолютной геометрии. Автор пользуется в основном гильбертовой системой аксиом. Вторая глава посвящена свойствам непересекающихся «неразнонаправленных» прямых. Внимание автора сосредоточено на теоремах, равносильных пятому постулату. Главным результатом является доказательство возможности существования двух геометрий на общем основании — абсолютной геометрии. Третья глава посвящена теории параллельных «равнонаправленных» прямых и плоскостей в геометрии Лобачевского; изложение закончено рассуждениями о цикле и сфере. Изложение в общем ведется синтетически, понятие абстрактной геометрии иллюстрируется на обычных моделях, главным образом на модели Бельтрами—Клейна.

Вторая — историческая — часть книги содержит две главы: первая посвящена «предистории неевклидовой геометрии», вторая, довольно обширная, — основоположникам гиперболической геометрии: Лобачевскому, Гауссу и Бойаи. Целым рядом цитат он знакомит читателя с работой всех трех математиков по новой геометрии и дает обзор, в какой мере каждый из них разработал новую дисциплину.

В заключение автор выступает в защиту независимости Лобачевского от Гаусса, и указывает на глубину разработки Лобачевским новой теории.

Стиль изложения живой и понятный, но сжатый и строгий. От читателя требуется знакомство с геометрией; книга не рассчитана на выпускников средней школы.

Предисловие к книге написал акад. Э. Чех (Čech), по инициативе которого возникла эта работа. J. Vyšín

5096 К. **Геометрия Лобачевского и элементы оснований геометрии. Пособие для учителей сред. школы. Кутузов Б. В.** Изд. 2-е, испр. и доп. М., Учпедгиз, 1955, 152 стр. с черт. 4 р. 35 к.

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

5097. **Графическое построение винта, взаимного пяти заданным винтам. Шафаревич Р. С.** В Сб.: Методы начертательной геометрии и ее приложения, М., Гостехиздат, 1955, 222—231

На основании использования метода Майора, приводится графическое решение задачи о построении винта, взаимного пяти заданным винтам. Эта задача разбивается на две: 1) построение цилиндроида, взаимного каким-либо четырем из пяти заданных винтов, 2) построение винта, взаимного как этому цилиндроиду, так и оставшемуся, пятому винту. Приведенный способ построения цилиндроида, взаимного заданным четырем винтам, дает также решение задачи о построении прямых, пересекающих заданные четыре прямые. Даются также примеры построений с недоступными элементами. Н. В. Наумович

5098. **О сферическом чертеже и вычислении. Фелстейн** (On spherical drawing and computation. Felstein Milton), Amer. Math. Monthly, 1955, 62, № 9, 631—635 (англ.)

Рассматриваются аксонометрические проекции сферы, пересеченной плоскостями, проходящими через ее центр и две основные задачи, возникающие в связи с построением такой «сферической диаграммы»: 1) вычерчивание эллипса, данного парой диаметров, и 2) откладывание на эллипсе дуги, имеющей данную угловую меру на большом круге, проекцией которого является эллипс. Для решения этих задач используется подкладываемая под кальку чертежа сетка, являющаяся ортографической экваториальной проекцией меридианов и параллелей сферы. Дается применение «сферической диаграммы» для графического решения сферических треугольников. В. Ф. Рогаченко

5099 К. **Начертательная геометрия. Коуновский, Вычихло** (Deskriptivní geometrie pro samouka. Kounovský Josef, Vyčichlo František. Praha, ČSAV, 1953, 547 s., ill., 152 Kčs) (чеш.)

Книга написана профессорами чешского высшего технического учебного заведения. После смерти проф. Коуновского книга была переработана проф. Вычихло и в настоящее время служит для студентов учебником по начертательной геометрии. В первой главе приводятся основные теоремы стереометрии, расширяется евклидово пространство и говорится о принципе двойственности. Начиная со второй главы, авторы приступают к изложению предмета начертательной геометрии.

Вплоть до восьмой главы главной темой является подробное изложение основных задач об инцидентности и метрических задач, которые решаются в проекции на одну плоскость, или в ортогональных проекциях. При решении задач, не связанных с системами координат, показывается способ решения без линии оси x. Первая часть завершается кратким описанием косоугольной проекции. В качестве технических приложений приводится теоретическое решение крыш и водосточных желобов. Весьма подробно разобрано геометрическое освещение, в частности разобраны вопросы плоскостных фигур и многогранных тел при освещении параллельными лучами и при специальном техническом освещении. Конструктивно разобраны простые геометрические связи — аффинные преобразования осевые и центральные (перспектива), коллинеация.

Далее разбираются вопросы изображения шара, цилиндра и конуса, сечение сферической поверхности и т. д. Здесь же рассматриваются фокальные свойства кривых. Из технически важных поверхностей описываются поверхности вращения, прежде всего 2-го порядка. Везде указаны способы построения собственной и отбрасываемой тени при освещении параллельными лучами. Пятнадцатая и шестнадцатая главы содержат основы проективной геометрии кривых 2-го порядка, включая проективные построения, теоремы Паскаля и Брианшона с ссылками на принцип двойственности. Здесь авторы обращают особое внимание на построения в линейной перспективе. Эти две главы особенно важны для студентов технических учебных заведений. В гл. XVII изложены принципы прямоугольной аксонометрии. Последняя глава содержит краткие исторические сведения и обзор чешской литературы по начертательной геометрии. В. Керг

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

5100. Об одной двумерной метрической геометрии. Смогоржевский А. С., Изв. Киевск. политехн. ин-та, 1956, 19, 316—327

Автор рассматривает геометрию с проективной метрикой, зависящей определенным образом от кривой третьего порядка, которая одновременно является и кривой третьего класса; вводимая автором геометрия реализуется на евклидовой плоскости с присоединением к ней несобственной прямой.

В конце статьи автор выясняет, какие проективные преобразования в рассматриваемой геометрии переводят фундаментальную кривую в себя, а также рассматривает некоторые свойства точек и прямых.

М. П. Черняев

5101. О циклических ветвях плоской кривой. Мазотти-Биджоджеро (Sui rami ciclici di curve piane. Masotti Biggiogero Giuseppina), Rend. Ist. lombardo sci. e lettere. Cl. sci. mat. e natur., 1954, 87, № 2, 387—399 (итал.)

Автор, пользуясь определениями и обозначениями, введенными в известной книге Энрикеса и Кизини (Enriques F., Chisini O., Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche, Bologna, 1915), исследует все те пары, характеризующие линейные и сверхлинейные ветви плоской кривой и те их диффференциальные элементы E_k, которые являются циклическими, т. е. которые преобразуются сами в себя некоторым гомографическим преобразованием. Далее рассматриваются те образующие группу Ω гомографические преобразования, которые при введении некоторого дополнительного условия сохраняют замкнутость ветвей.

Исследование заканчивается приложением ранее полученных результатов к алгебраическим кривым. Среди полученных результатов заслуживает внимания следующий: чтобы обыкновенную ветвь порядка r и класса ν аналитически представить в виде

$$y = ax^{(r+\nu/r)} + bx^{(r+\nu+\nu')/r} + cx^{(r+\nu+\nu'+\nu'')/r} + \ldots,$$

где $\nu', \nu'', \ldots, \nu^{(n)}$ суть последовательные классы ветви, т. е. чтобы она преобразовалась сама в себя при помощи гомографического преобразования, заданного уравнениями $x' = \lambda x$ и $y' = \mu x$, необходимо и достаточно, чтобы все ее последовательные классы $\nu', \nu'' \ldots$ имели единственный делитель h, отличный от единицы, и каждый из них был бы взаимно простым с числами ν, r, $r+\nu$. Соответствующая гомография, преобразующая ветвь в себя, всегда будет циклом с периодом h.

М. П. Черняев

5102. Классификация пучков линейных комплексов прямых в S_7. Арнезе (Classificazione dei fasci di complessi lineari di rette in S_7. Arnese Giuseppe), Rend. mat. e applic., 1956, 15, № 1—2, 119—128 (итал.)

Пучок линейных комплексов определяется одним линейным уравнением между плюккеровыми координатами $p^{01}, \ldots, p^{67}$ прямой в семимерном проективном пространстве S_7, где коэффициенты этого уравнения зависят линейно и однородно от двух параметров λ и μ.

Максимальная размерность подпространства, все прямые которого принадлежат каждому комплексу данного пучка, равна 3. Для пучка общего вида в комплексном проективном пространстве S_7 таких непересекающихся трехмерных плоскостей будут две: $S_3^{(1)}$ и $S_3^{(2)}$.

Если $S_3^{(1)}$ и $S_3^{(2)}$ являются координатными плоскостями соответственно $x^4 = x^5 = x^6 = x^7 = 0$ и $x^0 = x^1 = x^2 = x^3 = 0$ относительно системы $\{O_0 O_1 \ldots O_7\}$, то уравнением пучка будет

$$(\lambda a_{\alpha\rho} + \mu b_{\alpha\rho})\, p^{\alpha\rho} = 0 \quad (\alpha = 0, 1, \ldots, 3;\ \rho = 4, \ldots, 7). \qquad (1)$$

Прямые комплекса (1), проходящие через точку $x^\alpha O_\alpha$, лежащую в $S_3^{(1)}$, образуют гиперплоскость, которая пересекается с $S_3^{(2)}$ по двумерной плоскости, определяемой однородными координатами

$$u_\rho = (\lambda a_{\alpha\rho} + \mu b_{\alpha\rho})\, x^\alpha. \qquad (2)$$

Классификация пучков комплексов исходит из того, является ли соответствие (2) для общего комплекса (разумеется, что отношение $\lambda : \mu$ является переменным параметров): A) невырожденным, B) просто вырожденным; C) вдвойне вырожденным; D) втройне вырожденным.

Комплекс пучка называется специальным комплексом первого, второго или третьего рода, в зависимости от того, будет ли соответствие (2) для такого комплекса вырожденно просто, вдвойне или втройне.

Случаи A), B) и C) разбиваются дальше. Разбивка случая A) основывается на кратности корней уравнения четвертой степени $\det |\lambda a_{\alpha\rho} + \mu b_{\alpha\rho}| = 0$. Простым корням этого уравнения соответствуют специальные комплексы первого рода, корням кратности 2 — специальные комплексы рода не выше второго, а корням кратности 3 и 4 — не выше третьего. В случае B) автор получает такие пучки, для которых соответствие (2) будет или просто вырожденно — для каждого комплекса, или вдвойне вырожденно — для одного, двух и трех комплексов, или втройне вырожденно — для одного комплекса. В случае C) получаются пучки, для которых соответствие (2) будет или вдвойне вырожденно — для каждого комплекса, или втройне вырожденно — для одного и двух комплексов.

К. И. Гринцевичюс

5103. О поверхности, наполненной фокусами всех парабол на эллиптической параболоиде. Машек (O ploše naplněné ohnisky parabol na eliptickém paraboloidu. Mašek Vladimír), Mat.-fyz. časop. 1955, 5, № 4, 212—215 (чеш.; рез. русс.)

Статья дополняет две предыдущие работы автора (Rozpravy ČAV, tř. II, 1921, 30, № 33; 1922, 31, № 22).

Для эллиптического параболоида $P^2\left(z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)$ искомое геометрическое место представляет поверхность Штейнера P^4 с уравнением

$$4(b^2x^2 + a^2y^2)^2 - 4a^2b^2(b^2x^2 + a^2y^2)z + a^2b^2(b^4x^2 + a^4y^2) = 0;$$

из трех двойных прямых этой поверхности вещественной является только ось 0_z параболоида.

Поверхность Штейнера образуется, если сдвинуть все параболы, проходящие через вершину параболоида по направлению его оси, так, чтобы фокусы их попали в точку $F(0, 0, (a^2 + b^2)/4)$.

J. Klapka

5104. О структуре трех точек дирамации кратных пространств. Тоне (Sur la structure de trois points de diramation de surfaces multiples. Thonet Raymond), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1956, 42, № 3, 328—355 (франц.)

В терминах и обозначениях Годо (РЖМат, 1953, 1367) изучаются точки дирамации A' кратной поверхности Ф, в которых касательный конус к поверхности разбивается на 4 рациональных конуса, и выполнено одно из следующих условий относительно точек пересечения кривых σ_1, τ_1, τ_2, σ_2: 1) эти три точки явля-

ются двойными коническими (порядок инволюции $p=239$ или 839); 2) двойными бипланарными ($p=1021$).

В каждом из получающихся трех случаев определяется общее количество рациональных кривых, которым эквивалентна точка A' (7 в первом и втором случаях и 10 в третьем) и их виртуальные степени, порядки вышеупомянутых конусов, а также некоторые функциональные соотношения между кривыми на последовательных проекциях поверхности Ф. Описывается поведение кривых $C_0^{(k)}$ (РЖМат, 1955, 3924, 4645, 5257) на этих проекциях. И. З. Розенкноп

5105. О люротовых многообразиях в линейном n-пространстве. Б и л о (On the Lüroth varieties of a linear n-space. B i l o J.), Simon Stevin, 1956, 31, № 1, 31—36 (англ.)

Автор показывает, что полученные Родеха (Rodéja E. G., Rev. mat. hisp.-amer., 1948, 28—48) условия, чтобы заданные $2(n+1)$ точек, лежали на нормальной рациональной кривой порядка n линейного n-пространства, необходимы, но не достаточны. В статье исследуется класс так называемых люротовых многообразий линейного n-пространства S_n, т. е. образов L_k линейных k-пространств, полученных специальным преобразованием Кремоны (инверсией).

Как частный случай получается необходимое и достаточное условие, чтобы нормальная рациональная кривая L_1^n порядка n была описана около двух заданных симплексов, что приводит к обобщению теоремы Паскаля о конусах. К. М. Белов

5106. Об алгебраических группах преобразований. В е й л ь (On algebraic groups of transformations. W e i l A n d r é), Amer. J. Math., 1955, 77, № 2, 355—391 (англ.)

Нормальным законом композиции, заданным на нормальном (например, без особых точек) алгебраическом многообразии V над полем k, расположенном в m-мерном аффинном пространстве S_m, называется отображение $f: V\times V\to V$, удовлетворяющее условиям:

1) если x, y — независимые общие точки на V над k, то

$$k(x, y)=k(x, f(x, y))=k(y, f(x, y));$$

2) если x, y, t — независимые общие точки на V над k, то

$$f(f(x, y), t)=f(x, f(y, t)).$$

Условия 1), 2) определяют таким образом групповой закон на многообразии V, однако лишь для (независимых) общих точек.

В работе доказывается, что если на алгебраическом многообразии V задан нормальный закон композиции (такое многообразие называется «предгрупповым»), то V бирационально эквивалентно над исходным полем k алгебраическому групповому многообразию, однозначно определенному с точностью до изоморфизма (определение алгебраического группового многообразия дано в работе автора «Variétés abéliennes et courbes algébriques», Paris, 1948).

Метод доказательства состоит в следующем. Из условий 1), 2) вытекает, что существуют алгебраические подмногообразия $F_1, \ldots, F_k$ многообразия V такие, что на $V-\sum_{i=1}^{k} F_i$ всюду определен групповой закон. Известно, кроме того (см. упомянутую работу автора), что если на V задан нормальный закон композиции, то существует абстрактное групповое алгебраическое многообразие G', бирационально эквивалентное V над полем $k(t_1, \ldots, t_N)$, где $t_1, \ldots, t_N$ — независимые общие точки на V над полем k.

Теперь оказывается возможным построить многообразие G над полем k, бирационально эквивалентное V над k и находящееся в бирегулярном соответствии с G'. Вследствие этого G оказывается групповым многообразием, определенным над полем k и находящемся в бирациональном соответствии с многообразием V над полем k.

Многообразие G строится следующим образом. Рассмотрим рациональный над k цикл $S=\sum_{i=1}^{r} s_i$ размерности 0 на V, с $s_i\neq s_j$, $i\neq j$, и удовлетворяющий условию: не существует общей точки v на V такой, что $Sv=S$. Затем берется цикл $\sum_{i=1}^{r} w_i$, где $w_i=s_iu$, u — общая точка V над $k(s_i, \ldots, s_r)$. Если $y(T, U)=\prod_{i=1}^{r}\left(T-\sum_{\mu=1}^{m} w_{i\mu}U_\mu\right)$, то коэффициенты при переменных T, U в этом многочлене будут, как обычно, являться координатами точки Чжоу (y) цикла $\sum_{i=1}^{r} w_i$. Доказывается, что $k(y)=k(u)$, т. е. многообразие Y_S с общей точкой (y) бирационально эквивалентно V над полем k. Для различных циклов S_1, S_2, Y_{S_1} будет, очевидно, бирационально эквивалентно Y_{S_2} над k. Доказывается далее, что Y_S бирегулярно эквивалентно некоторому «открытому множеству» на многообразии G', т. е. множеству $G'-F$, где F — сумма конечного числа подмногообразий G' (не обязательно одной размерности). Теперь можно показать, что если выбрать надлежащим образом конечное множество циклов $S_1, \ldots, S_t$, то совокупность алгебраических многообразий $Y_{S_1}, \ldots, Y_{S_t}$ расположенных в аффинном пространстве, определит «абстрактное алгебраическое многообразие» G над полем k (в смысле работы автора «Foundations of algebraic geometry», New York, 1946), находящееся в бирегулярном соответствии с многообразием G' и бирационально эквивалентное V над полем k (так называемый процесс склеивания по Вейлю).

Совершенно аналогично определяются «предоднородное пространство» и «пространство предпреобразований» по отношению к «предгруппе» V. А именно: если мы имеем алгебраические многообразия V и W, определенные над полем k, и f — отображение $V\times V\to V$ над k, удовлетворяющее условиям 1), 2), и g — отображение $V\times W\to W$ над k, причем отображения f, g удовлетворяют условиям:

1. Если x и u — независимые над k общие точки V и W соответственно, то $k(x, g(x, u))=k(x, u)$.

2. Если x, y, u — независимые над k общие точки V, V и W соответственно, то $g(f(x, y), u)=g(x, g(y, u))$, и мы назовем W «пространством предпреобразований» относительно «предгруппы» V.

В случае, когда отображение g удовлетворяет еще условию.

3. Если x, u — не зависимые над k точки V и W соответственно, то $g(x, u)$ — общая точка на W над $k(u)$,

— то W называется «предоднородным пространством» относительно «предгруппы» V.

Для этих многообразий утверждаются аналогичные теоремы. А именно:

Т е о р е м а 1. Для каждого «предоднородного пространства» W относительно «предгруппы» V, определенного над полем k, существует бирационально эквивалентное ему однородное пространство относительно группы G, также определенное над k и единственное с точностью до изоморфизма.

Теорема 2. Пусть W — «пространство предпреобразований» относительно V, пусть a — точка, в которой W нормально, и пусть, если x — общая точка V над $k(a)$, xa и $x^{-1}(xa)$ определены. Тогда существует пространство преобразований S относительно G, бирационально эквивалентное W над k, причем это бирациональное соответствие бирегулярно в точке a. S нормально и даже неособо, если a — простая точка на W. Кроме того, S однозначно определено с точностью до бирационального преобразования, бирегулярного в точках вида $\bar{s}\bar{a}$, где $\bar{a}$ — точка, соответствующая a на S, и $\bar{s}$ — любая точка G.

И. Р. Шафаревич

5107. Об алгебраических группах и однородных пространствах. Вейль (On algebraic groups and homogeneous spaces. Weil André), Amer. J. Math., 1955, 77, № 3, 493—512 (англ.)

Продолжение ранее начатого исследования алгебраических групп (реф. 5106). Указывается общий прием построения из заданных над полем k группы G, ее пространства действия (transformations-space) S и цикла (или дивизора) Z на S, коэффициенты компонент которого взаимно просты с характеристикой поля, нового пространства действия, определенного над тем же полем. Эта конструкция включает построение однородных пространств в случае, если Z — рациональный цикл, коэффициенты которого — единицы, а основание — подгруппа группы G; определенное при этом однородное пространство содержит рациональную над k точку, что позволяет избежать расширения основного поля, которое требовалось в работе Накано по тому же вопросу (Nakano S., Mem. Coll. sci., Univ. Kyoto, 1952, A27, 55—66).

Однородные пространства, на которых группа действует просто транзитивно, автор называет главными; они подвергаются детальному изучению с обращением особого внимания на основное поле, так как может случиться, что такое пространство не содержит рациональной точки. Доказывается следующая теорема, обобщающая результат Чжоу (РЖМат, 1955, 3373) о возможности отображения кривой в главное однородное пространство относительно ее якобиева многообразия: пусть над полем k даны группа G и два многообразия, V и W, производящие точки которых над некоторым надполем K поля k будут M и N; пусть, кроме того, даны три отображения F_1, F_2. F многообразия V, W и $V \times W$ в G, из которых первые два определены над K и которые удовлетворяют соотношению $F(M, N) = F_1(M) F_2(N)$. Тогда существует главное однородное пространство U относительно группы G и два отображения f, g многообразия V и W в U которые все определены над k и таковы, что $f(M) = F(M, N) g(N)$; при этом U, f, g заданием G, V, W, F определяются с точностью до изоморфизма.

Для случая абелевой группы показывается, что на множестве классов (относительно бирациональной эквивалентности над k) ее главных однородных пространств возможно определить композицию; совокупность классов образует, таким образом, группу, группа эта абелева и все ее элементы — конечного порядка; если основное поле — конечно порожденное над простым полем, то она счетная.

В заключение даются приложения к теории якобиевых многообразий.

В. В. Морозов

5108. Поле определения многообразия. Вейль (The field of definition of a variety. Weil André), Amer. J. Math., 1956, 78, № 3, 509—524 (англ.)

В некоторых вопросах алгебраической геометрии возникает такая задача: над надполем K поля k определено многообразие (м.) V; среди всех м., бирационально эквивалентных V над K требуется найти м., определенное над k. Решению этой задачи и ее видоизменения, получаемого, если условие бирациональной эквивалентности заменить условием бирациональной и бирегулярной эквивалентности, и посвящена работа. В предположении, что K сепарабельно порождено над k, задача разбивается на две части — случай, когда K — алгебраическое сепарабельное над k, и случай, когда оно регулярно над k.

В первом случае, если k — сепарабельное алгебраическое расширение поля k_0, s, t, r, ... — совокупность всех различных изоморфизмов k в алгебраическое замыкание $\bar{k}_0$ поля k_0 и $f_{t,s}$ — бирациональное соответствие между V^s и V^t, то задача сводится к следующей: найти м. V_0, определенное над k_0 и бирациональное соответствие f между V_0 и V над k, такие, что для всех s, t имеет место $f_{t,s} = f^t \circ (f^s)^{-1}$. Эта задача оказывается имеющей решение в том и только в том случае, если $f_{s,t}$ определены над сепарабельным алгебраическим расширением поля k_0 и удовлетворяют условиям: $f_{t,r} = f_{t,s} \circ f_{s,r}$ для всех t, s, r и $f_{t^a, sa} = (f_{t,s})^a$ для любого автоморфизма a поля $\bar{k}_0$ над k. Решение это — единственно с точностью до бирационального преобразования V_0 над k_0. Если, кроме того, $f_{t,s}$ всюду бирегулярны и V проективно вложено над k (т. е. k-изоморфно k-открытому подмножеству проективного м., определенного над k), то в решении этом f всюду бирегулярна и решение единственно с точностью до k-изоморфизма. При этом V_0 проективно вложимо над k_0.

Во втором случае задача сводится к следующей: пусть T — м., определенное над k; t, t' — независимые производящие точки T над k, V_t — м., определенное над $k(t)$ и $f_{t',t}$ — бирациональное соответствие между V_t и $V_{t'}$ над $k(t, t')$. Требуется найти м. V, определенное над k и бирациональное соответствие f_t между V и V_t над $k(t)$ такие, что $f_{t',t} = f_{t'} \circ f_t^{-1}$. Задача эта имеет решение тогда и только тогда, когда для производящей точки t'' м. T над $k(t, t')$ выполняется условие $f_{t'',t} = f_{t'',t'} \circ f_{t',t}$; при выполнении его решение единственно с точностью до бирационального преобразования V над k. В нем f будет всюду бирегулярной тогда и только тогда, когда $f_{t',t}$ всюду бирегулярна.

В заключение дается приложение этих результатов к предыдущей работе автора (реф. 5107).

В. В. Морозов

5109. Об арифметической нормальности гиперплоскостных сечений алгебраических многообразий. Накаи (On the arithmetic normality of hyperplane sections of algebraic varieties. Nakai Yoshikazu), Mem. Coll. Sci., Univ. Kyoto, 1955, A29, № 2, 159—163 (англ.)

Устанавливается необходимое и достаточное условие арифметической нормальности производящего гиперплоскостного сечения r-мерного алгебраического многообразия, заданного в проективном пространстве над алгебраически замкнутым полем и не имеющего особых подмногообразий размерности r—1. Работа опирается на теорию пучков алгебраических многообразий Серра (реф. 5147).

В. В. Морозов

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ТРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

5110. Об одной плоской кривой. Рам (Sur une courbe plane. Rham Georges de), J. math. pures et appl., 1956, 35, № 1, 25—42 (франц.)

Автор рассматривает кривую, которая является пределом последовательности многоугольников, определенным образом образованных. Кривые де Рама удовлетворяют соотношению, построенному при помощи функции Минковского (Minkowski H., Zur Geometrie der Zahlen., Gesammelte Abhandlungen, 2, 50—51); замечательные свойства этой функции были установлены Данжуа (Denjoy A., J. Math. pures et appl., 1938, 105—151). Кривая де Рама имеет во всех своих точках касательную, ее кривизна почти повсюду равна нулю. Далее изучается более общая кривая, получаемая после небольшого изменения закона образования последовательности многоугольников: если каждую сторону многоугольника разделить на три части, причем отношение средней части к каждой из двух равных других частей обозначить через γ, то при $\gamma < 1$ предельная для данной последовательности многоугольников кривая C_γ, проходящая через точки деления, обладает плотным множеством угловых точек; при $\gamma = 2$ кривая C_γ во всех своих точках имеет касательные и сводится к дуге параболы.

Более детально автор изучает кривые C_1, которые являются выпуклыми и, следовательно, имеют касательные во всех своих точках, кроме, быть может, множества угловых точек; функция $m(t) = dy/dx$, определяющая наклон касательной в точке $M(t)$, будет возрастающей. Автор обнаруживает ряд арифметических свойств этих кривых. Используя разложение функции $m(t)$ в непрерывную дробь и основываясь на теореме Лагранжа о непрерывных дробях, он получает: в каждой точке кривой C_1, координаты которой x и y являются троичными дробями с общим знаменателем 3^k, наклон касательной $m = dy/dx$ есть рациональное число, сумма неполных частных которого при разложении в непрерывную дробь равна k и наоборот. В точке кривой C_1, координаты которой суть рациональные числа, общий знаменатель которых не является степенью числа 3, наклон касательной m будет квадратной иррациональностью.

В конце статьи рассматривается более общая кривая C_γ. Если $\gamma \geqslant 1$, то кривая C_γ имеет в каждой точке касательную, угловой коэффициент которой — непрерывная функция параметра t; если $\gamma < 1$, то точки $M(t)$, для которых параметр t есть двоичная дробь, будут угловыми точками кривой C_γ, а функция $m(t)$ для этих значений t будет разрывна.

М. П. Черняев

5111. **Эволюты и эволютоиды второго порядка.** Миллер (Evolute şi evolutoide secundare. Miller A.), Gaz. mat. şi fiz., 1954, **A6**, № 12, 537—542 (рум.)

Нормалью второго порядка названа прямая, соединяющая текущую точку P рассматриваемой кривой C с центром кривизны P_2 эволюты C_1 кривой C в соответствующей точке P_1.

Точка касания Q_2 прямой PP_2 с огибающей E семейства нормалей второго порядка кривой C (эволютой второго порядка) 1) находится на пересечении нормали второго порядка кривой C в точке P с нормалью второго порядка эволюты C_1 в соответствующей точке P_1, 2) делит отрезок PP_2 в отношении $R : R_2$, где R — радиус кривизны кривой C, а R_2 — радиус кривизны кривой C_2 (эволюты кривой C_1).

Нормалоидами второго порядка называются прямые, образующие постоянные углы с нормалями второго порядка к кривой в каждой точке последней.

Геометрическое место точек касания нормалоид, проходящих через точку P, со своими огибающими — эволютоидами второго порядка — есть окружность, касающая кривую в точке P. Вторая точка пересечения нормали кривой C с этой окружностью названа центром кривизны второго порядка. Н. М. Остиану

5112. **Конструктивное выполнение отображения пространства на плоскость, при помощи хорд пространственной кривой третьего порядка.** Браунер (Konstruktive Durchführung der durch die Sehnen einer Raumkurve 3. Ordnung vermittelten Abbildung des Raumes auf eine Ebene. Brauner H.), Monatsh. Math., 1956, **60**, № 3, 231—248 (нем.)

Рассматривается отображение трехмерного пространства на плоскость π при помощи хорд пространственной кривой третьего порядка для случая, когда эта кривая задается уравнениями $x = \sin\varphi \cdot \cos\varphi$, $y = \sin^2\varphi$, $z = \operatorname{tg}\varphi$ (общий случай рассмотрен ранее; РЖМат, 1956, 9029). Для этого случая указаны простые геометрические построения (сводящиеся к ортогональному проектированию точек пространства и построениям в плоскости π) образов точек, прямых и плоскостей пространства. Эти построения позволяют решить и обратную задачу нахождения элементов пространства по их образам на плоскости π. В качестве применения этих построений рассмотрено отображение линейного комплекса, которому принадлежит вышеупомянутая кривая. Р. Н. Щербаков

5113. **Обобщение формул Френе и изоморфизм некоторых частей дифференциальной геометрии пространственных кривых.** Билинский (Eine Verallgemeinerung der Formeln von Frenet und eine Isomorphie gewisser Teile der Differentialgeometrie der Raumkurven. Bilinski S.), Bull. scient. Conseil acad. RPFY, 1955, 2, № 3, 81 (нем.)

Для кривой трехмерного пространства вводится понятие i-й кривизны и i-го кручения ($i = 1, 2, 3, \ldots$), которые определенным образом выражаются через кривизну и кручение кривой и их производные в той же точке. Аналогично вводится i-й сопровождающий трехгранник кривой D_i. Для единичных векторов трехгранника D_i верны равенства, которые для $i = 1$ идентичны с формулами Френе.

Из известных предложений дифференциальной геометрии кривых получаются, таким образом, новые предложения или обобщения известных.

О. С. Редозубова

5114. **Линейная конгруэнция кривых второго порядка.** Годо (Une congruence linéaire de coniques. Godeaux Lucien), Mathesis, 1955, 64, № 9—10, 337—340 (франц.)

Монтезано показал (Montesano, Rend. Accad. Napoli, 1895, nota 2, 15—18), что кривые второго порядка, имеющие шесть общих точек с пространственной кривой восьмого порядка и третьего рода с двумя тройными точками, образуют линейную конгруэнцию. Он рассматривает пучок поверхностей третьего порядка с двумя двойными точками O_3 и O_4. Базисом его является прямая O_3O_4 и кривая восьмого порядка C_8 с тройными точками в O_3 и O_4. Касательная плоскость к поверхности F пучка вдоль прямой O_3O_4 одна и та же, она пересекает эту поверхность по прямой r. Пучок плоскостей с осью r высекает на поверхности F ∞^1 кривых второго порядка, пересекающихся в шести точках с C_8. Взяв все поверхности пучка, получают линейную конгруэнцию кривых второго порядка.

Существенным в построении Монтезано является то, что поверхность третьего порядка с двумя двойными точками имеет одну и ту же касательную плоскость вдоль прямой, определяемой этими точками. Но это свойство принадлежит также поверхности третьего порядка, имеющей двойную точку в O_4 с парой касательных плоскостей в ней и содержащей прямую пересечения этих плоскостей O_4O_3. Рассматривая пучок таких поверхностей, автор строит линей-

ную конгруэнцию кривых второго порядка, аналогичную построенной Монтезано. Базисом пучка поверхностей является прямая O_4O_3 и кривая восьмого порядка C_8 с тройной точкой в O_4 и в точке, бесконечно близкой к ней. Н. Н. Глаголева

5115. О геометрическом истолковании одного полного дифференциала теории минимальных поверхностей. Винченсини (Sur une interprétation géométrique d'une différentielle totale de la théorie des surfaces minima. Vincensini Paul), Bull. sci. math., 1955, 79, nov.-déc., 173—180 (франц.)

Пусть $z = f(x, y)$ — уравнение поверхности в прямоугольной системе координат. Хорошо известно, что для того чтобы эта поверхность была минимальной, необходимо и достаточно, чтобы выражение

$$(pdy - qdx)/\sqrt{1 + p^2 + q^2}$$

было полным дифференциалом.

Автор ставит задачу дать геометрическое истолкование этой дифференциальной форме, присоединенной к минимальной поверхности. Он рассматривает сначала две нормальные конгруэнции (C) и (C') с общей плоской средней поверхностью (место центров лучей), принимаемой за плоскость xOy, и ставит в соответствие лучу конгруэнции (C) с направляющим вектором $(p, q, -1)$ луч конгруэнции (C'), пересекающий среднюю плоскость в той же точке с направляющим вектором $(p^1, q^1, -1)$, где $p^1 = -iq/\sqrt{1 + p^2 + q^2}$, $q^1 = ip/\sqrt{1 + p^2 + q^2}$, $i^2 = -1$. Пользуясь известным соотношением между нормальной конгруэнцией с плоской средней поверхностью и присоединенной образующей поверхностью, которая в данном случае является минимальной, автор определяет таким образом метод преобразования минимальной поверхности в новые минимальные поверхности, что и дает геометрическое истолкование вышеупомянутого полного дифференциала. Yen Chih Ta

5116. Об одном преобразовании минимальных поверхностей. Винченсини (Sur une transformation des surfaces minima. Vincensini Paul), C. r. Acad. sci., 1955, 241, № 2, 153—154 (франц.)

Если $\overline{M}$ есть радиус-вектор переменной точки минимальной поверхности, $\overline{N}$ — единичный вектор нормали в этой точке, а $\overline{V}$ — произвольный постоянный единичный вектор, то формула

$$\overline{P} = \overline{M} + (i \int [\overline{N}, d\overline{M},] - \overline{M}, \overline{V})\overline{V} \quad (i^2 = -1)$$

определяет радиус-вектор точки новой минимальной поверхности. Геометрически точка новой поверхности получается ортогональным проектированием на прямую, проходящую через точку M параллельно вектору $\overline{V}$, точки с радиус-вектором $i\overline{A}$, где A — точка, соответствующая точке M на присоединенной минимальной поверхности. Исходная минимальная поверхность получается из новой тем же построением. Асимптотические линии одной поверхности соответствуют линиям кривизны другой и наоборот. При повторном применении рассматриваемого преобразования получается последовательность минимальных поверхностей. В этой последовательности две смежные поверхности находятся в цилиндрическом точечном соответствии, а поверхности, взятые через одну, — в конформном соответствии. Р. Н. Щербаков

5117. Шестипараметрические системы пространственных кривых, обладающих конформным свойством в первом приближении. Демария (I sistemi ∞^6 di curve spaziali godenti della proprietà conforme in prima approssimazione. Demaria Davide Carlo), Rend. Seminar. mat. Univ. e Politecn. Torino, 1953—1954, 13, 251—262 (итал.)

Рассматривается каноническая система двух обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка

$$y''' = \varphi(x, y, z; y', z'; y'', z''),$$
$$z''' = \psi(x, y, z; y', z'; y'', z''),$$

где φ и ψ являются функциями, аналитическими по всем своим аргументам $x, y, z, y', z', y'', z''$. Вообще говоря, через заданную точку пространства в заданном направлении будет проходить двухпараметрическое семейство ∞^2 кривых из шестипараметрической системы интегральных линий последних уравнений. Берутся две соседние бесконечно близкие точки $A(x_0, y_0, z_0)$ и $B(x, y, z)$, направления в которых устанавливаются так: $s = y'_0$, $t = z'_0$, $\sigma = y'$, $\tau = z'$. Требуя, чтобы выполнялись соотношения

$$\sigma = \frac{a_{11}s + a_{12}t + a_{13}}{a_{31}s + a_{32}t + a_{33}}, \qquad \tau = \frac{a_{21}s + a_{22}t + a_{23}}{a_{31}s + a_{32}t + a_{33}},$$

где матрица $\|a_{ij}\|$, $i, j = 1, 2, 3$, должна быть ортогональной, отыскиваются соответствующие функции φ и ψ исходной системы дифференциальных уравнений. Тогда говорят, что семейство ∞^6 интегральных линий обладает конформным свойством и именуют ее системой типа (C). Эта задача ставится и решается автором настоящей статьи в пунктах 1—3 данной работы. Здесь доказано, что необходимым и достаточным условием для того, чтобы система ∞^6 интегральных линий имела тип (C), является то, что функции φ и ψ должны иметь вид

$$\varphi = \frac{3y'y''^2 + 3z'y''z''}{1 + y'^2 + z'^2} + [(1 + y'^2)z'' - y'z'y'']M + E,$$

$$\psi = \frac{3z'z''^2 + 3y'y''z''}{1 + y'^2 + z'^2} + [y'z'z'' - (1 + z'^2)y'']M + F,$$

где M, E, F являются произвольными функциями x, y, z, y', z'. В частном случае при $E \equiv F \equiv 0$ система (C) именуется системой типа (C'); такая система (C') характеризуется постоянством первой кривизны своих линий. Г. И. Жотиков

5118. Заметки о дифференциальной проективной геометрии поверхностей. Рамуш-и-Кошта (Nota sobre a geometria projectiva diferencial das superfícies. Ramos e Costa), Rev. Fac. ciênc. Univ. Lisboa, 1954—1955, A4, № 1—2, 191—194 (порт.)

Кратко характеризуются два употребительных метода изучения поверхностей: Вильчинского при помощи дифференциальных уравнений и Фубини при помощи дифференциальных форм. С некоторыми подробностями показывается применение второго метода. И. Я. Депман

5119. О конгруэнциях W. Бланк Я. П., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1, М., АН СССР, 1956, 141

Автор доказывает существование ∞^1 поверхностей, обладающих сетями линий, соприкасающиеся плоскости которых пересекаются по лучам конгруэнции W общего вида; эти линии соответствуют асимптотическим линиям фокальных поверхностей. К. Н. Тихоцкий

5120. Трижды сопряженные системы поверхностей. Коровин В. И., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1, М., АН СССР, 1956, 155

Автором построены точечные и тангенциальные инварианты трижды сопряженной системы поверхностей и выделены различные случаи таких систем. Рассмотрена пара трижды сопряженных систем, у которых все последовательности Лапласа образуют последовательности с расслояемыми парами соответствующих конгруэнций. К. И. Дуничев

5121. **Преобразование расслояемых пар конгруэнций преобразованием Лапласа в P_5. Березман А. М.**, Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1, АН СССР, 1956, 140—141

В работе используется отображение пары T конгруэнций пространства P_3 в пространство P_5 в виде двупараметрического многообразия L_2, которое можно двумя способами разложить на фокальные подсемейства. При этом отображении преобразованию Лапласа многообразия L_2 в P_5 соответствует преобразование Калапсо в P_3. Исследуется преобразование Калапсо расслояемых и сопряженных пар конгруэнций в P_3. Кроме того, доказано, что сопряженная пара конгруэнций, которую оба преобразования Калапсо переводят в сопряженные пары, входят в состав сопряженной четверки. Исследование системы Пфаффа, определяющей эту сопряженную четверку, доведено до интегралов. К. И. Дуничев

5122. **Канонический тетраэдр комплекса прямых в проективном пространстве. Кованцов Н. И.**, Укр. матем. ж., 1956, 8, № 2, 140—158

Методом внешних форм Картана строится канонический тетраэдр луча комплекса в P_3. Из рассмотрения исключаются комплекс касательных к поверхности и комплекс проективного вращения. Для этой цели автор успешно опирается на три главные линейчатые поверхности комплекса (РЖМат, 1955, 2846).

Ребро A_1A_2 подвижного тетраэдра $\{A_i\}$ $(i, k=1, 2, 3, 4)$ описывает заданный комплекс. Если точка A_3 (соответственно A_4) лежит в касательной плоскости конуса комплекса с вершиной в A_1 (соответственно A_2) вдоль луча A_1A_2, то дифференциальная окрестность первого порядка луча комплекса (при соответствующей нормировке) будет определена одним линейным дифференциальным уравнением $\omega_{13}+\omega_{24}=0$, где $dA_i=\omega_{ik}A_k$ и соответствующим квадратным уравнением.

Фиксацией трех из пяти вторичных параметров окрестности второго порядка помещаем вершины A_1 и A_2 в точки прикосновения одной из главных поверхностей, называемой «координатной», а ребра A_1A_4 и A_2A_3 делаем полярно сопряженными относительно квадрики, соприкасающейся с «координатной» поверхностью. Интересно отметить, что эта квадрика зависит не от трех коэффициентов дифференциальной окрестности третьего порядка луча комплекса, а только от двух. Только это обстоятельство и позволяет пользоваться соприкасающейся поверхностью для выбора группы тетраэдров второго порядка. Фиксацией двух остальных вторичных параметров окрестности второго порядка нормируются координаты вершин тетраэдра, и комплекс будет определяться линейными уравнениями

$$\omega_{13}+\omega_{24}=0,\quad \omega_{12}-\omega_{34}=\omega_{23}+\beta\omega_{14},$$

$$\omega_{21}-\omega_{43}=\beta\omega_{23}+\omega_{14},\quad \omega_{22}-\omega_{44}+\omega_{33}-\omega_{11}=0$$

и соответствующими квадратными; β — единственный инвариант второго порядка, от которого зависит сложное отношение W инфлексионных центров.

Остаются три вторичных параметра окрестности третьего порядка, если принято $\omega_{11}+\omega_{22}+\omega_{33}+\omega_{44}=0$. Для двух из них берем значения так, чтобы ребра A_1A_3 и A_2A_4 касались к линиям прикосновения на главной «координатной» поверхности. Плоскость $A_1A_2A_3$ (соответственно $A_1A_2A_4$) пересекает две поверхности второго порядка, соприкасающиеся с остальными двумя главными поверхностями по прямым, не совпадающим с лучом A_1A_2 и проходящим через точку A_2 (соответственно A_1). Если W' (соответственно W'') — сложное отношение луча A_1A_2, ребра A_2A_3 (соответственно A_1A_4) и соответствующих высекаемых прямых, то фиксацией последнего вторичного параметра получаем $W'=W''$. Следует теорема $W'=W$.

Получается канонический репер третьего порядка. Дифференциальная окрестность третьего порядка луча комплекса зависит, кроме β, еще от семи новых инвариантов, геометрический смысл которых не выяснен. К. И. Гринцевичюс

5123. **О теореме Гаусса-Боннэ. Акасацу** (Gauss-Bonnet の定理について. 赤攝也), 數學, Сугаку, 1953, 5, № 2, 92—97 (япон.)

5124. **Линейчато-геометрический аналог триортогональной системы поверхностей. Кованцов Н. И.**, Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1, М., АН СССР, 1956, 153—155

Тезисы доклада. Рассматривается линейчатый комплекс и три двупараметрических семейства $\sum_1$, $\sum_2$, $\sum_3$ его главных поверхностей. Требование, чтобы какая-нибудь пара (например, $\sum_1$ $\sum_2$) семейств расслаивалась в однопараметрическое семейство конгруэнций, влечет: а) каждая из двух оставшихся пар также расслаивается в однопараметрическое семейство конгруэнций; б) все получающиеся таким образом конгруэнции являются конгруэнциями W. Автор замечает, что такой комплекс можно рассматривать как линейчато-геометрический аналог триортогональной системы поверхностей, и указывает линейчатые образы, аналогичные основным геометрическим понятиям (линиям кривизны, соприкасающимся окружностям и т. д.) триортогональной системы поверхностей. Используя указанную аналогию, автор выделяет специальные классы комплексов. А. Е. Либер

5125 К. **Проективно-дифференциальная геометрия сетей. Цицейка** (Geometrie diferențială proiectivă a rețelelor. Țițeica Gheorghe. București, Acad. RPR, 1956, 285 p., 18, 10 lei) (рум.)

Книга представляет перевод на румынский язык изданной в 1923 г. на французском языке монографии известного румынского геометра. В литературе по проективно-дифференциальной геометрии эта книга стоит особняком. Развивая теорию Дарбу определения поверхности, отнесенной к сопряженной сети линий, посредством уравнения Лапласа, автор с большим изяществом излагает результаты Бомпиани и свои собственные по теории сопряженных сетей в n-мерном пространстве, включая полную теорию последовательностей Лапласа и даже некоторые приложения к метрической геометрии (линии кривизны и изометрические поверхности). Книга может служить учебником. Она читается легко, не требуя предварительной подготовки. Автор так же легко и свободно сообщает все необходимые аналитические и геометрические предпосылки. С. П. Фиников

5126 К. **Математические труды. Пантази** (Opera matematică. Pantazi Alexandru. București, Acad. RPR, 1956, 496 p., 24, 20 lei) (рум.)

Книга представляет собрание всех математических сочинений — небольших заметок, мемуаров и монографию по проективно-дифференциальной геометрии талантливого покойного румынского геометра, пере-

печатанных с сохранением языка оригинала (рум. или франц.). Первая большая работа автора относится к проективному изгибанию гиперповерхностей в n-мерном проективном пространстве. К этой теме он возвращается в своем последнем мемуаре, рассматривая проективное изгибание неголономных поверхностей. Наиболее ярких результатов автор достиг в теории расслояемых пар конгруэнций. Здесь ему принадлежит своеобразная трактовка расслояемой пары, как совокупности двух семейств расслоняющих поверхностей, и блестящий мемуар о преобразуемых парах (сопряженных четверках), где он дал все три главных класса таких пар. Заслуживают внимания работы автора по плоским тканям (в смысле Бляшке). Оригинально построена монография «Элементы проективно-дифференциальной геометрии кривых и поверхностей» (рум.) на 108 страницах, где автор параллельно рассматривает метод подвижного репера и метод Вилчинского. С. П. Фиников

ГЕОМЕТРИЯ n-МЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА. ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

5127. Пучки линейных комплексов прямых в $\bar{S}_5$. Л о н г о (Fasci di complessi lineari di rette in S_5. L o n g o C a r m e l o), Boll. Unione mat. ital., 1954, 9, № 4, 381—385 (итал.)

Пучку линейных комплексов прямых в $2r+1$-мерном комплексном проективном пространстве ставится в соответствие пучок корреляции между двумя r-мерными подпространствами. При $r=2$ находятся канонические уравнения этих пучков, учитывая различные случаи вырождения корреляций. Получаются 11 уравнений, соответствующих известным ранее (Weber E. V., Math. Ann., 1901, 55, 386—440) 11 типам пучков.

Опечатки: стр. 382, 10-я строка сверху, вместо $r+2$ должно быть $r+1$; стр. 384, 10-я строка сверху, вместо p^{04} должно быть p^{05}. Г. К. Энгелис

5128. Параболические конгруэнции прямых. С е м я н и с т ы й В. И., Тр. Семинара по вектор. и тензор. анализу МГУ, 1956, вып. 10, 259—268

Определяются параболические линейные конгруэнции прямых в нечетномерном вещественном проективном пространстве P_{2n+1}, получающиеся предельным переходом из эллиптических и гиперболических конгруэнций (конгруэнций прямых, соединяющих мнимо сопряженные точки двух мнимо сопряженных n-мерных плоскостей или произвольные точки двух вещественных n-мерных плоскостей). Показывается, что параболическая линейная конгруэнция переводится в себя коллинеацией, матрица которой в канонической форме имеет клеточно-диагональный вид с матрицами $\begin{pmatrix}1 & \lambda\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ по главной диагонали, а также, что параболическая линейная конгруэнция представляет собой совокупность общих касательных к гиперповерхностям второго порядка $x^{2i}x^{2j+1}+x^{2j}x^{2i+1}=0$ в точках их общей n-мерной плоской образующей $e_0e_2\dots e_{2n}$.

Определяется параболическая паратактическая конгруэнция прямых в $(4n+3)$-мерном неевклидовом пространстве с абсолютом нулевой сигнатуры $2^{n+2}S_{4n+3}$, получающаяся предельным переходом из эллиптической и гиперболической паратактической конгруэнций (конгруэнций прямых, равноудаленных друг от друга и соединяющих в первом случае мнимо сопряженные точки двух мнимо сопряженных n-мерных плоских образующих абсолюта, а во втором случае — произвольные точки двух вещественных n-мерных плоских образующих абсолюта). Показывается, что параболическая паратактическая конгруэнция является частным случаем параболической линейной конгруэнции, что все прямые параболической паратактической конгруэнции касаются одной из n-мерных плоских образующих абсолюта и что всякие две прямые параболической паратактической конгруэнции обладают метрическим инвариантом.

Показывается, что параболическая линейная конгруэнция является моделью n-мерного проективного пространства $P_n(\varepsilon)$ над дуальными числами $a+b\varepsilon$, $\varepsilon^2=0$, а параболическая паратактическая конгруэнция является моделью $(2n+1)$-мерного неевклидова пространства $K_{2n+1}(\varepsilon)$ над дуальными числами, причем группа коллинеаций пространства $P_n(\varepsilon)$ и группа движений пространства $K_{2n+1}(\varepsilon)$ изоморфны факторгруппам групп, соответственно, коллинеаций пространства P_{2n+1} и движений пространства $^{2n+2}S_{4n+3}$, переводящих в себя соответственные конгруэнции, по подгруппам этих же групп, переводящим в себя каждую прямую соответственной конгруэнции; в последнем случае метрический инвариант двух прямых параболической паратактической конгруэнции может быть выбран равным расстоянию между двумя соответственными точками дуального неевклидова пространства. Б. А. Розенфельд

5129. Поливекторы и линейные комплексы плоскостей. П а д м а (Linear tensors and region-complexes. P a d m a N.), J. Indian Math. Soc., 1955, 19, № 2, 73—93 (англ.)

С поливектором (кососимметрическим тензором) $a_{i_1i_2\dots i_{r+1}}$ валентности $r+1$ связывается линейный комплекс Γ_r r-мерных плоскостей n-мерного проективного пространства на основе уравнения

$$a_{i_1\dots i_{r+1}}p^{i_1\dots i_{r+1}}=0 \quad (i_1,\dots,i_{r+1}=1,2,\dots,n),$$

где $p^{i_1\dots i_{r+1}}$ — плюккеровы координаты r-мерной плоскости. Точка x^i, удовлетворяющая уравнениям $a_{i_1\dots i_{r+1}}x^{i_1}=0$, называется особой точкой комплекса Γ_r, гиперплоскость p_j, для которой $a_{[i_1\dots i_{r+1}]}p_j=0$ — его особой гиперплоскостью. Аналогичным образом определяются особые элементы любых размерностей.

В статье вводится понятие полярного комплекса: если s-мерная плоскость R_s задана плюккеровыми координатами $q^{i_1\dots i_{s+1}}$, то поливектор $a_{i_1\dots i_{r+1}}q^{i_1\dots i_{s+1}}$ определяет линейный комплекс Γ_{r-s-1}, полярный плоскости R_s относительно комплекса Γ_r.

Рассматриваются основные свойства особых элементов комплекса Γ_r и полярных относительно него комплексов, что представляет собой перевод на геометрический язык известных алгебраических свойств поливекторов. Г. Б. Гуревич

5130. Проективное изгибание поверхностей с сопряженной сетью в S_5. Ш в е ц (Déformations projectives des surfaces á réseau conjugué dans S_5. Š v e c A l o i s), Чехосл. матем. ж., 1956, 6, № 1, 118—124 (франц.; рез. русс.)

Рассматриваются проективные изгибания поверхности (y) типа F (Terracini A., Atti Accad. Sci. Torino, 1937, 73, XVI) в S_5, определяемой как фокальная поверхность конгруэнции L прямых $p=[y,z]$, где y, z определяются системой

$$y_u=mz,\quad z_v=ny, \tag{1}$$

$$\begin{aligned} y_{vvv}&=ay+bz+cy_v+dz_u+py_{vv}+\varepsilon z_{uu},\\ z_{uuu}&=Ay+Bz+Cy_v+Dz_u+\tau y_{vv}+\omega z_{uu}. \end{aligned} \tag{2}$$

Цитируются результаты Терракини:

а) чтобы две поверхности (y) и $(\bar{y})$ типа F в S_5 допускали проективное «наложение» третьего порядка, необходимо и достаточно выполнение равенств

$$\bar{m}=m,\quad \bar{n}=n,\quad \bar{b}=b,\quad \bar{c}=c,\quad \bar{d}=d,\quad \bar{\rho}=\rho,\quad \bar{\varepsilon}=\varepsilon$$

откуда (учитывая (1), (2)) следует

$$\bar{A}=A,\quad \bar{C}=C,\quad \bar{D}=D,\quad \bar{\tau}=\tau,\quad \bar{\omega}=\omega.$$

б) Чтобы поверхность (y) была проективно изгибаема, необходимо и достаточно

$$mn=\varepsilon\tau, \tag{3}$$

$$\ln\left(\frac{\varepsilon}{m}\right)_{uv}=0 \tag{4}$$

Исследование геометрического смысла условий (3) и (4) приводит автора к теореме: Если два преобразования Лапласа (y_1) и (y_{-1}) поверхности (y) невырождены, то для того чтобы она допускала проективное изгибание третьего порядка, необходимо и достаточно, чтобы прямые $[yy_1]$ и $[yy_{-1}]$ описывали конгруэнции W (т. е., чтобы асимптотические линии на фокальных поверхностях соответствовали друг другу). Л. М. Семиусова

5131. **Вопросы существования проективного изгибания поверхностей в S_5, обладающих сопряженной сетью.** Ш в е ц (Problèmes d'existence de la déformation projective des surfaces de S_5 possédant un réseau conjugué. Š v e c A l o i s), Чехосл. матем. ж., 1956, 6, № 1, 125—138 (франц.; рез. русс.)

Доказывается теорема существования изгибаемых поверхностей, рассмотренных автором в предыдущей работе (реф. 5130).

Результаты:

1) Существует изгибаемая поверхность с сопряженной сетью, тройным слоем асимптотических и «псевдонормалью», с невырожденными первыми преобразованиями Лапласа, с двумя конгруэнциями W, описываемыми касательными сопряженной сети. Произвол решения: 10 функций одного аргумента.

2) Существует поверхность (A_0) с сопряженной сетью, тройным слоем асимптотических линий, для которой: а) преобразование Лапласа (A_2) невырождено и конгруэнция прямых $[A_0A_2]$ есть конгруэнция W; б) преобразование Лапласа (A_1) — кривая, третье соприкасающееся пространство которой лежит в пространстве, определяемом соприкасающейся плоскостью этой кривой и касательной плоскостью поверхности (A_0). Произвол существования: 7 функций одного аргумента. Л. М. Семиусова

5132. **О действительной интерпретации кривых комплексной центроаффинной плоскости.** З у е в **И. В.**, Уч. зап. Казанск. гос. ун-та, 1955, **115**, № 10, 13—15

Исследуются соотношения между инвариантами и инвариантными образами кривой комплексной центроаффинной плоскости и соответствующей ей поверхности нулевой кривизны биаксиального пространства. Автор показывает, что модуль эквиаффинной кривизны K кривой выражается через инвариант соответствующей поверхности $|K^2|=-b/g$; единственной поверхностью с постоянным инвариантом b/g является цилиндр, причем $\operatorname{Arg}K$ равен удвоенному углу, составленному некоторой декартовой сетью с асимптотической сетью поверхности.

Пользуясь введенными А. П. Норденом обозначениями (Матем. сб., 1949, 24, № 3), автор показал, что центроаффинная кривизна $\tilde{K}=\tilde{K}_1+i\tilde{K}_2$ связана с инвариантами соответствующей поверхности соотношениями

$$b^{rs'}t_rt_{s'}=2\tilde{K}_1\tilde{K}_2 \text{ и } p^{rs'}t_rt_{s'}=\tilde{K}_2^2-\tilde{K}_1^2,$$

где t_r — чебышевский вектор асимптотической сети.

Далее получается выражение инвариантов, соответствующих аффинной дуге кривой, и геометрическое истолкование инвариантного параметра П. К. Рашевским для конформного отображения $W=f(z)$.

В заключение автор отмечает, что уравнения поверхностей, соответствующих кривым, для которых постоянна центроаффинная кривизна или инварианты П. К. Рашевского, во всех случаях находятся в конечном виде. Для всех этих поверхностей их асимптотические сети являются сетями специального вида.

Заметка написана весьма лаконично, выкладки отсутствуют, что затрудняет его чтение. М. П. Черняев

5133. **Локальная теория однородных пространств.** К у р и т а (Homogeneous Spaces の局所理論. 栗田稔), 數學, Сугаку, 1953, 5, № 3, 1—9 (япон.)

5134. **Линейная полупростая группа как группа инвариантности тензора четвертой валентности.** Р а ш е в с к и й П. К., Тр. Семинара по вектор. и тензор. анализу. МГУ, 1956, вып. 10, 105—117

Пусть задано линейное представление полупростой группы G_r в пространстве E_n, причем базисным векторам e_α соответствующей алгебры G_r' отвечают матрицы

$$\overline{L}_\alpha=\|L^i_{j\alpha}\|,\quad \alpha,\beta,\ldots=1,\ldots,r;\quad i,j,\ldots=1,\ldots,n.$$

В G_r' рассматривается метрический тензор

$$l_{\alpha\beta}=\text{след}\,\overline{L}_\alpha\overline{L}_\beta.$$

Тензор в E_n

$$a^{ip}_{jq}=L^i_{j\alpha}L^p_{q\beta}l^{\alpha\beta} \tag{1}$$

инвариантен при преобразованиях группы G_r; если заданное представление G_r неприводимо, то a^{ip}_{jq} не допускает более широкой связной линейной унимодулярной группы.

Тензор a^{ip}_{jq} обладает следующими свойствами:

$$a^{is}_{jx}a^{xp}_{tq}-a^{ps}_{qx}a^{xi}_{tj}+a^{si}_{tx}a^{xp}_{jq}-a^{pi}_{qx}a^{xs}_{jt}=0, \tag{2}$$

$$a^{iy}_{jx}a^{xp}_{yq}=a^{ip}_{jq}. \tag{3}$$

Если понимать под рангом тензора a^{ip}_{jq} минимальное число ρ линейно независимых тензоров $a^i_j, a^i_j, \ldots, a^i_j$, из которых a^{ip}_{jq} может быть составлен как линейная комбинация их попарных произведений, и через ρ обозначить ранг тензора

$$C^{ps}_{jt}=a^{xp}_{jy}a^{ys}_{xt}-a^{sp}_{ty}a^{yx}_{xj},$$

то

$$\rho'=\rho. \tag{4}$$

Т е о р е м а. Если в E_n произвольно задан тензор a^{ip}_{jq}, удовлетворяющий условиям (2), (3), (4), то существует линейная полупростая группа, для которой выполняется (1). А. С. Феденко

5135. **Однородные симметрические гармонические пространства полупростых групп.** А л л а м и ж о н (Espaces homogènes symétriques harmnioques à

groupe semi-simple. Allamigeon André-Claude), C. r. Acad. sci., 1956, 243, № 2, 121—123 (франц.)

Дается необходимое и достаточное условие того, чтобы однородное симметрическое пространство G/H было гармоническим: если G/H собственно риманово или G — полупростая, то пространство G/H будет гармоническим тогда и только тогда, когда группа изотропии действует транзитивно на любой сфере ненулевого радиуса. А. С. Феденко

5136. О локальном вложении римановых пространств. Мацумото (Riemann 空間の局所的 imbedding について。 II. 松本誠), 數學, Сугаку, 1954, 5, № 4, 18—27 (япон.)

5137. К теории класса риманова пространства. Яненко Н. Н., Тр. Семинара по вектор. и тензор. анализу. МГУ, 1956, вып. 10, 139—191

Работа примыкает к двум предыдущим работам автора (РЖМат, 1953, 432 и 1955, 6079). В первой части развивается алгебраический аппарат исследования. Во второй части получены различные критерии класса q римановой метрики U_m. Вводятся в рассмотрение инварианты метрики $T_1 = R$ (ранг метрики), $T_2, \ldots, T_q$ (типы метрики).

Теорема. Если метрика U_m с инвариантом $T_q \geqslant 2$ допускает вложение в E_{m+q}, то ранг r и тип t реализации V_m совпадают соответственно с рангом $T_1 = R$ и инвариантом T_q метрики U_m.

Теорема. Если метрика U_m имеет $T_q \geqslant 2$, то она не может реализоваться в E_{m+q-1}.

Теорема. Если метрика U_m имеет $T_q \geqslant 3$, то необходимое и достаточное условие того, что она имеет класс q, заключается в следующем:

а) система уравнений Гаусса

$$\Omega_{ij} = \sum_{s=1}^{q} [\psi_i^s \psi_j^s]$$

разрешима;

б) решения $\psi_i^s = \omega_i^{m+s}$ уравнений Гаусса удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$[\Delta_{(i}^s \psi_{i_1}' \ldots \psi_{i_q)}^q] = 0, \quad s = 1, \ldots, q;$$

$$i_1, i_2, \ldots, i_q = 1, \ldots, m,$$

где $\Delta_i^s = (\psi_i^s)' - [\omega_i^j \psi_j^s]$. Причем в специальной теореме дается критерий разрешимости уравнений Гаусса и алгоритм для решения этих уравнений.

Теорема. Если метрика U_m имеет $T_q \geqslant 4$, то необходимое и достаточное условие того, что она имеет класс q, состоит в разрешимости уравнений Гаусса. В последнем параграфе для случая метрик класса 2 излагается метод включающих метрик. Он состоит в том, что для метрики U_m с $T_1 > 5$ и $T_q = 2$ строится включающая метрика $U_{m+i} \supset U_m$ такая, что можно утверждать: метрика U_m имеет класс 2 тогда и только тогда, когда U_{m+1} имеет класс 1. А. С. Феденко

5138. Эквиаффинные пространства третьей лакунарности. Егоров И. П., Докл. АН СССР, 1956, 108, № 6, 1007—1010

Если пространство аффинной связности A_n допускает полную группу движений G_r, то, как было показано автором ранее (Докл. АН СССР, 1943, 57, № 9; 1952, 84, № 2, РЖМат, 1954, 2317), r не может для полной группы принимать значений $n^2 < r < n^2 + n$ (первая лакуна) и $n^2 - n + 1 < r < n^2 - 1$ (вторая лакуна). В данной работе доказывается существование третьей лакуны в распределении порядков полных групп движений эквиаффинных пространств: $n^2 - 2n + 5 \leqslant r \leqslant n^2 - n - 2$, и исследуются пространства A_n, обеспечивающие точность верхней границы третьей лакуны, называемые автором пространствами третьей лакунарности ($n^2 - n - 2 \leqslant r \leqslant n^2 - n + 1$). Такие пространства всегда будут проективно-евклидовыми с рангами тензора Риччи, равными 2 или 1.

Рассматривая случай ранга-2, автор уточняет теорему Левина (Levine J., Duke Math J., 1949, 16, 23) о каноническом виде коэффициентов связности проективно-евклидовых A_n, допускающих k полей абсолютно-параллельных векторов, показывая, что необходимым и достаточным условием этого является существование такой проективно-декартовой системы координат, в которой функция связности ψ приводится к виду $\psi(x^{k+1}, \ldots, x^n)$. В рассматриваемом случае $k = n - 2$, чем и доказывается утверждение о границе третьей лакуны. Затем исследуется случай ранга-1.

Наличие в эквиаффинном пространстве точно $n - 2$ полей абсолютно параллельных контравариантных векторов является необходимым и достаточным условием для пространств третьей лакунарности.

Доказываются также теоремы: эквипроективное пространство с рангом тензора Риччи $n - k$, допускающее k полей абсолютно параллельных векторов ξ_α^i ($\alpha = 1, \ldots, k$), допускает группу движений G_r ($k(n+1) \leqslant r \leqslant n(n+1)/2 + k(k+1)/2$); при ранге > 1 такое пространство будет максимально подвижным только, если оно — симметрическое, и этого достаточно. Такие пространства впервые рассмотрены П. А. Широковым (Тр. Семинара по вектор. и тензор. анализу. МГУ, 1950, 8). А. З. Петров

5139. Подпространства пространства с кручением. Сингх (Subspaces of a space with torsion. Singh Kamla Devi), Tensor, 1956, 6, № 1, 6—14 (англ.)

Пусть V_n — риманово пространство с метрическим тензором a_{ij}, в котором определена аффинная метрическая несимметричная связность объектов Γ_{ij}^k (следовательно $\Gamma_{[ij]}^k \neq 0$ и $\nabla_k a_{jk} = 0$). Автор сначала определяет «тензорные производные» от тензоров в V_n, являющиеся смешанными ковариантными производными (Норден А. П., Пространства аффинной связности, М.—Л., 1950, § 37), причем часть индексов тензора относится к пространству со связностью Γ_{ij}^k, а оставшаяся часть индексов — к пространству со связностью $\hat{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$. Автор устанавливает некоторые свойства этого «тензорного дифференцирования». В заключение выведены уравнения Петерсона-Кодацци для V_n, вмещенного в V_m, когда в последнем задана аффинная метрическая несимметричная связность. А. Е. Либер

5140. γ-форма линейных элементов статических пространств. Такэно, Абэ (γ-form of the line elements of static spaces. Takeno Hyôitirô, Abe Shingo.), Tensor, 1955, 5, № 2, 111—122 (англ.)

Рассматриваются n-мерные римановы пространства, метрика которых может быть в некоторой системе записана в виде:

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j + g_{nn} (dx^n)^2,$$

$$g_{ij} = g_{ij}(x^k), \quad g_{nn} = g_{nn}(x^k),$$

$g_{ik} = 0$ ($i, j, k = 1, \ldots, n-1$; $\alpha, \beta = 1, \ldots, n$) ($n \geqslant 4$), которые обозначают статические решения уравнений поля $R_{\alpha\beta} = 0$ общей теории относительности для $n = 4$ и $g_{44} > 0$. Доказывается теорема, утверждающая не

обходимым и достаточным условием статичности V_n допущение поля v_λ, удовлетворяющего уравнениям: $v_{\lambda;\mu}+v_\lambda\rho_\mu+v_\mu\rho_\lambda=0$, $\rho_\mu v^\mu=0$, где $\rho_\mu\equiv\rho_{;\mu}=\partial_\mu\rho$, $\rho=-\frac{1}{2}\ln(v_\lambda v^\lambda)\neq 0$.

γ-формой линейного элемента названа метрика $ds^2=\exp(-2\gamma/(n-3))\,d\tau^2+e^{2\gamma}(dx^n)^2$, которая получится, если положить $g_{nn}=e^{2\gamma}$, $g_{ij}=\exp(-2\gamma/(n-3))h_{ij}$, $(h_{ij}=h_{ij}(x^k))$, $d\tau^2=h_{ij}dx^idx^j$, что всегда, конечно, возможно. Так как такое V_n полностью определяется заданием γ и $d\tau^2$, определяющего некоторое $H_{n-1}=V_{n-1}$, то авторы вводят символ: $V_n=F(H_{n-1},\gamma)$.

Для полей v^λ и ρ^λ устанавливаются следующие свойства: 1) v^λ является главным направлением Риччи: $v^\lambda R_{\lambda\mu}=Vv_\mu$, где $V=\exp(2\gamma/(n-3))\Delta_{H_2}\gamma$ 2) Для того, чтобы ρ^λ определяло главное направление Риччи V_n, необходимо и достаточно, чтобы γ_i было главным направлением Риччи тензора H_{ij} и H_{n-1}. Доказывается также теорема, обобщающая теорему Букдала (РЖМат, 1956, 3310): Если метрика $V_n=F(H_{n-1},\gamma)$ удовлетворяет уравнению $R_{\lambda\mu}=0$, то необходимое и достаточное условие того, чтобы метрика $V_n^*=F(H_{n-1},\gamma^*)$ также удовлетворяла этому уравнению, сводится к соотношению $\gamma^*=\pm\gamma+c$, c=const; если же имеет место это соотношение и $F(H_{n-1},\gamma^*)$ конформно к $F(H_{n-1},\gamma)$, то множитель конформности равен $\exp(-2c/(n-3))$. Записывается выражение для тензора кривизны, если $V_n=F(E_{n-1},\gamma)$, где E_{n-1} — плоское пространство.

Рассматривая обобщенные уравнения Эйнштейна, включающие электромагнитное поле, авторы исследуют вопрос, когда решениями таких уравнений будут $V_n=F(H_{n-1},\gamma)$, и записывают соответствующую систему дифференциальных уравнений, выраженную через первый и второй операторы Бельтрами, вычисленные в пространстве $H:\Delta_{H_1}$, Δ_{H_2}. А. З. Петров

5141. Об аксиоматическом выводе формул преобразования Лоренца. Мацумото (Sur la déduction axiomatique des formules de transformation de Lorentz. Matsumoto Toshizô), Mem. Coll. Sci., Univ. Kyoto, 1955, A29, № 1, 55—58 (франц.)

Рассматривается вопрос о построении системы аксиом, из которых следуют формулы преобразований Лоренца, заменяющих гипотезу о постоянстве скорости света. Положив в основу систему аксиом, предложенную Штиглером (Stiegler, C. r. Acad sci, 1952, 234, 1950), автор принимает их, за исключением одной. Если $S(x,y,z,t)$ и $S'(x',y',z',t')$ — две системы галилеевых координат, перемещающихся относительно с постоянной скоростью, то Штиглер постулирует равенство величин относительных скоростей, рассматриваемых в S и S'. Автор ставит задачей получить это равенство иными путями, для чего ему приходится опираться на пять положений: 1) $y=y'$, $z=z'$, что приводит к рассмотрению задачи в плоскостях (x,t) и (x',t'); 2) если α — угол между осями x, x', β — между t и t' и ω — между x' и t', а S', рассматриваемая из S, удаляется от S с постоянной скоростью, то $\alpha+\omega+\beta=\pi/2$; 3) если σ, τ — единицы длины осей x' и t' от S' в S, то $\sigma\tau=\sin\omega$; 4) если рассматривать S из системы S', то углы α и β не меняются и 5) $x^2-c^2t^2=0$, $x'^2-c'^2t'^2=0$.

Отсюда следует, что $c=c'$, и, ввиду этого, если

$$x=a_{11}x'+a_{12}t',\ t=a_{21}x'+a_{22}t',\ \text{то}\ a_{11}=\frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}},$$

$$a_{12}=\frac{v}{\sqrt{1-\gamma^2}},\ a_{21}=\frac{v/c^2}{\sqrt{1-\gamma^2}},\ a_{22}=\frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}},\ \gamma=\frac{v}{c},$$

что и решает вопрос. А. З. Петров

5142. Элементарные основные принципы единой теории относительности B_3. Главатый (The elementary basic principles of the unified theory of relativity B_3. Hlavatý Václav), J. Rational Mech. and Analysis, 1955, 4, № 5, 653—679 (англ.)

Статья является продолжением цикла работ автора под тем же названием (РЖМат, 1955, 1466 и 3402; 1956, 5485 и 8325). Положив в основу двухвалентный тензор $g_{\alpha\beta}$ (принцип B), автор вводит связность с кручением $\Gamma^\nu_{;\mu}$ при условии (принцип B_3): $D_\omega g_{\lambda\mu}=2S^\alpha_{\omega\mu}g_{\lambda\alpha}$. Требуется определить связность $\Gamma^\nu_{\alpha\mu}$ при условии (B_3) для исключительных случаев: а) $g=0$, б) $g=2$. Для неголономного ортрепера задача становится алгебраической и приводится к исследованию вспомогательного тензора

$$\frac{1}{2}N^\nu_{\lambda\mu}\overset{\text{def}}{=}(\partial_\alpha k^\nu_{[\lambda)}\,k^\alpha_{\mu]}-k^\nu_\alpha\partial_{[\mu}k^\alpha_{\lambda]}$$

(Nijenhuis A., Proc. Koninkl. nederl akad. wetensch., 1951, A 54, № 2, 200—212). Таким образом, возникает необходимость исследования двух тензоров $k_{\lambda\mu}$ и $h_{\lambda\mu}$, определяющих симметрическую и кососимметрическую части основного тензора: $g_{\lambda\mu}=h_{\lambda\mu}+k_{\lambda\mu}$, $h_{[\lambda\mu]}=k_{[\lambda\mu]}=0$. Обозначая собственные значения и векторы k^ν_λ через $\underset{x}{\lambda}$ и $\underset{x}{e^\nu}$, автор исследует, в первой части статьи канонические формы $(h_{\lambda\nu})$ и $(k_{\lambda\nu})$ в неголономном репере. Во второй части рассматривается исключительный случай а) $g=0$. Необходимое и достаточное условие существования решения выражается требованием, чтобы $\underset{3}{e^\nu}$ и $\underset{4}{e^\nu}$ были X_2-образующими. Для случая б) необходимое и достаточное условие приводится к требованию, чтобы собственные векторы $\underset{1}{e^\nu}$ и $\underset{2}{e^\nu}$ были касательными к геодезическим линиям. Так как должно выполняться условие $S^\alpha_{\lambda\alpha},=0$, то отсюда следует также, что эти векторы будут X_2-образующими. Решение в принципе допускает явное выражение. Работа перегружена большим количеством теорем, устанавливающих промежуточные факты в вычислениях. А. З. Петров

5143. О связностях Картана. Кобаяси (On connections of Cartan. Kobayashi Shôshichi), Canad. J. Math., 1956, 8, № 2, 145—156 (англ.)

Изучается специальный класс инфинитезимальных связностей — «связностей Картана». В классической теории аффинных связностей существуют две точки зрения. Согласно первой, восходящей к Леви-Чивите, касательное пространство к гладкому многообразию M рассматривается как векторное пространство, а аффинная связность — закон параллельного перенесения векторов вдоль кривых. Согласно же Э. Картану, — касательное пространство к многообразию — аффинное пространство, а аффинная связность — закон отображения касательных пространств вдоль кривых. Пусть $T(M)$ — касательный пучок многообразия M, G — группа линейных преобразований n-мерного пространства ($n=\dim M$), а G' — ее подгруппа, состоящая из преобразований, оставляющих на месте фиксированную точку. Построим присоединенные к $T(M)$ главные произведения P и P' со структурными группами G и G'. G' можно рассматривать как часть G. Тогда связность в смысле Картана можно понимать как связность в P, а связность Леви-Чивиты как инфинитезимальную связность в P'. Возникает задача об установлении соответствия между связностями в P и P'. Автор решает более общую задачу. Следуя Эресману (Ehresmann C., Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable. Colloque de Topologie Bruxelles, 1950), автор связывает с многообразием M косое произведение B

с базой M, слоем F и структурной группой Ли G, транзитивно действующей на F, т. е. F есть однородное пространство G/G', где G'—стационарная подгруппа. Как и в случае касательного пучка, строятся главные присоединенные косые произведения P и P' структурными группами G и G' где P' содержится в P. Инфинитезимальная связность в P определяется дифференциальной формой ω. Так как ω можно рассматривать и на P', то ω порождает связность и в P'.

Связность в P называется связностью Картана, если определяющая ее форма ω задает в P' абсолютный параллелизм (Kobayashi, Proc. Japan. Acad., 1954, 30, 709—710; Kobayashi, Le groupe des transformations qui laissent invariant le parallélisme, Colloque de Topologie, Strasbourg, 1954).

Основной результат работы заключается в теореме: Если однородное пространство G/G' редуктивно (РЖМат, 1956, 7605), то существует взаимно однозначное соответствие между множеством картановских связностей в P и инфинитезимальных связностей в P'. Если F — линейное пространство и G — группа его линейных преобразований, то B превращается в касательный пучок, и мы получаем связь между связностями Картана и Леви-Чивиты.

В конце работы автор определяет также и кручение для связностей Картана. Л. Р. Волевич

5144. Критерий интегрируемости перенесения направления по поверхности. Лёбелль (Kriterien für die Integrabilität von Richtungsübertragungen in Flächen. Löbell Frank), Sitzungsber. Math.-naturwiss. Kl. Bayer. Akad. Wiss., 1953 (1954), 141—148 (нем.)

Перенесение направления (Richtungsübertragung) есть закон, по которому касательный вектор к поверхности переносится в другой касательный вектор поверхности, когда точка его касания перемещается. Аналогично могут быть рассмотрены определения твердого движения касательной плоскости к поверхности, когда точка касания изменяется. Автор показал (Jahresber. Dtsch. Math. Ver., 1952, 55, Abt. 1, 89—119), что такой закон перенесения единственным образом определяется скалярной функцией ψ от произвольно направленного линейного элемента поверхности. Перенесение называется интегрируемым, если конечное положение вектора, который передвигается, не зависит от пути движения. Предыдущие выводы критерия интегрируемости основывались на теореме, что для этого необходимо, чтобы функция ψ была линейна в некотором смысле. Здесь данное новое доказательство критерия основывается на вариации криволинейного интеграла от функции линейного элемента. Условие линейности не предполагается, но получается побочно при рассмотрении доказательства.

S. B. Jackson

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 11, 985.

5145. Некоторые геометрические свойства многообразия комплексной структуры. Мартинелли (Qualche proprietà geometrica nelle varietà a struttura complessa. Martinelli Enzo), Atti Accad. Ligure, 1952 (1953), 9, 89—98 (итал.)

Пусть V — аналитическое комплексное многообразие. Действительная аффинная плоскость, натянутая на комплексный касательный вектор, снабжена естественной ориентацией и называется характеристической площадкой (сокращенно х. п.). В точке x многообразия V координатные функции $z^1, \ldots, z^n$ определяют отображение окрестности l_x точки x на окрестность U начала числового комплексного пространства. Образ в l_x евклидовой метрики окрестности U есть риманова метрика; всякая метрика на V, которая получается на каждом l_x из такой метрики псевдоконформным преобразованием, называется псевдоконформной. Псевдоконформные метрики — не что иное, как эрмитовы метрики. Более того, чтобы эрмитова метрика была келеровой, необходимо и достаточно, чтобы при параллельном перенесении угол между двумя касательными векторами одной х. п. сохранялся. Доказывается, что угол между двумя векторами одной и той же х. п. не зависит от псевдоконформной метрики, и оператор C из теории дифференциальных форм на комплексных аналитических многообразиях (см., например, Weil A., Comment. math. helv., 1947, 20, 110—116) определяет вращение на $\pi/2$ пучка касательных векторов одной х. п. Рассмотрим пару взаимно перпендикулярных направлений s, n, принадлежащих одной и той же х. п., тогда, если u и v — действительные функции точки на V, связанные уравнением $du/ds = dv/dn$, функция $f = u + iv$ голоморфная на V. Обобщение этого уравнения на функционалы p-мерного цикла приводит к понятию квазианалитического интеграла (см. статью автора в Atti Quarto Congresso Unione mat. ital. Taormina, 1951, Roma, 1953, 2, 398—406).

P. Dolbeault

Перевод из Math. Revs, 1955, 16, № 1, 73.

5146. О многообразиях со структурой комплексного почти произведения. Легран (Sur les variétés à structure de presque-produit complexe. Legrand Gilles), C. r. Acad. sci., 1956, 242, № 3, 335—337 (франц.)

Дается определение, основные свойства и условия интегрируемости инфинитезимальной структуры, являющейся обобщением почти комплексной структуры. Приведено условие, при котором кручение такой структуры обращается в нуль. Д. В. Беклемишев

5147. Когерентные алгебраические пучки. Серр (Faisceaux algébriques cohérents. Serre Jean-Pierre), Ann. Math., 1955, 61, № 2, 197—278 (франц.)

Систематически излагается теория пучков и ее применения в абстрактной алгебраической геометрии. Статья состоит из трех глав. В гл. I излагаются общие понятия теории пучков, рассматриваются когерентные пучки (над любым пространством), и когомологии с коэффициентами в пучках. В гл. II рассматриваются пучки над абстрактными алгебраическими многообразиями (в смысле Вейля). Доказано, что группы когомологий любого аффинного многообразия с коэффициентами в произвольном алгебраическом когерентном пучке тривиальны во всех положительных размерностях. Основные результаты работы содержатся в гл. III, посвященной проективным алгебраическим многообразиям. Устанавливается взаимно однозначное соответствие между алгебраическими когерентными пучками и некоторым классом модулей над кольцом многочленов. Описывается алгебраическая конструкция, позволяющая вычислять группы когомологий с коэффициентами в некотором пучке по модулю, соответствующему этому пучку. Эта конструкция прилагается, в частности, к доказательству тривиальности некоторых групп когомологий.

Статья заканчивается несложными простыми приложениями доказанных общих теорем. Более содержательные применения автор обещает изложить в последующих публикациях. М. М. Постников

5148. Когомология и алгебраическая геометрия. Серр (Cohomologie et géométrie algébrique. Serre Jean-Pierre), Proc. Internat. Congr. Math. 1954. Vol. 3. Groningen-Amsterdam, 1956, 515—520 (франц.)

Кратко изложены основные результаты автора по применению теории пучков в абстрактной алгебраической геометрии (для поля произвольной характеристики) и распространению на этот случай результатов

Кодаира-Спенсера (РЖМат, 1954, 3060) и Хирцебруха (РЖМат, 1955, 5260). Определяется понятие когерентного алгебраического пучка над алгебраическим многообразием X и указываются свойства соответствующих групп когомологий (реф. 5147). Получен результат, аналогичный теореме двойственности автора (РЖМат, 1956, 9081).

Рассмотрим некоторый дивизор D многообразия X. Отнесем ему пучок $\mathscr{L}(D)$, состоящий в каждой точке x из функций f, дивизоры которых удовлетворяют условию: $(f) \geqslant -D$ в окрестности x. Пусть далее $\chi(X) = 1 + (-1)^m p_a(X)$ обозначает арифметический род многообразия X, и $\chi_X(D)$ — виртуальный арифметический род (в терминологии работы Зарисского (Zariski O., Ann. Math., 1952, 55, 552—592). Обозначим для пучка $\mathscr{F}$: $\chi(X, \mathscr{F}) = \sum_q (-1)^q \dim H^q(X, \mathscr{F})$. Обобщение формулы Римана—Роха приводится автором в следующем виде: $\chi(X, \mathscr{L}(D)) = \chi(X) - \chi_X(-D)$. Отсюда вытекает равенство арифметических родов: $p_a(X) = P_a(X)$ (РЖМат, 1954, 3060).

Отмечены нерешенные вопросы:

а) Пусть Ω^p — пучок ростков дифференциальных форм степени p; $h^{p,q} = \dim H^q(X, \Omega^p)$.

Имеет ли место равенство $h^{p,q} = h^{q,p}$?

б) Пусть V — алгебраическое расслоенное пространство с базой X и векторным слоем, $\varphi(V)$ — пучок ростков регулярных сечений V. Является ли $\chi(X, \varphi(V))$ полиномом от канонических классов расслоенного пространства V и касательного пучка многообразия X (РЖМат, 1955, 5260)?

И. З. Розенкноп

5149. Некоторые результаты трансцендентной теории алгебраических многообразий. К о д а и р а (Some results in the transcendental theory of algebraic varieties. K o d a i r a K u n i h i k o), Proc. Internat. Congr. Math. 1954. Vol. 3. Groningen—Amsterdam, 1956, 474—480 (англ.)

В обзорном порядке излагается ряд вопросов, рассматривавшихся в предыдущих работах Кодаира и Спенсера:

1) Группа пучков комплексных линий на компактном комплексном многообразии M, дивизоры, характеристический класс (РЖМат, 1954, 3272, 3273).

2) Группы когомологий с коэффициентами в аналитических пучках и их вычисление с помощью гармонических форм (РЖМат, 1954, 3272). Условия обращения в нуль этих групп (РЖМат, 1955, 3393).

3) Бирегулярное вложение многообразий Ходжа в проективное пространство (РЖМат, 1956, 6823).

4) Многообразия Пикара (РЖМат, 1954, 3273).

В заключение приводится теорема относительно полных непрерывных систем (в смысле итальянских геометров) на неособом алгебраическом многообразии V. Пусть S — неособый простой дивизор на V такой, что пучок $[S]-K$ положителен (здесь $[S]$ обозначает пучок комплексных линий, соответствующий S, K — пучок, соответствующий каноническому классу дивизоров; положительность понимается в смысле наличия в характеристическом классе пучка действительной замкнутой формы $\gamma > 0$ типа (1, 1) (РЖМат, 1955, 3400)). Тогда совокупность $\mathscr{C}$ эффективных дивизоров $D \sim S$ образует полную непрерывную систему, содержащую S. Система $\mathscr{C}$ может быть параметризована с помощью неособого алгебраического многообразия Λ, являющегося аналитическим косым произведением над многообразием Пикара, с проективным пространством в качестве слоя. Характеристическая линейная система для $\mathscr{C}$ на S является полной.

И. З. Розенкноп

5150 К. Теория связностей и групп голономии в целом. Л и х н е р о в и ч (Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie. L i c h n e r o w i c z A n d r é. Paris, Dunod, 282 p.) (франц.)

Книга начинается с общих понятий дифференцируемого многообразия, тензоров на нем, дифференцируемого расслоенного пространства. В гл. 2 вводится основное для дальнейшего понятие инфинитезимальной связности. Пусть многообразие E является главным расслоенным пространством группы Ли G и V_n — его база. Если в каждой точке пространства E задано касательное к E линейное подпространство («горизонтальное»), дополнительное к касательному пространству слоя, и если это поле подпространств является гладким и инвариантным относительно группы G, то в расслоенном пространстве задана инфинитезимальная связность. Эту связность можно задавать при помощи линейной дифференциальной формы ω на многообразии E, принимающей значения в алгебре Ли L группы G. Если $x(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ — произвольный путь в пространстве V_n $z_0 \in E$ — некоторая точка в слое над точкой $x(0)$, то существует единственный горизонтальный (в каждой точке касающийся горизонтального подпространства) путь в E, выходящий из z_0 и накрывающий путь $x(t)$. Группой голономии инфинитезимальной связности в точке $z \in E$ называется подгруппа группы G, состоящая из всех таких $g \in G$, что точки z и zg (образ точки z при преобразовании g) можно связать горизонтальным путем. Вводится операция абсолютного дифференцирования по отношению к инфинитезимальной связности. Каждой форме π порядка q она сопоставляет на многообразии E форму $\nabla\pi$ порядка $q+1$. Форма 2-го порядка $\Omega = \nabla\omega$ со значениями в алгебре L называется формой кривизны. Эти общие конструкции применяются к трем видам расслоенных пространств: 1) E — пространство всех касательных реперов на многообразии V_n, G — однородная линейная группа; 2) E — пространство реперов, отнесенных к различным точкам касательных пространств к многообразию V_n, G — группа всех аффинных преобразований, вместе со сдвигами; 3) V_n — риманово многообразие, E — пространство всех ортонормированных касательных реперов на V_n, G — ортогональная группа. При этом автор получает основные формулы классической дифференциальной геометрии.

Если u и v — касательные векторы в точке $z \in E$, то элемент $\Omega_z(u, v)$ принадлежит алгебре Ли группы голономии в точке z. Эта алгебра Ли порождается значениями формы Ω в точках, которые можно связать с точкой z горизонтальным путем. В группе голономии каждой точки z выделяются две подгруппы. Первая из них, локальная группа голономии, порождена всеми достаточно малыми замкнутыми путями в точке $x \in V_n$, образе точки z при проекции на базу. Вторая, инфинитезимальная группа голономии, есть подгруппа, алгебра Ли которой порождается значениями формы Ω и ее ковариантных производных в точке z. Автор изучает связи между этими тремя группами; в частности, доказывается, что если связность является аналитической, то все три группы совпадают.

В четвертой главе излагается теория внешних дифференциальных форм на ориентируемых компактных римановых многообразиях. В алгебре всех внешних форм на многообразии вводится скалярное произведение. Рассматриваются оператор внешнего дифференцирования d, сопряженный к нему оператор δ и самосопряженный оператор $\Delta = d\delta + \delta d$. Нули оператора Δ называются гармоническими формами. Доказывается, что если форма F имеет нулевую ковариантную производную, то она гармонична.

С каждой такой формой F связывается цепочка операторов, первый из которых есть оператор внешнего умножения на F, а последний сопряжен первому. Все эти операторы преобразуют пространство гармонических форм в себя.

Последняя, пятая глава, посвящена комплексным и почти комплексным структурам на многообразии. Даются определения комплексной и почти комплексной структур, эрмитовой и почти эрмитовой, келеровой и почти келеровой метрик. Вводится тензор кручения почти комплексной структуры и доказывается, что аналитическая почти комплексная структура без кручения порождается некоторой комплексной структурой. Особое внимание уделено псевдокелеровым многообразиям, т. е. многообразиям, на которых существует почти келерова метрика без кручения. Фундаментальная внешняя форма F этой метрики имеет нулевую ковариантную производную. Используя операторы на гармонических формах, связанные с формой F и ее степенями, автор выводит ряд известных результатов о числах Бетти компактных псевдокелеровых многообразий. А. Л. Онищик

5151 Д. О группах голономий римановых многообразий и аффинных многообразиях без кручения. Берже (Sur des groupes d'holonomies des variétés riemanniennes et des variétés affines sans torsion. Berger Marcel. — Thèse doct. sci. math., Fac. sci. Univ. Paris, 1954, Paris, Gauthier-Villars, 1955, 54 p.) (франц.)

5152 Д. Дифференциальные формы и когомологии на комплексном аналитическом многообразии. Дольбо (Formes différentielles et cohomologie sur une variété analytique complexe. Dolbeault Pierre. — Thèse Doct.mathém. Fac. sci. Univ. Paris, 1955), Ann. Univ. Paris, 1955, 25, № 2, 226—228 (франц.)

Краткие тезисы докторской диссертации автора (РЖМат, 1953, 130; 1954, 2060). А. М. Васильев

5153 Д. О фактор-многообразии комплексно аналитического многообразия по дискретной группе комплексно аналитических автогомеоморфизмов. Бейли (On the quotient of a complex analitic manifold by a discontinuous group of complex analitic self-homeomorphisms. Baily Walter Lewis, Jr. — Doct diss. Princeton Univ., 1955), Dissert. Abstrs, 1955, 15, № 11, 2222 (англ.)

Пусть X — комплексно аналитическое многообразие, а G — группа его автогомеоморфизмов. G действует на X дискретно, таким образом, что X/G (многообразие классов точек из X, эквивалентных относительно G) компактно.

Кодаира доказал (РЖМат, 1956, 6823), что каждое келерово многообразие ограниченного типа бирегулярно эквивалентно алгебраическому многообразию в комплексном проективном пространстве. Аналогичными методами автор находит условие, достаточное для того, чтобы X/G было алгебраическим, точнее, чтобы существовало регулярное отображение Φ многообразия X на алгебраическое многообразие в комплексном проективном пространстве достаточно высокой размерности, причем $\Phi(gx) = \Phi(x)$ при $g \in G$, $x \in X$ и $\Phi(x) \neq \Phi(y)$ при $y \notin Gx$.

Статья содержит только сжатую формулировку результата. Д. В. Беклемишев

МЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ГЕОМЕТРИИ

5154. О числе целочисленных точек, содержащихся в пространственном многограннике с целочисленными вершинами. Пань Юн-цзянь (空間整頂點多邊形包含的整點數. 潘永鑑), 數學通訊, Шусюэ тунсюнь, 1955, № 50, 1—8 (кит.)

В своей предыдущей заметке автор установил соотношения между площадью многогранника с целочисленными вершинами в плоскости и числом целочисленных точек внутри его и на его периметре. Тогда автор предполагал систему координат прямоугольной. Теперь он замечает, что с помощью аффинного преобразования можно перенести полученные результаты на случай косой системы координат. Используя это замечание, автор рассматривает многогранники с целочисленными вершинами в пространстве и дает удобный способ для вычисления числа целочисленных точек внутри них. Чэнь Чин-и

5155. Аффинная прямоугольная геометрия. Науман (Eine affine Rechtwinkelgeometrie. Naumann Herbert), Math. Ann., 1956, 131, № 1, 17—27 (нем.)

Продолжая исследования Р. Бэра, Г. Ленца, К. Рейдемейстера и К. Шютте (РЖМат, 1957, 4329) по аффинной прямоугольной геометрии, автор обобщил результаты, полученные его предшественниками. При условии выполнения некоторой аксиомы K (если g и g' — две взаимно перпендикулярные прямые, A и B — две произвольные точки на прямой g, а A' и B' — две произвольные точки на прямой g', то существует коллинеарное преобразование, переводящее каждую прямую в ортогональную ей прямую и точки A и B соответственно в точки A' и B') он показал, что имеет место конфигурационная теорема А:

Пусть точки P_0, P_1, P_2, P_3 и точки P_0', P_1', P_2' P_3', являются вершинами таких двух различных четырехугольников, для которых пять сторон P_0P_1, P_0P_2, P_0P_3, P_1P_2 и P_1P_3 соответственно перпендикулярны сторонам $P_0'P_1'$, $P_0'P_2'$, $P_0'P_3'$, $P_1'P_2'$ и $P_1'P_3'$, тогда обязательно и шестая пара сторон P_2P_3 и $P_2'P_3'$ будет ортогональна.

После этого автор доказывает эквивалентность конфигурационной теоремы А аксиоме K и показывает, что аффинная теорема Дезарга является следствием конфигурационной теоремы А, а также ряд других свойств рассматриваемого преобразования. Введя оригинальную символику, он получает компактные формулы, осуществляющие изучаемые им преобразования. В заключение автор делает попытку обобщить свои результаты на пространство, но эта последняя часть исследования изложена весьма лаконично. М. П. Черняев

5156. О конечных недезарговых плоскостях, порождаемых четырьмя точками. Уагнер (On finite non-desarguesian planes generated by 4 points. Wagner A.), Arch. Math., 1956, 7, № 1, 23—27 (англ.)

Приводя теоремы Неймана (РЖМат, 1956, 3254): 1) для каждого нечетного простого числа p и $q = p^n$ существуют проективные плоскости из $q^4 + q^2 + 1$ точек, основанные на алгебре V—W (Veblen—Wedderburn) и содержащие дезаргову подплоскость из $q^2 + q + 1$ точек и подплоскость из семи точек; 2) для каждого $q = 2^n \geqslant 4$ существуют проективные плоскости из $2^{4n} + 2^{2n} + 1$ точек, основанные на V—W алгебре, содержащие дезаргову подплоскость из $2^{2n} + 2^n + 1$ точек, и четырехугольник, диагональные точки которого не коллинеарны, — автор исследует, исходя из результатов Холла, Неймана и Ленца (РЖМат, 1956, 749), подплоскости, порожденные четырехугольниками.

В каждой проективной плоскости типа $G(A)$ с V—W алгеброй A порядка q^2 существует хоть бы один четырехугольник, порождающий недезаргову подплоскость. Для каждого $q = 2^n \geqslant 4$ существует

проективная плоскость типа $G(A)$, которая содержит четырехугольник, порождающий недезаргову подплоскость, и эта подплоскость содержит собственную подплоскость из семи точек. Г. И. Жотиков

5157. Треугольник как геометрическое переменное. Семпл (The triangle as a geometric variable. Semple J. G.), Mathematika, 1954, 1, № 2, 80—88 (англ.)

Автор опирается на работу Шуберта (Schubert H., Math. Ann., 1880, 17, 153—212), в которой используются методы энумеративной геометрии для определения числа треугольников, принадлежащих одновременно двум алгебраическим системам размерности r и $6-r$ ($r=1, 2, 3$) в заданной плоскости. Шуберт в своей работе ввел не совсем ясное понятие инфинитезимального треугольника. В реферируемой работе автор указывает возможности уточнения этого понятия при помощи представления множества треугольников как алгебраического многообразия. Этого можно добиться несколькими способами. Под треугольником в данной плоскости можно понимать упорядоченное, соответственно неупорядоченное, множество трех точек или соответственно трех прямых. Иначе (вторая возможность) под треугольником подразумевается упорядоченная, соответственно неупорядоченная, система трех точек и трех прямых, связанных между собой соотношениями инцидентности. Этому случаю (для упорядоченной системы) соответствует шестимерное многообразие W_6 на многообразии Сегре (Segre) Σ_{12}. На этом многообразии лежит двойное трехмерное многообразие χ вполне вырожденных треугольников (совпадают все три вершины и одновременно все три стороны).

Указываются два способа построения неособой модели этой системы треугольников. Один из них состоит в том, что наряду с системой треугольников берется еще сеть всех конических сечений, описанных около треугольников системы. Этим занимался уже Шуберт, ставя инфинитезимальным треугольникам в соответствие «радиус кривизны». Таким путем можно получить вполне неособую модель многообразия W_6^*, в котором описанному выше многообразию χ соответствует простое четырехмерное многообразие.

Второй способ построения неособой модели системы треугольников состоит в том, что, помимо «радиуса кривизны», вводится для инфинитезимальных треугольников еще один параметр $\mu=\lim BC/AC$, если инфинитезимальный треугольник возникает как предел треугольников с вершинами A, B, C. В этом случае многообразие W_0 преобразовывается бирационально вполне неособое многообразие W_6^*, а многообразию χ соответствует пятимерное многообразие. M. Fiedler

5158. Касательность и дуальность над произвольным полем. Уоллес (Tangency and duality over arbitrary fields. Wallace Andrew H.), Proc. London Math. Soc., 1956, 6, № 23, 321—342 (англ.)

Проводится пересмотр классических теорий касательных и дуальности применительно к полю k произвольной характеристики p. Пусть V — абсолютно неприводимое многообразие (м.), заданное в аффинном пространстве, A_n, (x) — его производящая точка, f_i $(i=1, \ldots, m)$ — базис определяющего V идеала, $T(x)$ — касательное линейное многообразие к V в (x) (определенное уравнениями $\sum \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(X_j-x_j)=0$; $i=1, \ldots, m$) и $H(x)$ — касательная гиперплоскость к V в (x) (т. е. такая гиперплоскость, что либо $H\subset V$, либо $H\cap V$ имеет особенность в (x)). H сопоставляется точка (v) в аффинном пространстве A'_{n_1}, причем $k(v)$ — регулярное расширение поля k; тем самым определяется дуальное к V м. V'. Однако касание $T(x)$ с V происходит вообще не в точке — это будет м., дуальное к м., натянутому в A' на точки (v), $(v+D_1v)$, $\ldots$, $(v+D_sv)$, где $D_1, \ldots, D_s$ — максимальное семейство линейно независимых производных в $k(v)$, которые можно продолжить до производных в $k(x, v)$ и классический случай, когда V в свою очередь дуально к V', получается, если $k(x, v)$ сепарабельно порождено над $k(v)$. Обратно, если V и V' — дуальные друг к другу м. в A_n и A'_n, (x), (v) — их производящие точки и $T(x)$ дуально к месту касания $T(v)$, а $T(v)$ дуально к месту касания $T(x)$, то $k(x, v)$ сепарабельно порождено как над $k(v)$, так и над $k(x)$ (сепарабельный случай).

Исследование общего случая дуальности с помощью нескольких новых теорем об алгебраических функциях над k и проектирования приводится к изучению случая гиперповерхностей. При соответствующем выборе системы координат такая гиперповерхность V с производящей точкой $(z, x_1, \ldots, x_r)$ допускает специализацию вида

$$z=\sum_1^r p_ix_i+g, \text{ где } p_{s+j}=$$

$$=h_j(p_1, \ldots, p_s, x_{s+1}^p, \ldots, x_n^p),\ j=1, \ldots, r-s,$$

h_j — сепарабельные алгебраические функции своих аргументов над k, g — сепарабельная алгебраическая функция над $k(p_1, \ldots, p_r)$ и $p_1, \ldots, p_s$ — сепарабельные алгебраические функции над k, заданные уравнениями

$$x_i=-\sum_1^{r-s} x_{s+j}\frac{\partial h_j}{\partial p_i}-\frac{\partial g}{\partial p_i},\quad i=1, \ldots, s.$$

Сепарабельный случай имеет место тогда и только тогда, когда h_j не зависит от $x_{s+1}, \ldots, x_r$.

Статья заканчивается рядом примеров. Всюду четко выделяется геометрическое значение результатов. В. В. Морозов

ГЕОМЕТРИЯ ВЫПУКЛЫХ МНОГООБРАЗИЙ

5159. Вписанные и описанные тругольники выпуклой кривой на сфере. Фейеш Тот (Triangles inscrits et circonscrits à une courbe convexe sphérique. Fejes Tóth L.), Acta math. Acad. sci. hung., 1956, 7, № 2, 163—167 (франц.; рез. русск.)

Доказана теорема, высказанная автором ранее (РЖМат, 1956, 750): Для всякой выпуклой области на сфере наименьший периметр L описанных треугольников и наибольший периметр l вписанных треугольников связаны соотношением

$$L-l\leqslant 6\left(\arccos\sqrt{\frac{\sqrt{21}+1}{10}}-\arcsin\sqrt{\frac{\sqrt{21}-3}{8}}\right);$$

равенство достигается только в случае круга определенного радиуса. В силу полярного соответствия аналогичное неравенство связывает наименьшую площадь описанных и наибольшую площадь вписанных треугольников. В. А. Залгаллер

5160. Краевые условия для бесконечно малых изгибаний выпуклых поверхностей. Рембс (Randvorgaben bei infinitesimaler Verbiegung konvexer Flächen. Rembs Eduard), Arch. Math., 1954, 6, № 1, 55—58 (нем.)

Рассматривается бесконечно малое изгибание выпуклой поверхности, ограниченной плоскими замкнутыми линиями. Пусть Γ — какая-нибудь компонента границы, $\overline{X} = \{x_1(s),\ x_2(s),\ x_3(s)\}$ — радиус-вектор переменной точки кривой Γ, s — дуга, отсчитываемая на Γ, $k = k(s)$ — кривизна. Устанавливаются формулы:

$$\oint_\Gamma \delta k\, ds = 0,\quad \oint_\Gamma \delta k x_1(s)\, ds = 0,\quad \oint_\Gamma \delta k x_2(s)\, ds = 0 \qquad (1)$$

где δk — изменение кривизны Γ при бесконечно малом изгибании данной поверхности. Указываются два применения полученных формул: 1) δk имеет на Γ по крайней мере четыре перемены знака (считая $\delta k \not\equiv 0$); этот вывод получается из двух последних формул (1) аналогично известному доказательству Герглотца теоремы о четырех вершинах овала; 2) если по всем компонентам границы овалоид заклеен кусками плоскостей, то $\delta k \geqslant 0$; тогда из первой формулы (1) следует $\delta k \equiv 0$ на всей границе. Автор указывает, что отсюда может быть получена теорема референта о жесткости заклеенного овалоида. Н. В. Ефимов

5161. К теории опорной функции и радиуса. Радиальные поверхности. Гигер (Beiträge zur Theorie von Stützfunktion und Radius — Die Radialflächen. Giger Hans), Comment. math. helv., 1956, **30**, № 4, 241—256 (нем.)

В работах Шеррера (Scherrer W., Comment. math. helv., 1946, **19**, 1947, **20**, 1951, **25**) для исследования поверхности введены понятия опорного вектора — $[mr]$, опорной функции $p = -(mr)$ и радиуса $r = \sqrt{\overline{r}^2}$, рассматриваемых в качестве параметров. Шиндлер (Schindler H., Comment. math. helv., 1952, **26**) определил поверхности, для которых опорная функция и радиус функционально связаны. Ими оказались поверхности вращения и резные поверхности — радиальные поверхности, в терминологии автора.

В настоящей работе автор доказывает, что единственными овальными радиальными поверхностями, в предположении их аналитичности, являются выпуклые поверхности вращения. Кроме того, радиальные поверхности постоянной средней кривизны также являются поверхностями вращения; отсюда катеноид — единственная минимальная радиальная поверхность. Г. С. Бархин

5162. Неравенства для выпуклых многогранников. Флориан (Ungleichungen über konvexe Polyeder. Florian A.), Monatsh. Math., 1956, **60**, № 4, 288—297 (нем.)

Пусть V, e, f, k — соответственно объем, число вершин, граней и ребер выпуклого многогранника; s_i — длина ребра и α_i — угол между внешними нормалями граней, пересекающимися по этому ребру. Упрощается ранее данное (РЖМат, 1957, 3509) автором доказательство неравенства для многогранника, содержащегося в единичной сфере

$$V \leqslant \frac{2k}{3}\cos^2\frac{\pi f}{2k}\operatorname{ctg}\frac{\pi e}{2k}\left(1 - \operatorname{ctg}^2\frac{\pi f}{2k}\operatorname{ctg}^2\frac{\pi e}{2k}\right).$$

Предполагая, что основания перпендикуляров, опущенных из центра сферы на грани и ребра многогранника, являются соответственно внутренними точками этих граней и ребер, автор доказывает неравенство

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} s_i\alpha_i \leqslant 2k\sin\frac{\pi f}{2k}\sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2\frac{\pi f}{2k}\operatorname{ctg}^2\frac{\pi e}{2k}}\times \times \arccos\left(\cos\frac{\pi e}{2k}\operatorname{cosec}\frac{\pi f}{2k}\right) \qquad (1)$$

для многогранника, содержащегося в единичной сфере, и неравенство

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} s_i\alpha_i \geqslant 2k\sin\frac{\pi f}{2k}\sqrt{\operatorname{tg}^2\frac{\pi f}{2k}\operatorname{tg}^2\frac{\pi e}{2k} - 1}\times \times \arccos\left(\cos\frac{\pi e}{2k}\operatorname{cosec}\frac{\pi f}{2k}\right) \qquad (2)$$

для многогранника, содержащего единичную сферу. Высказываются соображения в пользу гипотезы о справедливости неравенств (1), (2) и при отсутствии условия относительно оснований перпендикуляров. Г. И. Дринфельд

5163 К. Круг и шар. Бляшке (Kreis und Kugel. 2. durchges. und verb. Aufl. Blaschke Wilhelm Berlin, de Gruyter, 1956, VIII, 167 S., 18.60 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1956, A, № 51—52, 3659 (нем.)

См. также: 4768

ЧИСЛЕННЫЕ И ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

5164. О скорости сходимости приближений в методе академика С. А. Чаплыгина и в модификациях этого метода. Вертгейм Б. А., Науч. тр. Молотовск. горн. ин-та, 1956, сб. № 1, 136—141

Видоизменяя метод Чаплыгина для уравнения $y' = f(x, y)$ (при этом лишь требуется, чтобы $\partial f/\partial y$ удовлетворяла условию Липшица), автор показывает, что и здесь скорость сходимости будет порядка 2^{-2n}.

Имеются мелкие опечатки, например, на стр. 141 $\partial f/\partial y$ и $\partial^2 f/\partial y^2$ переставлены местами. Я. И. Алихашкин

5165. Неограниченно применимый метод типа С. . Чаплыгина для обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка. Слугин С. Н., Докл. АН СССР, 1956, **110**, № 6, 936—939

Используя аппарат функционального анализа в полупорядоченных пространствах, автор выводит алгорифм приближенного решения уравнения

$$y^{(n)} - f(z,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)}) = 0\quad y^{(k)}(t_0) = \alpha_k \quad (k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1),$$

требуя лишь ограниченности $\partial^k f/\partial y^k$. Предела применимости не будет, если специально выбрать первоначальные приближения. Я. И. Алихашкин

5166. Численное интегрирование дифференциальных уравнений в комплексной области. Микеладзе Ш. Е. (დიფერენციალურ განტოლებების რიცხვითი ინტეგრება კომპლექსურ არეში. მიქელაძე შ.), Сообщ. АН ГрузССР, 1956, **17**, № 2, 97—102

Рассматриваются обычные интерполяционные формулы, формулы численных квадратур и формулы для численного интегрирования дифференциальных уравнений в комплексной области для интегрирования вдоль прямой. Л. В. Курочкина

5167. Теорема об оценке погрешности приближенного решения дифференциального уравнения. Азбелев Н. В. и Тонков Л. В., Докл. АН СССР, 1956, **111**, № 3, 515—516

Рассматривается уравнение

$$y^{(n)} = f(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)}) \qquad (1)$$

с начальными условиями

$$y^{(k)}(x_0) = y_0^{(k)} \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1) \qquad (2)$$

и произвольная функция $u(x) \in C_n[x_0, X]$, удовлетворяющая условиям (2). При некоторых предположениях относительно функции $f(x, y, \ldots, y^{(n-1)})$ (непрерывность и выполнение условий L^* и L^{**}) в области $G\{x_0 \leqslant x \leqslant X,\ a_k \leqslant y^{(k)} \leqslant b_k\}$ и $(x, u, u', \ldots, u^{(n-1)}) \in G$, авторы дают оценку разностей

$$\eta_{(x)}^{(k)} = u^{(k)}(x) - y^{(k)}(x) \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

на промежутке применимости теоремы Чаплыгина о дифференциальных неравенствах. Здесь $y(x)$ — решение уравнения (1) при условиях (2). Оценка производится с помощью решения двух линейных дифференциальных уравнений с коэффициентами, соответствующими условиям L^* и L^{**} и надлежащим образом выбранными правыми частями. Б. Н. Бабкин

5168. О некоторых суммарных уравнениях для граничных задач уравнений в частных производных. Гланц, Рейснер (On finite sum equations for boundary value problems of partial difference equations. Glantz Herbert, Reissner Eric), J. Math. and Phys., 1956, **34**, № 4, 286—297 (англ.)

Вместо того, чтобы точно сводить граничную задачу для уравнения в частных производных к интегральному уравнению и затем решать это уравнение приближенно, авторы предлагают сначала аппроксимировать уравнение в частных производных и связанные с ним граничные условия задачей для конечноразностного уравнения. Затем «граничная задача» для разностного уравнения сводится к «суммарному уравнению», — некоторой системе линейных алгебраических уравнений, которую можно решить точно. Авторы подробно излагают предлагаемый способ решения граничных задач на двух примерах.

В частности, рассматривается проблема двумерной теории плоского крыла для несжимаемого потока газа, которая, как известно, соответствует определенной смешанной граничной задаче для уравнения Лапласа и для которой известно точное решение.

В качестве второго примера рассматривается соответствующая трехмерная задача, для которой точное решение неизвестно. Д. Ф. Давиденко

5169. Стохастическое исследование погрешности в приближенном решении плоской проблемы упругости. Блан (Étude stochastique de l'erreur dans la résolution approchée de problèmes d'élasticité plane. Blanc Ch.), Bull. techn. Suisse romande, 1957, **83**, № 1, 1—5 (франц.)

5170. О принципах оценки погрешности в практическом анализе. Коллац (Fehlermaszprinzipien in der praktischen Analysis. Collatz L.), Proc. Internat. Congr. Math. 1954, Vol 3, Groningen-Amsterdam, 1956, 209—215 (нем.)

Обсуждаются различные принципы оценки погрешности в теории приближения функций $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, заданных в области B пространства $x_1, x_2, \ldots, x_n$, посредством линейной комбинации $Q_p(x_j) = \sum_{\nu=1}^{p} a_\nu u_\nu(x_j)$ функций $u_\nu(x_j)$, заданных в той же области B, а также дается обзор имеющихся оценок погрешности приближенных решений линейных дифференциальных уравнений в частных производных 2-го порядка. Н. Я. Лященко

5171. Применение альтернирующего метода к решению задачи о кручении призматического стержня таврового сечения. Бондаренко Б. А., Тр. Ин-та матем. и механ. АН АзССР, 1956, вып. 18, 43—51

Задача о кручении призматического стержня произвольного сечения сводится, как известно, к нахождению функции, гармонической в области поперечного сечения стержня и удовлетворяющей определенному условию на контуре сечения. Автор рассматривает случай стержня таврового сечения, которое можно представить в виде теоретико-множественной суммы двух прямоугольников. В каждом из этих прямоугольников решается задача Дирихле. Знание решения в одном прямоугольнике дает возможность задать граничное значение на отрезках границы второго прямоугольника, лежащих внутри первого, и решать задачу Дирихле во втором прямоугольнике и т. д. Первоначальное граничное условие для одного из прямоугольников задается произвольно, в виде функции, разложимой в ряд Фурье.

Задача Дирихле решается на каждом шаге методом Фурье, причем определение последовательности решений в каждом из прямоугольников сводится к отысканию коэффициентов Фурье данного приближения для одного прямоугольника по известным коэффициентам Фурье соответствующего приближения для второго прямоугольника.

Выводятся рекуррентные соотношения для коэффициентов Фурье.

При практических расчетах построение коэффициентов Фурье проводится до тех пор, пока в пределах принятой точности последующие коэффициенты совпадут с предыдущими. Приводятся таблицы, характеризующие схему вычислений. Д. Ф. Давиденко

5172. Об одном прямом методе решения краевых задач. Филин А. П., Инженерный сб., 1955, **22**, 53—64

Работа представляет из себя несущественное видоизменение методов Галеркина и Треффтца. Автор предлагает искать функцию, удовлетворяющую граничным условиям (или дифференциальному уравнению), приближенно в виде отрезка некоторого ряда. После сведения задачи к однородной применяются обычные методы. Никаких исследований не проводится. Подробно рассмотрены два примера для бигармонического уравнения. Имеется указание на применимость к системам. Б. А. Булавский

5173. Замечания к численному решению уравнения Пуассона. Енне (Bemerkungen zur rechnerischen Auflösung der Poissonschen Gleichung. Jenne Werner), Z. angew. Math. und Mech., 1955, **35**, № 9—10, 330—331 (нем.)

Отмечается соответствие между разностным аналогом задачи Дирихле и методом «точечного представления» системы линейных алгебраических уравнений, который К. Фридрих применял при рассмотрении тригонометрических сетей в задачах геодезии.

Приводится 2 примера. А. П. Шварцман

5174. Верхняя и нижняя границы собственных чисел, полученные методом конечных разностей. Вейнбергер (Upper and lower bounds for eigenvalues by finite difference methods. Weinberger H. F.), Communs Pure and Appl. Math., 1956, **9**, № 3, 613—623 (англ.)

Автор приводит оценку верхней и нижней границ наименьшего собственного числа задачи колебания мембраны: $\Delta u + \lambda u$ в области R, $u = 0$ на границе области. Нижняя граница получена с помощью нахождения минимума соответствующего функционала для конечноразностной задачи в сетчатой области R_h. Оценка имеет вид

$$\lambda \geqslant \lambda^{(h)} \frac{1 + \frac{h}{2\rho} + \frac{h^2}{12\rho^2}}{1 - \frac{\lambda h^2}{24} + \frac{\lambda^2 h^4}{576}},$$

где h — шаг сетки, а ρ — сторона наименьшего квадрата, содержащего область $R_{\frac{h}{2}}$.

Для оценки сверху получено соотношение

$$\lambda \leqslant \left(1+\frac{h}{d}\right)\frac{\bar{\lambda}^{(h)}}{1-3\bar{\lambda}^{(h)}h^2},$$

где $\bar{\lambda}$ — наименьшее собственное число для той же конечноразностной задачи, но в другой области $\bar{R}_h \subset R_h$, d — наибольший из диаметров области R в направлении координатных осей. Л. М. Голубева

5175. Решение уравнения диффузии при помощи разностного уравнения высокого порядка точности. Дуглас (The solution of the diffusion equation by a high order correct difference equation. Douglas Jim, Jr), J. Math. and Phys., 1956, 35, № 2, 145—151 (англ.)

Рассматривается численное решение граничной задачи для уравнения диффузии

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant t\leqslant T \qquad (1)$$

при помощи разностного уравнения

$$\left(1-\frac{2}{3\lambda}\right)\Delta_x^2 w_{i,n+1}+\left(1+\frac{2}{3\lambda}\right)\Delta_x^2 w_{i,n}=$$

$$=2\,\frac{w_{i,n+1}-w_{i,n}}{\Delta t}\ n\geqslant 0,$$

где $\lambda=4\Delta t/(\Delta x)^2$ постоянно.

Доказывается теорема сходимости: Если существует решение $u(x,t)$ граничной задачи (1) и если функция $u(x,t)$ по крайней мере 7 раз дифференцируема в области $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant t\leqslant T$, то решение разностного уравнения $w_{i,n}$ равномерно сходится к $u(x,t)$ во всей области и ошибка в решении определяется неравенством

$$|v_{i,n}|\equiv|u_{i,n}-w_{i,n}|<\lambda E(\Delta t)^2/4,\ E=\text{const}.$$

Н. К. Чухрукидзе

5176. Интегрирование нелинейных параболических уравнений с помощью неявных разностных методов. Роз (On the integration of non-linear parabolic equations by implicit difference methods. Rose Milton E.), Quart. Appl. Math., 1956, 14, № 3, 237—248 (англ.)

Рассматривается нелинейное параболическое дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=F\left(x,\ t,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial t}\right) \qquad (1)$$

в полосе $0<t\leqslant T$, $0<x<L$, с начальным условием

$$-\beta^0(x)\,u(x,\ 0)=f_0(x)$$

и граничными условиями

$$\alpha^1(t)\frac{\partial}{\partial x}u(0,\ t)-\beta^1(t)\,u(0,\ t)=f_1(t),$$

$$-\alpha^2(t)\frac{\partial}{\partial x}u(L,\ t)-\beta^2(t)\,u(L,\ t)=f_2(t)$$

в предположении существования и единственности решения $u(x,t)$.

Уравнение (1) аппроксимируется неявным разностным уравнением:

$$\omega_1\Delta_x^2 u(x,\ t)+\omega_2\Delta_x^2 u(x,\ t-k)= \qquad (2)$$

$$=F[x,\ t,\ u(x,\ t),\ \omega_1\Delta_x u(x,\ t)+\omega_2\Delta_x u(x,\ t-k),$$

$$\Delta_t u(x,\ t)],$$

$$\omega_1\geqslant 0,\ \omega_2\geqslant 0,\ \omega_1+\omega_2=1.$$

В первой части дается доказательство точечной сходимости решения разностного уравнения (2) $u^h(x,t)$ к решению $u(x,t)$, когда $h,\ k\to 0$, причем $k/h^2=\lambda$ есть фиксированное число; приводится оценка быстроты сходимости.

Обсуждается итеративный метод для решений неявных разностных уравнений (2); приводится доказательство сходимости итераций при фиксированном значении h и оценка ошибки на любом шаге итерации.

Н. К. Чухрукидзе

5177. Численное интегрирование волновых уравнений. Дюнген (L'intégration numérique de l'équation des ondes. Dungen F. H. van den), Colloq. internat. Centre nat. rech. scient., 1953, 37, 215—238, Discuss. 279—282, 347—354 (франц.)

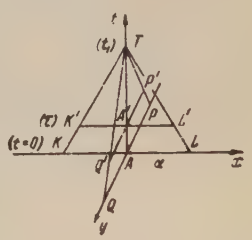
С помощью метода сеток решается уравнение

$$\sum_1^n\frac{\partial^2 u}{\partial x_i}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=F(x,\ t), \qquad (1)$$

где F — известная функция переменных $x_1,\ldots,x_n$ и t, при начальных условиях

$$u|_{t=0}=f(x),\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\varphi(x). \qquad (2)$$

Идея решения заключается в том, что поставленная задача Коши для $t=0$ последовательно заменяется постановкой таких же задач для $t=t_1,\ 2t_1,\ldots,$. Это достигается с помощью формул, которые позволяют, отправляясь от начальных значений f и φ, вычислить их значения в последующие дискретные моменты t. Рассмотрим сперва частный случай (1) при $F=0$ и $n=2$. Покроем плоскость xy $(t=0)$ квадратной сеткой со стороной a и вычислим значения f и φ в вершинах этой сетки: f_A, φ_A; f_B, φ_B;.... Находим разложения



$$u=(u_0)+t\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_0+\frac{t^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_0+\ldots,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_0+t\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_0+\frac{t^2}{2!}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)_0+\ldots, \qquad (3)$$

где (u_0) и $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_0$ известны. Построим прямой круговой конус высоты $AT=a/c$, окружность основания которого имеет центр A и радиус a (см. фиг.). Значения u и $\frac{\partial u}{\partial t}$ в точке T зависят только от начальных значений внутри круга и на его окружности. Полагаем

$$f=A_{20}x^2+2A_{11}xy+A_{02}y^2+A_{10}x+A_{01}y+A_{00},$$
$$\varphi=\alpha_{20}x^2+2\alpha_{11}xy+\ldots+\alpha_{00} \qquad (4)$$

и находим

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_0=c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_0=2c^2(A_{20}+A_{02}),$$

$$\left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)_0=2c^2(\alpha_{20}+\alpha_{02}).$$

Производные четвертого и последующих порядков тождественно равны нулю и потому

$$u_T = A_{00} + t\alpha_{00} + c^2t^2(A_{20}+A_{02}) + \frac{c^2t^3}{3}(\alpha_{20}+\alpha_{02}),$$
$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_T = \alpha_{00} + 2c^2t(A_{20}+A_{02}) + c^2t^2(\alpha_{20}+\alpha_{02}), \quad (5)$$

где $ct = a$ на стороне квадрата сетки. Если значения f и φ будут даны в пяти точках A, K, L, P, Q, то можно вычислить пять коэффициентов каждого полинома (4), за исключением A_{11} и α_{11}, но они не входят в (5). Легко видеть, что

$$A_{00} = f_A, \qquad A_{20} = \frac{f_K + f_L - 2f_A}{a^2}, \ldots, \qquad \alpha_{00} = \varphi_A, \ldots$$

Следовательно:

$$u_T = \frac{1}{2}(f_K + f_P + f_Q + f_L - 2f_A) + \frac{a}{6}(\varphi_K + \varphi_P + \varphi_Q + \varphi_L + 2\varphi_A),$$
$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_T = \frac{1}{a}(f_K + f_P + f_Q + f_L - 4f_A) + \frac{1}{2}(\varphi_K + \varphi_P + \varphi_Q + \varphi_L - 2\varphi_A). \quad (6)$$

Обобщение формул (6) на случай $n > 2$ не представляет труда. Точность формул (6) может быть повышена, если данные f и φ интерполировать полиномами четвертой степени. Дается способ постоянного контроля вычислений.

Пусть теперь в уравнении (1) $F \neq 0$ при начальных условиях (2). Известно, что если τ — параметр, то функция $v = v(x, t, \tau)$ есть решение уравнения (1) при отсутствии в нем второго члена, удовлетворяющее начальным условиям:

$$v(x, 0, \tau) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial t} v(x, 0, \tau) = F(x, t), \quad (7)$$

а интеграл Дюгамеля $u^* = c^2 \int_0^t v(x, t-\tau, \tau)\, d\tau$ удовлетворяет всему уравнению (1) при соответствующих начальных условиях. Следовательно, если добавить этот интеграл к решению уравнения без второго члена, то задача будет полностью решена. Применяя параболическую интерполяцию и учитывая (7), находим:

$$u^*(x, t_1) = c^2 \int_0^{t_1} (t_1 - \tau) F(x, \tau)\, d\tau + \frac{c^4}{3!} \int_0^{t_1} (t_1 - \tau)^3 \sum_1^n \frac{\partial^2 F(x, \tau)}{\partial x_i^2}\, d\tau. \quad (8)$$

Предполагая значения $t = 0$ и $t = t_1$ достаточно близкими, при помощи линейной интерполяции находим

$$\int_0^{t_1} (t_1 - \tau) F(x, \tau)\, d\tau = t_1^2 \left[\frac{1}{3} F(x, 0) + \frac{1}{6} F(x, t_1)\right].$$

Второй интеграл в (9) получаем, подставляя вторые производные как функции значений F и интерполируя по точкам $K', L', \ldots, A'$

$$u_T^* = \frac{c^2 t_1^2}{18}\left[\sum F_K - (6-2n) F_A + 3F_T\right],$$

где суммирование распространяется на вершины сетки, соседние с A в плоскости $t = 0$. Находим также

$$\left(\frac{\partial u^*}{\partial t}\right)_T = \frac{c^2 t_1^2}{4}\left[\sum F_K - (2n-2) F_A + 2F_T\right].$$

Если $F = \text{const}$, то $u^* = \frac{1}{2} c^2 t_1^2 F$, что является точным значением. Не исключается возможность наличия в уравнении переменных коэффициентов, зависящих от функции u или ее первых производных. В этом случае интервал изменения t выбирается столь малым, чтобы внутри него можно было считать коэффициенты постоянными. По замечанию автора, практика вычислений показывает, что совершаемая при этом ошибка оказывается, в общем, мало чувствительной.

Ю. Ф. Харкеевич

5178. Границы погрешности при итерационном решении интегральных уравнений Фредгольма. Р о л л (Error bounds for iterative solutions of Fredholm integral equations. R a l l L. B.), Pacif. J. Math., 1955, 5, Suppl. № 2, 977—986 (англ.)

На основании общих теорем о решении линейных уравнений в линейных нормированных пространствах, автор устанавливает границы погрешности при итерационном решении интегральных уравнений Фредгольма второго рода классическим методом Неймана, а также методами Виарда, Бюкнера (Bückner H., Die praktische Behandlung von Integralgleichungen, Berlin, 1952, 68—71) Вагнера (Wagner C., J. Math. and Phys., 1951, 30, 23—30) и Самюэлсона (РЖМат, 1953, 275). Кратко изложены основные понятия линейного функционального анализа. Имеются числовые примеры. Библ. 12 назв.

К. Н. Юрчук

5179. О численном решении некоторых нелинейных интегральных уравнений. М и л л е р (A note on the numerical solution of certain non-linear integral equations. M i l l e r G. F.), Proc. Roy. Soc., 1956, **A236**, № 1207, 529—534 (англ.)

Рассматриваются приемы численного решения двух нелинейных интегральных уравнений

$$x^2 = \int_0^x \frac{f(y)\, dy}{\{1 + f(x) - f(y)\}^{1/2}} \quad (1)$$

и

$$x^2 = \int_0^x \frac{\{g(y)\}^{1/2} dy}{\{1 + g(x) - g(y)\}^{1/2}} \quad (2)$$

(при условии $f(\infty) = 0$ и $g(\infty) = 0$), встречающихся в некоторых исследованиях по прикладной гидродинамике.

Детально описано решение уравнения (1). 1) Для $0 < x \leqslant 1/2$ предлагается итерационный процесс путем численного интегрирования дифференциального уравнения, к которому сводится интегральное уравнение (1) дифференцированием по верхнему пределу. Для численного интегрирования используется метод II Фокса и Гудуина (Fox L., Goodwin E. T., Proc. Cambridge Philos. Soc., 1949, 45, 373—388); 2) Числовые значения $f(x)$ для $0{,}5 < x \leqslant 1{,}15$ определяются шаг за шагом, по уже известным значениям, числен-

ным интегрированием и, обратной интерполяцией по Эверетту. 3) Наконец, при $x > 1{,}15$ значения $f(x)$ можно вычислять по асимптотической формуле вида

$$f(x) \approx Ae^{-kx^2},$$

где A и K — положительные постоянные.

Приведены таблицы значений $f(x)$ и $g(x)$ для $x = 0\,(0{,}02)\,1{,}50$ с тремя знаками после запятой.

К. Н. Юрчук

5180. Оценка погрешностей при вычислении собственных значений симметричных интегральных уравнений. **В и л а н д т** (Error bounds for eigenvalues of symmetric integral equations. W i e l a n d t H e l m u t), Proc. Sympos. Appl. Math., 6, New York—Toronto—London, 1956, 261—282 (англ.)

Пусть дано интегральное уравнение

$$ky(x) = \int_0^1 K(x, t)\, y(t)\, dt, \qquad (1)$$

где $K(x, t)$ — эрмитовское ядро. Если решать уравнение (1) методом замены интеграла по какой-либо квадратурной формуле $Sf = \sum_{k=1}^{n} p_k f(x_k)$, где $p_k \geqslant 0$ и $\sum_{k=1}^{k} p_k = 1$, так что $\int_0^1 f(x)\, dx \approx Sf$, тогда данное интегральное уравнение можно приближенно заменить системой линейных алгебраических уравнений $ky(x_p) \approx \sum_{m=1}^{n} p_m K(x_p, x_m)\, y(x_m)$ $(p = 1, 2, \ldots, n)$. При этом собственные числа k ядра $K(x, t)$, как известно, приближенно будут равны собственным числам матрицы $K^s = [K(x_p, x_m)\, p_m]$. Автором дается оценка погрешности при вычислении собственных значений k ядра $K(x, t)$ указанным выше способом.

По теореме Вейля имеем

$$|k_\rho - g_\rho^S| \leqslant \|K - G\| \quad (\rho = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots),$$

где $k_1 \geqslant k_2 \geqslant \ldots \geqslant 0$; $k_{-1} \leqslant k_{-2} \leqslant \ldots < 0$ есть собственные значения эрмитовского ядра или матрицы K, g_ρ — собственные значения эрмитовского ядра G или матрицы того же порядка, что и K, пронумерованные так же как и K_ρ, причем $\|A\|$ есть наибольшее по модулю собственное число матрицы A (или ядра A). На основе этого свойства автор доказывает ряд теорем; приведем одну из них.

Условимся ядро $K(x, t)$ называть допускающим преобразование S, если $k_\rho^S = k_\rho$, где k_ρ^S есть собственные значения матрицы K^s, а k_ρ — собственные значения ядра $K(x, t)$. Тогда легко доказывается следующее соотношение:

$$|k_\rho - k_\rho^S| \leqslant \|K - G\| + \|K^S - G^S\|, \qquad (2)$$

где G — эрмитовское ядро, допускающее преобразование S. Здесь ядро G является вспомогательным. Автор указывает метод построения вспомогательного ядра для данного ядра $K(x, t)$ и преобразования S. Рассмотрим на примере квадратурной формулы прямоугольников, как это делается и как из соотношений (2) получаются оценки погрешности для собственных значений. Вспомогательное ядро $G(x, t)$, допускающее преобразование S, будет

$$G(x, t) = \sum_{m,\, k=1}^{n} K(x_m, x_k)\, g_m(x)\, g_k(t),$$

где

$$g_k(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } (k-1)/n \leqslant x < k/n, \\ 1, \text{ если } k = n, \text{ а } x = 1, \\ 0 \text{ во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Легко проверить также, что $\overline{G(x, t)} = G(t, x)$. Очевидно, что в данном случае $G(x_m, x_k) = K(x_m, x_k)$; поэтому матрица $K^S - G^S = 0$ и $\|K^S - G^S\| = 0$.

Пусть, например, данное ядро $K(x, t)$ удовлетворяет условию Липшица

$$\left|K(x, t) - K\left(\frac{m}{n}, \frac{k}{n}\right)\right| \leqslant L\left(\left|x - \frac{m}{n}\right| + \left|t - \frac{k}{n}\right|\right),$$

где $L = \text{const}$; тогда $|K(x, t) - G(x, t)| \leqslant LP(x, t)$, где $P(x, t) = p(x) + p(t)$, причем $p(x) = x - \frac{m}{n}$, если $\frac{m}{n} \leqslant x < \frac{m+1}{n}$, а тогда $\|K - G\| \leqslant L\|P\|$.

Собственные значения ядра $P(x, t)$ легко найти исходя из вида этого ядра; это будут корни квадратного уравнения

$$\left[p - \int_0^1 p(x)\, dx\right]^2 - \int_0^1 [p(x)]^2\, dx = 0,$$

откуда $p_{1,2} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ и $\|P\| = \frac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}}{n} < \frac{1{,}08}{n}$

и мы получим оценку, пользуясь (2): $\left|k_\rho - k_\rho^S\right| \leqslant L\|P\|$ или $\left|k_\rho - k_\rho^S\right| \leqslant \frac{L \cdot 1{,}08}{n}$.

Далее в работе строятся подобные оценки для квадратурных формул трапеций, Симпсона, Гаусса. Рассматривается пример ядра вида $K(x, t) = K_1(x - t) + K_2(x + t)$ и некоторые другие примеры, даются оценки погрешностей при вычислении собственных значений указанным выше способом. Делаются некоторые обобщения.

Н. П. Сергеев

5181. О двух приемах приближенного вычисления собственных значений и собственных векторов. **П у г а ч е в Б. П.,** Докл. АН СССР, 1956, 110, № 3, 334—337

Исследуются два приближенных метода (предложены М. А. Красносельским, РЖМат, 1957, 1841) определения спектра ограниченного положительно определенного самосопряженного оператора A в вещественном гильбертовом пространстве. Последовательные приближения, начиная с произвольного элемента x_0, строят по формулам

$$x_{k+1} = x_k - \alpha \frac{(\Delta_k, \Delta_k)}{(A\Delta_k, \Delta_k)} \Delta_k,$$

$$\Delta_k = Ax_k - \mu_k x_k, \quad \mu_k = \frac{(Ax_k, x_k)}{(x_k, x_k)}.$$

Здесь $\alpha = 1$ (первый метод) или $\alpha = 2$ (второй метод). Пусть нижняя граница λ_1 оператора A есть изолированная точка спектра и P_1 — оператор проектирования в соответствующее собственное подпространство. Если $P_1 x_0 \neq 0$, то $\mu_k \to \lambda_1$ и $x_k / \|x_k\| \to P_1 x_0 / \|P_1 x_0\|$. Сходимость со скоростью геометрической прогрессии, для знаменателя которой при $\alpha = 1$ приводятся оценки. При $\alpha = 2$ для матриц конечного порядка величины $\Delta_k / \|\Delta_k\|$ при некоторых условиях сходятся к собственному вектору, отвечающему наибольшему собственному числу. Приведены также оценки для метода нормальных хорд (РЖМат, 1955, 4709). Указанные выше методы сравниваются с методом наискорейшего спуска, исследованным Л. В. Канторовичем (Успехи матем. наук, 1948, 3, № 6) и референтом (Зап. Ленингр. горн. ин-та, 1952,

27, № 1) в случае вполне непрерывных операторов. Автор указывает, что метод наискорейшего спуска сходится для всякого ограниченного самосопряженного оператора, нижняя граница которого есть изолированная точка спектра. Доказательства отсутствуют. М. Ш. Бирман

5182. **Замечание о численном интегрировании с неравномерным подразделением и о вычислении криволинейных интегралов. Эльтерман** (Ein Beitrag zur numerischen Integration bei nicht gleichabständigen Abszissen und zur Berechnung von Kurvenintegralen. Eltermann Heinz), Z. angew. Math. und Mech., 1953, **33**, № 8/9, 254—255 (нем.)

Рассматривая переменную интегрирования x как функцию параметра t

$$J = \int_a^b f(x)\,dx = \int_{\bar t}^{\bar t} f(x(t))\,\frac{dx}{dt}\,dt$$

и вводя линейные комбинации

$$\bar f(t) = \sum_0^n \bar f_\nu \varphi_\nu(t), \quad x(t) = \sum_0^n x_\mu \Psi_\mu(t),$$
$$\frac{dx}{dt} = \sum_0^n x_\mu \Psi'_\mu(t),$$

где $\varphi_\nu(t_\nu) = \Psi_\nu(t_\nu) = 1$, $\varphi_\nu(t_\mu) = \Psi_\nu(t_\mu) = 0$ для $\nu \neq \mu$, автор получает приближенное значение для J в виде

$$\bar J = \int_{\bar t}^{\bar t} \bar f(t)\,x'(t)\,dt = \sum_0^n f_\nu g_\nu,$$

$$g_\nu = \sum_0^n g_{\nu\mu} x_\mu, \quad g_{\nu\mu} = \int_{\bar t}^{\bar t} \varphi_\nu(t)\,\Psi'_\mu(t)\,dt.$$

Приводятся примеры для $p=1$, $q=1$; $p=2$, $q=1$; $p=1$, $q=2$; $p=2$, $q=2$, где p и q означают степень параболической аппроксимации функций $\bar f(t)$ и $x(t)$ соответственно. В. К. Саульев

5183. **Многогрупповое выравнивание путем последовательных приближений. Чапанов** (Многогрупово изравнение чрез последователни приближения. Чапанов Хр.), Техника, 1956, **5**, № 5, 34—36 (болг.)

Описывается определение поправок при решении систем условных уравнений методом последовательных приближений.

Из системы уравнений поправок

$$a_{j1}v_1 + \ldots + a_{jn}v_n + w_j = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, r) \qquad (1)$$

решается одно, пусть i-е, уравнение

$$i_1 v_1 + i_2 v_1 + \ldots + i_n v_n + w_i = 0, \qquad (2)$$

решение которого имеет вид

$$v_1 = \frac{i_1}{p_1}k, \ \ldots, \ v_n = \frac{i_n}{p_n}k, \qquad (3)$$

где k — корреляты, p — веса.

Подставив найденную из (2), (3) корреляту $k = -w_1 / \left[\frac{ii}{p}\right]$ в (3), получают первичные поправки:

$$v'_1 = -\frac{i_1}{p_1}\frac{w_i}{\left[\frac{ii}{p}\right]}, \ \ldots, \ v'_n = -\frac{i_n}{p_n}\frac{w_i}{\left[\frac{ii}{p}\right]}.$$

Заменяя в уравнении (1) v на $v + v'$, получаем

$$a_{j1}v_1 + \ldots + a_{jn}v_n + w'_j = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, r). \qquad (4)$$

Затем подобным образом решается самостоятельно одно из уравнений (4), которое дает вторичную поправку v'', и т. д. С целью ускорения сходимости выбирается уравнение с большей по абсолютному значению невязкой.

Общий вид поправки определяется по формуле

$$v = v' + v'' + \ldots + v^{(n)}.$$

Вообще описанные операции повторяют до тех пор, пока найденные последующие поправки не будут лежать в пределах точности, обусловленной методом наименьших квадратов, т. е. $[pvv] = \min$. Приведен пример. И. А. Ковалев

5184. **К вопросу решения системы нормальных уравнений методом квадратных корней. Крастиньш А. Ф.**, Latv. lauksaimniecibas akad. raksti, Тр. Латв. с.-х. акад., 1956, вып. 5, 323—328

Приводится схема для решения системы нормальных уравнений методом квадратных корней, а также выводятся формулы, удобные для определения величин, необходимых в геодезической практике (например, обратные веса уравновешенных элементов), если решение проводится методом квадратных корней. Л. М. Голубева

5185. **Метод Банахевича для решения системы линейных уравнений. Петкович** (Banachiewiczeva metoda rješavanja sistema linearnih jednadžbi (Metoda Krakovjana). Petković Veljko), Geod. list, 1956, **10**, № 5—6, 146—152 (сербо-хорв.; рез. франц.)

Рассмотрены теоретические обоснования метода исключения для системы нормальных уравнений, аналогичного методу Банахевича; используются символы Гаусса для того, чтобы увеличить сходство между предлагаемым методом и методом Гаусса. Приведен пример решения системы пяти нормальных уравнений, из которого наглядно видна большая экономичность предлагаемого метода. Е. С. Алексеев

5186. **Приближенные вычисления. Вармус М.** (Calculus of approximations. Warmus M.), Bull. Acad. Polon. Sci., 1956, Cl. 3, 4, № 5, 253—259 (англ.); Бюл. Польской АН, 1956, Отд. 3, 4, № 5, 249—254

Излагается теория, дающая основания алгебры и анализа приближенных чисел. Прежде всего определяется приближенное число $[a, A]$ как замкнутый интервал вещественных чисел x, удовлетворяющих условию $a \leqslant x \leqslant A$. Символ $\overset{b}{B}$ означает интервал $[B-b, B+b]$. Из определения $\overset{a}{A} = \overset{b}{B}$ следует, что $A = B$, $a = b$. Вводится приближенно следующее соотношение: $\overset{a}{A}$ аппроксимирует $\overset{b}{B}$ (символически $\overset{a}{A} \Rightarrow \overset{b}{B}$) означает, что $|b-a| \geqslant |B-A|$. Это позволяет формулировать правила округления и применять их на практике. «Естественные» операции определяются следующим образом: сумма, разность, произведение и частное приближенных чисел α и β представляют собой замкнутые интервалы, составленные соответственно из вещественных чисел $x+y$, $x-y$, xy, x/y, где $x \in \alpha$ и $y \in \beta$. Формулы для выполнения этих операций рассмотрены.

Так как «естественные» операции умножения и деления не дистрибутивны по отношению к сложению и вычитанию и не имеют обратных операций, понятие приближенного числа $[a, A]$ расширяется: число определяется как интервал $[\min(a, A), \max(a, A)]$ и нет необходимости предполагать как прежде $a \leqslant A$ («положительно ориентированный» интервал), а можно счи-

тать $a \geqslant A$ («отрицательно ориентированный» интервал).

«Регулярные» операции суть:

$$\overset{a}{A} \pm \overset{b}{B} = \overset{a \pm b}{A \pm B}, \quad \overset{a}{A} \cdot \overset{b}{B} = \overset{ab}{AB + Ab},$$

$$\overset{a}{A} : \overset{b}{B} = \overset{(aB-Ab)/(B^2-b^2)}{(AB - ab)/(B^2 - b^2)}.$$

Полученное кольцо приближенных чисел имеет в качестве делителя нуля число $\overset{a}{A}$, для которого $|A| = |a|$. Делители нуля не образуют идеала, так как каждое приближенное число является суммой двух делителей нуля.

Каждое приближенное число $\overset{a}{A}$ может быть единственным образом представлено в виде $\overset{o}{A} + a\Lambda$, где $\overset{o}{A}$ изоморфно вещественному числу A и $\Lambda = o^1$, $\Lambda^2 = 1$. Аналогия с комплексными числами имеет место не только в формальных операциях, но также в геометрическом представлении $\overset{a}{A}$ как точка (A, a) на плоскости: $\overset{u}{A} = \rho(\operatorname{ch}\psi + \Delta \operatorname{sh}\psi)$, $\rho^2 = A^2 - a^2$. Все «естественные» операции могут быть преобразованы в «регулярные» операции. Норма $\| \overset{u}{A} \| = |A| + |a|$ позволяет ввести сходимость в кольце. Автор также вводит понятия приближенной функции, ее непрерывности, производной и пр.

Автор обещает детально разработать теорию и доказательства данных здесь теорем в более обширной работе. S. Drobot

5187. **Способы вычисления числа π. Ли Чжичан** (零約術計算圓周率的方法。李志昌), 數學通訊, Шусюэ тунсюнь, 1956, № 66, 9—12 (кит.)

Рассматриваются четыре способа приближенного вычисления числа π при помощи рациональных дробей.

5188. **Приближение функций для вычислительных машин. Лангдон** (Approximating functions for digital computers. Langdon Lyle R.), Industr. Math., 1955, 6, 79—100 (англ.)

Рассматривается 28 формул для вычисления элементарных и некоторых других трансцендентных функций с помощью рядов, разработанных специально для использования на цифровых машинах. Особое внимание уделяется ускорению сходимости.

Одним из способов улучшения сходимости явилась модификация разложения функций в ряд Тейлора по степеням $x - a$ с использованием значений производных функции не только в точке a, но и в точке x. На этом пути получены дробно-рациональные приближения для функций $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\cos x$, e^x и x^q, где $q < 1$.

Сходимость быстро сходящихся рядов улучшается применением многочленов Чебышева. Приведены коэффициенты получающихся степенных рядов для функций $\sin x$, $\ln x$, $\operatorname{arc\,tg} x$; при этом для $\operatorname{arc\,tg} x$ предварительно производится дробно-линейная замена переменного. Ускорение сходимости ряда, вычисляющего $\arcsin x$, достигается использованием формулы

$$\arcsin x = \frac{(n-1)\pi}{2n} + \frac{1}{n} \arcsin T_n(x),$$

где $2^{1-n} T_n(x)$ — многочлен Чебышева n-й степени.

В заключение приводятся коэффициенты степенных рядов для вычисления функции ошибки $H(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2} dx$ и некоторых комбинаций гиперболических и тригонометрических функций. Почти во всех формулах количество приводимых коэффициентов позволяет вычислять функции с абсолютной ошибкой, меньшей 10^{-8}. А. П. Ершов

5189. **Итерационный процесс для вычисления временной характеристики разложением в степенной ряд. Флеммиг** (Iterative procedure for evaluating a transient response through its power series. Flemming D. P.), Math. Tables and other Aids Comput., 1956, 10, № 54, 73—81 (англ.)

Рассматривается следующий итерационный процесс для вычисления коэффициентов a_j разложения в степенной ряд временной характеристики:

$$F(t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \frac{t^j}{j!}, \tag{1}$$

если известно ее изображение посредством преобразования Лапласа

$$\int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt = \overline{F}(s) =$$

$$= \frac{A_0^0 S^{N-1} + A_1^0 S^{N-2} + \ldots + A_{N-2}^0 S + A_{N-1}^0}{S^N + b_1 S^{N-1} + b_2 S^{N-2} + \ldots + b_{N-1} S + b_N},$$

$$\begin{aligned} a_0 &= A_0^0 \\ a_1 &= A_1^0 - a_0 b_1 \\ a_2 &= A_2^0 - a_0 b_2 - a_1 b_1 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_j &= A_j^0 - \sum_{k=0}^{j-1} a_k b_{j-k} \quad (j = 0, 1, 2, 3, \ldots) \end{aligned} \tag{2}$$

(соотношения (2) пишутся здесь в более удобной, чем у автора, для вычислений форме).

Дается оценка числа членов ряда (1), обеспечивающих определенную точность при заданном t. Приведены два числовых примера.

Несмотря на медленную сходимость ряда (1), рассматриваемый итерационный метод может иметь практическое значение при работе на современных быстродействующих вычислительных устройствах. К. Н. Юрчук

5190. **Методы Монте-Карло. Бауккарт** (Les méthodes de Monte Carlo. Bouckaert Louis), Rev. questions scient., 1956, 17, juillet, 344—359 (франц.)

Популярное описание известных способов решения некоторых задач методами Монте-Карло. Рассматриваются следующие вопросы: задача Бюффона об определении числа π, диффузия нейтронов через плоский слой вещества, решение уравнения

$$\partial u^2/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2 + g(x,y)\, u = 0$$

с краевыми условиями первого рода и обращение матриц. Автор указывает, что обычно методы Монте-Карло не могут выдержать конкуренцию с известными численными методами. В. Я. Евфанов

5191. **История, современное состояние и перспективы прогноза погоды. Флон** (Entwicklung, Stand und Aussichten einer mathematischen Wettervorhersage. Flohn Hermann), Phys. Bl., 1956, 12, № 10, 442—452 (нем.)

Описаны основные этапы развития проблемы предсказания погоды, а также соответствующие идеи и методы решения этой задачи на каждом этапе. Дается критический обзор различных современных направлений исследований по численным методам прогноза. Современное состояние численных методов прог-

ноза погоды автор сравнивает с состоянием небесной механики во времена Кеплера. Вместе с тем, высказана уверенность в том, что современной метеорологии для перехода от первых опытов по предсказанию метеорологических элементов к надежному прогнозу погоды потребуется промежуток времени, значительно меньший, чем это было необходимо небесной механике, прошедшей путь от Кеплера до наших дней.

Статье предпослано краткое сообщение о состоявшейся в мае 1956 г. во Франкфурте-на-Майне конференции по численным методам прогноза погоды. В конференции участвовали представители 12 зарубежных стран.

С. Л. Белоусов

5192. **Определение пределов при помощи номограмм. Бонфильоли** (Determination of limits by nomographic charts. Bonfiglioli Luisa), Riveon lemat., 1954, 8, 33—40 (иврит, рез. англ.)

5193. **Стандартизация проективных преобразований. Липатова Д. Л., Джемс-Леви Г. Е.,** Уч. зап. Моск. ун-та, 1956, вып. 181, 235—240

Рассматривается вопрос о вычислении коэффициентов проективного преобразования номограмм. Рекомендуется для удобства определенная схема проведения расчетов.

П. В. Николаев

5194. **Номограмма для интегрального закона распределения Стьюдента. Джемс-Леви Г. Е.,** Теория вероятностей и ее применения, 1956, 1, № 2, 272—274 (рез. англ.)

Рассматривается построение предложенной автором приближенной створной номограммы уравнения

$$p=\frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi s}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\int_{-\infty}^{t}\left(1+\frac{t^2}{s}\right)^{-\frac{s+1}{2}}dt.$$

Вкратце излагается рекомендуемый автором метод приближенного номографирования, основанный на замене заданной поверхности $z=F(x, y)$ номографируемой поверхностью, совпадающей с заданной на контуре координатного прямоугольника и в одной из точек вне этого контура.

П. В. Николаев

5195. **Об одном приборе для приближенного номографирования. Крейнес М. А., Вайнштейн И. А., Айзенштат Н. Д.,** Докл. АН СССР, 1956, 110, № 6, 922—925

Рассматривается в квадрате D_{xy} непрерывная функция $z=f(x, y)$, строго монотонная по каждой из переменных x и y при постоянной другой. С помощью вводимого понятия ε-схемы функции дается достаточное условие существования непрерывной номографируемой функции $N(x, y)$, в D_{xy}, удовлетворяющей при заданном $\varepsilon>0$ неравенству $|f(x, y)-N(x, y)|<\varepsilon$. Описывается прибор, позволяющий в ряде случаев по функции $z=f(x, y)$ строить створную номограмму функции $z=N(x, y)$.

П. В. Николаев

5196 К. **Номографические вспомогательные средства. Кунц** (Nomographische Hilfsmittel bei der Errechnung von Hauptzeiten maschineller Arbeiten. Kunz J. München, Hanser, 1956, 50 S., 10.80 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1956, A, № 48, 3435 (нем.)

5197 К. **Номография. Отто** (Nomografia. Otto Edward. Warszawa, Panstw. Wydawn. Nauk, 1956, 220 S., 17,40 zł.) (польск.)

Согласно тому, что пишет автор в предисловии, книга предназначена для первого изучения номографии и таким образом исключает слишком трудные проблемы, хотя она содержит некоторые теоретические информации.

В гл. 1 автор вводит элементарные понятия проективной геометрии и исчисления матриц. В гл. 2, после рассмотрения графиков функций от одной переменной, автор вводит понятие функциональной шкалы, рассматривая три главных типа: регулярные, логарифмические и проективные. Первые две главы имеют вводный характер и дают читателю информацию, необходимую и достаточную для овладения практической номографией. Гл. 3 «Уравнения с тремя переменными» есть главная часть книги. Расположение материала этой главы дидактическое. После обсуждения номограмм с тремя параллельными шкалами для уравнений вида $f_1(u)+f_2(v)+f_3(w)=0$ и с тремя прямолинейными шкалами, проходящими через одну точку, для уравнений вида

$$\frac{1}{f_1(u)}+\frac{1}{f_2(v)}+\frac{1}{f_3(w)}=0$$

автор рассматривает номограммы типа буквы N для уравнений вида $f_1(u)f_2(v)=f_3(w)$ и номограммы со шкалами на сторонах треугольника для уравнений вида $f_1(x)f_2(y)f_3(z)=1$ и затем дает общую характеристику номограмм с тремя прямолинейными шкалами. Далее, он вводит понятия криволинейной шкалы, номограмм с криволинейными шкалами и детально обсуждает четыре основные канонические формы:

Коши: $f_1(x)g_3(z)+f_2(v)h_3(z)+1=0$,

Клярка: $f_1(x)f_2(y)g_3(z)+[f_1(x)+f_2(y)]h_3(z)+1=0$,

Соро: $f_1(x)=[f_2(y)+f_3(z)]/[g_2(y)+g_3(z)]$,

Соро: $\dfrac{f_1(x)+f_2(y)}{g_1(x)+g_2(y)}=\dfrac{f_1(x)+f_3(z)}{g_1(x)+g_3(z)}$.

В этой же главе рассматриваются сетчатые номограммы. В гл. 4 обсуждаются номограммы с бинарным полем; транспарантные номограммы не рассмотрены. В гл. 5 «Проблемы теоретической номографии» автор объясняет метод Массо преобразования уравнений к форме Соро и обсуждает в связи с этим криволинейные номограммы для уравнений

$$f_1(u)f_2(v)f_3(w)=1,\quad f_1(u)+f_2(v)+f_3(w)=0,$$

$$f_1(u)f_2(v)f_3(w)=f_1(u)+f_2(v)+f_3(w),$$

а затем вводит понятие номографического порядка. Более детально автор останавливается на уравнениях третьего и четвертого номографического порядков, доказывая при этом некоторые известные предложения, например, что каждое уравнение четвертого номографического порядка может быть сведено к канонической форме Клярка или Коши.

Обсуждаются подробно методы построения и преобразования номограмм, приведены многочисленные примеры; каждая глава снабжается упражнениями.

M. Warmus

5198 К. **Принципы и методы прикладной математики. Фридман** (Principles and techniques of applied mathematics. Friedman Bernard. New York, Wiley, London, Chapman and Hall, 1956, IX, 315 pp., ill., 64 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1956, № 358, 11 (англ.)

ТАБЛИЦЫ

5199. **Таблица** $f_n(x)=\dfrac{n!}{(x/2)^n}J_n(x)$ $\left(\text{Table of } f_n(x)=\dfrac{n!}{(x/2)^n}J_n(x)\right)$, Nat. Bur. Standards Appl. Math. Ser., 1954, № 37, 41—56 (англ.)

Перепечатано из J. Math. and Phys., 1944, 23, № 1.

5200. Таблица $Ji_0(x)=\int_x^\infty \frac{J_0(t)}{t}dt$ и ей родственных функций. Лоуан, Бланч, Абрамович (Table of $Ji_0(x)=\int_x^\infty \frac{J_0(t)}{t}dt$ and related functions. Lowan Arnold N., Blanch G., Abramowitz M.), Nat. Bur. Standards Appl. Math. Ser., 1954, № 37, 33—39 (англ.)
Перепечатано из J. Math. and Phys., 1943, 22, № 2.

5201. Нули производных функций Бесселя дробного порядка. Солзер (Zeros of the derivative of Bessel functions of fractional order. Salzer Herbert E.), Nat. Bur. Standards Appl. Math. Ser., 1954, № 37, 207—208 (англ.)
См. РЖМат, 1953, 922.

5202. Комплексные нули функций $Y_0(z)$, $Y_1(z)$ и $Y_1'(z)$. Хилман, Шерман (Complex zeros of $Y_0(z)$, $Y_1(z)$ and $Y_1'(z)$. Hillman Abraham, Sherman Iva), Nat. Bur. Standards Appl Math. Ser., 1954, № 37, 209—210 (англ.)
Перепечатано из Math. Tables and other Aids Comput., 1949, 3, № 25.

5203. Нули некоторых функций Бесселя дробного порядка. Абрамович (Zeros of certain Bessel functions of fractional order. Abramowitz Milton), Nat. Bur. Standards Appl. Math. Ser., 1954, № 37, 203—204 (англ.)
Перепечатано из Math. Tables and other Aids Comput., 1945, 1, № 9.

5204. Большие нули некоторых функций Бесселя дробного порядка (More zeros of certain Bessel functions of fractional order), Nat. Bur. Standards Appl. Math. Ser., 1954, № 37, 205—206 (англ.)
Перепечатано из Math. Tables and other Aids Comput., 1946, 2, № 15.

5205. Корни уравнения sin z-z. Хилман, Солзер (Roots of sin z-z. Hillman A. P., Salzer H. E.), Nat. Bur. Standards Appl. Math. Ser., 1954, № 37, 211 (англ.)
Перепечатано из Philosophical Mag., 1943, 34, № 235.

5206. Небольшая таблица первых пяти нулей трансцендентного уравнения $J_0(x)Y_0(kx)-J_0(kx)Y_0(x)=0$. Лоуан, Хилман (A short table of the first five zeros of the transcendental equation $J_0(x)Y_0(kx)-J_0(kx)Y_0(x)=0$. Lowan A. N., Hillman A.), Nat. Bur. Standards Appl. Math. Ser., 1954, № 37, 201—202 (англ.)
Перепечатано из J. Math. and Phys., 1943, 22, № 4.

5207. Таблица нулей полиномов Лежандра 1—16 порядков и весовых коэффициентов для формулы механических квадратур Гаусса. Лоуан, Дейвидс, Левенсон (Table of the zeros of the Legendre polynomials of order 1—16 and the weight coefficients for Gauss' mechanical quadrature formual. Lowan Arnold N., Davids Norman, Levenson Arthur), Nat. Bur. Standards Appl. Math. Ser., 1954, № 37, 185—189 (англ.)
Перепечатано из Bull. Amer. Math. Soc., 1942, 48, № 10, 739—743.

5208. Таблица нулей и весовых множителей первых пятнадцати полиномов Лагерра. Солзер, Зуккер (Table of the zeros and weight factors of the first fifteen Laguerre polynomials. Salzer Herbert E., Zucker Ruth), Nat. Bur. Standards Appl. Math. Ser., 1954, № 37, 191—199 (англ.)
Перепечатано из Bull. Amer. Math. Soc., 1949, 55, № 10, 1004—1012.

5209. Таблица функций Струве $L_\nu(x)$ и $H_\nu(x)$. (Table of the Struve functions $L_\nu(x)$ and $H_\nu(x)$), Nat. Bur. Standards Appl. Math. Ser., 1954. № 37, 113—119 (англ.)
Перепечатано из J. Math. Phys., 1946, 25, № 3.

5210. Таблица коэффициентов Фурье. Лоуан, Лейдерман (Table of Fourier coefficients. Lowan Arnold N., Laderman Jack), Nat. Bur. Standards Appl. Math. Ser., 1954, № 37, 121—132 (англ.)
Перепечатано из J. Math. Phys., 1943, 22, № 3.

5211 К. Руководство по пятизначным логарифмам с приложением в топографии и финансовой математике. Ланца (Manuale logaritmico a cinque decimali per le applicazioni della topografia dell èstimo e della matematica finanziaria. 5 ed. contenente. Lanza Lorenzo. Torino, G. B. Paravia e C., 1955, Vol. 1, Tavole logaritmiche dei numeri, tavole delle funzioni di angoli sessagesimali e centesimali, tavole aritmetiche, tavole per le curve circolari, XV, 368 p. Fasc. Spiegazione ed uso delle tavole contenute nel «Manuale logaritmico a cinque decimali» di L. L., p. 369—478), Bibliogr. ital., 1956, 90, № 660—663, 183 (итал.)

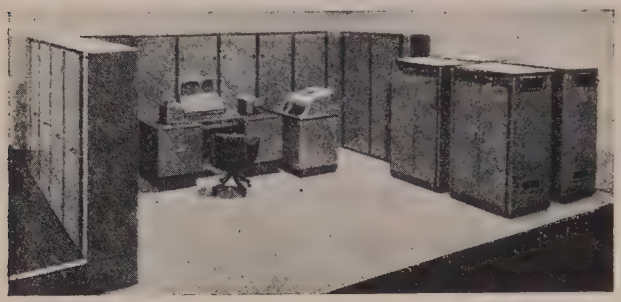
5212 К. Математические и физические таблицы для девятого — одиннадцатого классов. 4-е изд. Сост. Груша, Валоух, Беларж, Главичка, Мадар, Пирко, Шолер, Шпачек (Matematické a fysikální tabulky pro devátý až jedenáctý postupný ročnik. 4 vyd. Sest. Hruša Karel, Valouch Miroslav, Bělař Antonin, Hlavička Alois, Madar Jindřich, Pirko Zdeněk, Šoler Kliment, Špaček Miroslav. Praha, Statni pedagogicke nakladatelstvi, 1955, 81, 2 str., 4, 25 Kčs), Bibliogr. katalog ČSR. České knihy, 1955, № 32, 811 (чеш.)

См. также: 4865 Д.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ

5213. Универсальная вычислительная машина «Меркурий» (Computers «off the Peg».—), Engineering, 1956, 182, № 4728, 489—490 (англ.)
Сообщается, что фирма «Ферранти» (Ferranti) начала выпуск вычислительных машин «Пегас» (Pegasus) и «Меркурий» (Mercury). Приводятся некоторые сведения о машинах. Более подробно описан «Меркурий». (см. фото). Машина работает по системе с плавающей запятой, со средним временем выполнения арифметических операций 180 мксек. Оперативное быстродействующее запоминающее устройство — на ферритах, объемом 1024 десятизначных числа. Дополнительное запоминающее устройство — на 4 магнитных барабанах, объемом около 16 000 чисел; барабаны расположены вертикально, каждый в отдельном шкафу; эти шкафы видны справа на фиг. Ввод с перфоленты со скоростью 400 знаков в 1 сек. Разрабатывается вводное устройство, считывающее 1500 знаков в 1 сек. с остановкой ленты в течение времени меньшего, чем нужно для достижения следующего знака. Скорость

протяжки перфоленты в этом устройстве будет составлять около 4 *м*/сек. Данные выводятся на перфоленту со скоростью 50 знаков в 1 сек.



К реф. 5213

5214. **Электронная вычислительная машина в расчете авиационных конструкций. Часть II. Использование предписанных и программных параметров в матричной интерпретирующей схеме и их применение к общим программам расчета методом сил. Хант** (The electronic digital computer in aircraft structural analysis. Part II. The use of preset and programme parameters with the matrix interpretive scheme and their application to general purpose programmes for the force method of analysis. Hunt P. M.), Aircraft Engng, 1956, 28, № 326, 111—118 (англ.)

Продолжение статьи, посвященной применению матричной интерпретирующей схемы, разработанной для вычислительной машины Ферранти «Пегас» (РЖМат, 1957, 1875). В части II описывается способ, позволяющий в матричных псевдокомандах вместо указания размерности матриц и их положения в запоминающем устройстве ставить адреса ячеек, в которых хранятся эти характеристики в качестве «предписанных параметров». Возможность комбинировать матричные псевдокоманды с обычными машинными командами, а также производить переадресацию матричных команд в соединении с методом предписанных параметров позволяет построить общую программу расчета, не зависящую от конкретного вида конструкции и заданных нагрузок. Описывается вычислительная процедура общего расчета произвольной конструкции методом сил и приводится соответствующая программа. А. П. Ершов

5215. **Электронная вычислительная машина в расчете авиационных конструкций. Часть III. Общие программы расчета больших конструкций методами сил и смещений, использующие запоминающее устройство на магнитной ленте. Хант** (The electronic digital computer in aircraft structural analysis. Part III. General purpose programmes for the force and displacement methods in large structures including the use of magnetic tape storage. Hunt P. M.), Aircraft Engng, 1956, 28, № 327, 155—165 (англ.)

Окончание цикла статей автора (РЖМат, 1957, 1875, 5214). В части III описываются вычислительные процедуры расчета методом сил и полного расчета конструкции методом смещений при условии разбиения матриц на клетки. Для обоих расчетов подностью приведены соответствующие матричные программы. Программы составлены для вычислительной машины «Пегас».

В заключение приводится пример полного расчета дельтовидного крыла. Время решения задачи потребовало 180 час. работы машины. Большая часть времени была потрачена на перфорацию и последующее считывание промежуточных результатов, что было вызвано малой емкостью внутреннего запоминающего устройства и отсутствием магнитной ленты.

Примечание референта. В противоречии с заголовком статьи приведенные программы не используют магнитную ленту, так как машина «Пегас» ее не имеет. В отношении магнитной ленты высказаны лишь рекомендации о полезности ее использования и приводится предлагаемый вид матричных команд обращения к магнитной ленте. А. П. Ершов

5216. **Использование электронных вычислительных машин при проектировании оптических систем. Блэк** (Use of electronic digital computers in optical design. Black Gordon), Nature, 1955, 175, 164—165 (англ.)

В Англии и США используются электронные вычислительные машины для определения пути луча в оптических системах. Наличие большого объема внешнего запоминающего устройства машин позволяет проводить широкие численные исследования, касающиеся систем линз.

На машине Манчестерского университета проблема оптических конструкций рассматривалась как задача минимизации некоторой функции φ, зависящей от конструктивных параметров системы. Эта задача неполностью обусловлена и нелинейна, но менее обширна, чем общая проблема, поскольку рассматриваемая n-мерная поверхность имеет определенные известные свойства благодаря ее оптической природе. Функция φ строится суммированием квадратов максимумов модулей аберрационных отклонений с соответствующими весовыми множителями.

К настоящему времени на машинах были выполнены несколько различных процессов минимизации:

а) Минимизация переменной за переменной. Здесь переменные берутся поодиночке и подгоняются для получения минимума φ. Такой способ минимизации выполняется очень быстро (подгонка кривизн поверхностей в линзе «Тессар» была выполнена за 20 мин машинного времени).

б) Способ заключается в том, что всем переменным параметрам придаются некоторые приращения. При этом вся система получает «толчок» в определенном направлении. Приращения переменных определяются так, чтобы изменение системы шло в желаемом направлении.

в) Случайные операции. При использовании определенных логических команд возможно добавление (вычитание) приращения к совершенно случайно выбранным переменным. Если значение φ уже мало, то общая тенденция этого случайного процесса — возрастание φ. Н. П. Трифонов

5217. **Опыт работы на машине ЭДСАК. Уилкс** (Expériences d'opérations effectuées avec l'E. D. S. A. C. Wilkes M. V.), Colloq. internat. Centre nat. rech. scient., 1953, 37, 307—318, Discuss. 347—354 (франц.)

В докладе освещается система кодирования задач и их решения, а также методика использования библиотеки подпрограмм, разработанные в Лаборатории математики Кембриджского университета для машины ЭДСАК (EDSAC). Команды кодируются на перфоленте в следующем порядке. Сначала пробивается код операции, затем десятичный адрес числа и, наконец, код, обозначающий конец адреса с изменяемой по количеству цифр длиной, в связи с тем, что нули, следующие за первой значащей цифрой, не перфорируются.

Рассматриваются система изменения адресов, параметры подпрограмм и их назначение (тригонометрические функции, квадратурные формулы и др.). Интерпретативные программы облегчают работу с подпрограммами. Даны некоторые методы устранения ошибок в программах и сведения об общей организации работы на машине. Е. М.

5218. **Воинская вычислительная машина сокращает военные расходы. Китченс** (Army computer reduces military survey calculations. Kitchens Clarence W.), Industr. Labs, 1955, 6, № 11, 58—59 (англ.)

Описывается малая универсальная вычислительная машина Монробот V. Машина более всего приспособлена для выполнения специализированных вычислений из области, например, геодезии, геологии и т. п. (вычисление азимута, преобразование координат). Арифметический блок оперирует с 20-значными десятичными числами с фиксированной запятой между 10 и 11 разрядами. Машина работает по четырехадресной системе и может выполнять 12 различных операций. Запоминающее устройство машины выполнено на магнитном барабане емкостью 100 20-разрядных десятичных чисел с алгебраическими знаками и 200 команд. Размеры барабана: длина 500 *мм*, диаметр 150 *мм*, скорость вращения 3600 об/мин. Размеры машины 180×117×45 *см*, вес 600 *кг*, потребление энергии 5 *ква*. В машине использовано около 700 ламп и диодов. Подчеркивается простота эксплуатации машины.

Г. К. Кузьминок

5219. **Оптимальное кодирование данных для цифровых вычислительных машин. Кауц** (Optimized data encoding for digital computers. Kautz W. H.), Convent. Rec. I. R. E., 1954, 4, 47—57 (англ.)

Кратко поясняются основные принципиальные результаты Шеннона и Хэмминга, относящиеся к построению кодов с обнаружением и исправлением ошибок. Отмечаются факторы, ограничивающие применение сложных кодов в вычислительных машинах, ввиду этого упор делается на коды с обнаружением ошибки. Под оптимальным кодом понимается код, удовлетворяющий следующим критериям: 1) код имеет оптимальное количество двоичных разрядов (n), определяемое как минимальное значение n, необходимое для выявления заданного числа обнаруживаемых ошибок и заданного числа исправляемых ошибок (в дальнейшем рассматриваются коды только с обнаружением ошибок), и 2) соответствие между знаками и кодовыми комбинациями выбрано таким, что обеспечивается максимальное различение в определенном смысле. В качестве примеров рассматриваются несколько 4-разрядных кодов для десятичных цифр, 7-разрядный код для кодировки буквенно-цифровой информации, видоизмененный телетайпный код, размещение знаков на колесе и штанге печатающего устройства.

В. И. Смирнов

5220. **Использование последовательности Коробова при работе на математических машинах. Свобода** (Užití Korobovovy posloupnosti u matematických stroju. Svoboda Antonín), Stroje zpracov. inform., 1955, № 3, 61—76 (чеш.; рез. русск., англ.)

Путем преобразования последовательности Коробова (Изв. АН СССР, сер. матем., 1950, 14, № 3, 234), производящего перестановку исходной последовательности, автор получает так называемую расширенную последовательность Коробова. Эта последняя затем используется при проектировании триггерной схемы для магнитного запоминающего устройства на барабане чехословацкой вычислительной машины САПО.

Z. Koutský

5221. **Кодирование и декодирование групп импульсов цепями из пассивных элементов. Блейк** (Pulse group coding and decoding by passive networks. Blake Richard F.), Proc. Nat. Electronics Confer., vol. 8, Chicago, 1953, 760—765 (англ.)

Кодирование рассматривается как превращение одиночного импульса в группы импульсов, отличающихся продолжительностью, временными интервалами или количеством в группе. Обратная операция — декодирование — заключается в образовании простого импульса на выходе при появлении заданной группы на входе системы. Обе операции можно выполнить при помощи цепей, состоящих только из пассивных элементов — линий задержки, сопротивлений и диодов. Для формирования кода использована цепь из последовательно соединенных линий задержки с отводами от каждого соединения. Выходная линия через сопротивления и диоды (для предотвращения обратного прохождения импульсов) соединяется с этими отводами. Для декодирования берутся те же линии задержки, но соединенные в обратном порядке. Выходной сигнал получается от диодной схемы совпадения, объединяющей отводы от линий задержки.

И. В. Лебедев

5222. **Программирование для вычислительных машин. Уэгстейн, Александер** (Programming scientific calculators. Wegstein Joseph H., Alexander Samuel N.), Control Engng, 1956, 3, № 5, 87—92 (англ.)

Подготовка задачи к решению на вычислительной машине состоит из двух основных этапов: приведение задачи к форме, в которой она может решаться на машине, и перевод этой формы на язык, понятный машине. Математик дает задачу программисту, полностью описанную математически. Но, вообще говоря, такая общая постановка непригодна для непосредственного решения на машине. Поэтому программист должен проанализировать задачу с точки зрения численного метода вычислений; привести ее к такой формулировке, чтобы все вычисления реализовались с помощью арифметических операций.

Затем задача представляется в виде блок-схемы, которая переводится на язык машины. Этот перевод делается вручную, хотя для облегчения программирования используются некоторые способы автоматического программирования. Все эти этапы иллюстрируются конкретными примерами. Программирование проводится для машины НОРК.

Н. П. Трифонов

5223. **О логических схемах программ. Ляпунов А. А.**, Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1, М., АН СССР, 1956, 193

Краткое изложение специального аппарата, удобного при описании алгоритма решаемых на цифровых вычислительных машинах задач. Этот аппарат, разработанный автором, дает возможность определенной автоматизации составления программ и служит основой формализации составления программ.

В. И. Смирнов

5224. **Возникновение кода и системы счисления остаточных классов. Валах** (Vznik kodu a číselné soustavy zbytkových tříd. Valach Miroslav), Stroje zpracov. inform., 1955, № 3, 211—245 (чеш.; рез. русск., англ.)

Исходя из требования получения за один такт суммы и произведения целых чисел, автор получает код, названный им кодом H, который удовлетворяет данному требованию. Приводятся схемы, обеспечивающие однотактное выполнение арифметических операций сложения и умножения. Из закономерности строения кода H автор образует специальную систему счисления: систему остаточных классов. Отображение целого числа (в десятичной системе) производится так: Пусть дано $n+1$ целых попарно взаимно простых (соответственно простых) чисел $p_0, p_1, \ldots, p_n$. $P = \prod_{i=0}^{n} p_i$ называется периодом системы остаточных классов. Число A изображается в этой системе в виде числа $(a_0 a_1 \ldots a_n)$, где $a_i\,(i = 0, 1, \ldots, n)$ представляет собой остатки от деления числа A на числа $p_0, p_1, \ldots, p_n$ (основания системы), т. е. $A = a_i \pmod{p_i}$. Если B изображается в виде $(b_0 b_1 \ldots b_n)$, то произведение $A \cdot B = C < P$ можно выполнить на соответственных остатках a_i и b_i, т. е. C изображается в виде $(c_0 c_1 \ldots c_n)$, где $a_i b_i = c_i \pmod{p_i}$. Некоторые операции являются

в этой системе затруднительными: например, операция сравнения двух чисел, перевод в десятичную систему; кроме того, если $C > P$, то возникает неоднозначность.
Z. Koutský

5225. **Однотактные двоичные релейные счетные машины. Свобода** (Reléové jednotaktní dvojkové sčítačky. Svoboda Antonin), Stroje zpracov. inform., 1955, № 3, 297-308 (чеш.; рез. русск., англ.)

Рассматривается однотактное сложение n двоичных чисел. В первой части выводится ряд функций, позволяющих решить, что стоит в k-ом разряде сумматора: 0 или 1. Одновременно на конкретном примере иллюстрируется ход работы машины при однотактном сложении 4 двоичных чисел. На основании этих рассуждений приводится схема соединения однотактной двоичной счетной машины, рассчитанной на четыре числа.
Z. Koutský

5226. **Прибор для получения случайных чисел** (Random number generator), Rev. Scient. Instrum., 1956, 27, № 8, 666—668 (англ.)

Краткое сообщение лаборатории Loyola (Лос-Анжелос, Калифорния) о датчике случайных чисел, основанном на принципе прибора Гальтона. Принцип действия прибора состоит в том, что в поле горизонтально расположенных колышков вводятся шарики из одной точки, расположенной над полем. При этом события, состоящие в том, что шарики выпадают из поля на разных расстояниях от вертикали, опущенной из точки падения, распределены по нормальному закону. Изменяя эффективную глубину поля, можно получить нормальные распределения с различными параметрами, вплоть до почти прямоугольного распределения. Если нужно получить более сложные законы распределения, то шарики вводят из нескольких точек над полем. Для получения случайных чисел используется считывающее устройство, которое регистрирует количество вышеуказанных событий. Приводится фотография прибора.
В. Я. Евфанов

5227. **Выполнение операций цифровой вычислительной машиной и элементы схем** (Computer operation and circuitry), Electr. J., 1956, 156, № 12, 914—917 (англ.)

В простой форме рассмотрены некоторые вопросы работы последовательной вычислительной машины. Подробно разобрано выполнение операции сложения. Приведены схемы для выполнения логических операций: «и», «или», «нет» и блок-схема сумматора, составленная из этих логических элементов. В качестве простейшего запоминающего элемента приведена схема триггера.
А. В. Аваев

5228. **О прокладке проводов матрицы двумерного запоминающего устройства с многократным совпадением токов. Блакман** (On the wiring of two-dimensional multiple-coincidence magnetic memories. Blachman N. M.), IRE Trans. Electronic Comput., 1956, 5, № 1, 19—21, 35 (англ.)

В матрице из $n \times n$ магнитных сердечников, работающей с совпадением p токов (РЖМат, 1956, 4963), провода должны быть проложены таким образом, чтобы через каждый сердечник проходило p проводов и чтобы никакие два провода не были общими для какой-нибудь пары сердечников. Эти требования удовлетворяются, если $2n$ проводов проложить обычным способом по рядам и столбцам матрицы, а остальные $(p-2)n$ проводов расположить в соответствии с размещением элементов в $p-2$ взаимно ортогональных латинских квадратах порядка n (латинский квадрат порядка n содержит n различных элементов, каждый из которых повторяется n раз, но ни в одной строке и ни в одном столбце не встречается дважды; два латинских квадрата называются ортогональными, если при наложении их друг на друга не образуется одинаковых пар элементов). В матрице с совпадением p токов ампервитки, воздействующие на неопрашиваемый сердечник, составляют не более $1/p$ ампервитков, прикладываемых к опрашиваемому сердечнику. Дальнейшее улучшение этого соотношения достигается подачей в невозбуждаемые провода компенсирующего тока, направленного противоположно опрашивающему току. В случае $p = n + 1$ компенсирующий ток в $\frac{1}{n(n+1)}$ опрашивающих ампервитков обеспечивает полную компенсацию м. д. с. в неопрашиваемых сердечниках.
Н. П. Брусенцов

5229. **Регенеративный усилитель на полупроводниковых триодах как элемент вычислительных машин. Чаплин** (The transistor regenerative amplifier as a computer element. Chaplin G. B. B.), Proc. Instn. Electr. Engrs, 1954, Part 3, **101**, № 73, 298—313 (англ.)

Изложен метод проектирования и принципы работы схемы с двумя устойчивыми состояниями на одном полупроводниковом триоде за счет применения положительной обратной связи. Исследуется чувствительность схемы во включенном и выключенном состоянии, в первом случае она ниже, чем во втором, поэтому выключение производится более мощными внешними импульсами или за счет энергии, накопленной в реактивностях схемы. Рассматриваются различные способы включения и выключения (приводятся схемы с положительными и отрицательными выходными сигналами). Исследуется эффект накопления дырок, приводящий к замедлению работы схемы, и методы увеличения быстродействия схемы.

Рассматривается применение регенеративных усилителей в схеме запоминающего элемента с линией задержки на несколько (до 8) цифр, в схеме сдвигающего регистра, в логических схемах «и», «или», «нет», а также в схеме последовательного сумматора (3 триода, 29 диодов), в которой используются также диодные схемы совпадения и смесители. Приведены принципиальные схемы со спецификацией. Схемы работали на основной частоте 125 *кгц*.

Для работы приведенных схем были необходимы достаточно мощные синхронизирующие и стробирующие импульсы, которые вырабатывались при помощи ламповых схем; каждая лампа могла возбудить до 50 полупроводниковых триодов, в то время как аналогичная схема на полупроводниковом триоде могла возбудить только 5 триодов.

Стандартный выходной импульс, низкий выходной импеданс и нужное усиление позволяют рекомендовать разработанные схемы для применения в вычислительных машинах. Быстродействие и достаточная надежность схем получены за счет использования в них источников тока и ограничивающих диодов, т. е. за счет увеличения потребляемой мощности. Надежность самих триодов в отлаженной схеме оказалась достаточно высокой; выход триодов из строя наблюдался при превышении паспортных данных в спроектированной схеме или за счет ошибок в монтаже. Отмечается, что быстродействующее множительное устройство, собранное на этих элементах (около 100 триодов), работало ежедневно в течение четырех месяцев; за это время вышло из строя 2 триода.
В. К. Зейденберг

5230. **Устройство для испытания запоминающего устройства чехословацкой автоматической вычислительной машины САПО. Черный** (Stroj na zkoušeni ústřední paměti čs. samočinného počítače SAPO. Černy Václav), Stroje zpracov. inform., 1955, № 3, 77—88 (чеш.; рез. русск., англ.)

Описывается релейное устройство для испытания запоминающего устройства машины САПО. Устрой-

ство содержит 48 реле. Оно позволяет производить три основные операции: а) запись в различных местах запоминающего устройства на магнитном барабане, б) повторную запись в одном и том же месте барабана, в) повторное чтение записи в одном и том же месте барабана. Ошибка и ее место сигнализируются оптическим путем. Дается скелетная схема устройства.

Z. Koutský

5231. Цифровая электронная система записи данных для время-импульсного телеизмерения. Холл (A digital electronic data recording system for pulse-time telemetering. Hall Gilbert O.), AFCRC Techn. Rept, 1953, № 1, 47 pp. (англ.)

Лабораторией верхних слоев атмосферы Геофизического отдела Кембриджского исследовательского центра ВВС США (Upper Air Laboratory of the Geophisics Directorate Air Force Cambridge Research Centre) разработано и в 1951 г. испытано в действии цифровое устройство для телеизмерения и записи данных.

Система состоит из двух блоков «Диджер I» (Diger I—Digital Electronic Recorder) и «Диджер II». Блок «Диджер I» принимает сигналы с ракеты, находящейся в полете, преобразует их в кодированную цифровую форму и ведет непрерывную запись данных на фотопленку с частотой 569 записей в 1 сек. по каждому из двух телеизмерительных каналов. Запас пленки составляет 330 *м* и достаточен для ведения записи в течение 16 мин. (время всего полета ракеты, включая спуск на парашюте).

Блок «Диджер II» расшифровывает данные, записанные на фотопленке, и печатает их в виде таблицы со скоростью, составляющей $^1/_{300}$ скорости записи на пленку. Так как в течение 10 мин. записывается до 340 000 значений величин по каждому из двух каналов, то имеется устройство, позволяющее печатать не каждое считываемое число, а выборочно—каждое второе, четвертое или восьмое число.

Сигнальное устройство ракеты возбуждается посылками с наземной станции импульсов с частотой 569 имп/сек.

Получив возбуждающий импульс, сигнальное устройство посылает на землю 3 имп., длительностью 1 мксек, первый из которых дает возможность определить положение ракеты, второй и третий импульсы (называемые импульсами телеизмерения) задержаны относительно первого импульса и длительность задержки определяется измеряемой величиной, причем задержка в 150 мксек соответствует напряжению в 5 *в*. Общий предел измеряемой величины равен 0÷5 *в*.

Добавлением 20-позиционного шагового искателя, вращающегося со скоростью 1 об/сек, каждому из измерительных каналов дается возможность производить считывание показаний со многих приборов. Такой тип телеизмерения называется время-импульсным.

Запись данных на пленку производится двояким путем. В том случае, когда необходимо получить визуально контролируемую запись, фотографируется экран электроннолучевой трубки, на котором приходящие импульсы проявляются в виде определенным образом смещенных световых пятен. Пленка движется непрерывно, а положение пятна на трубке изменяется только при получении системой телеизмерительных импульсов. В том случае, когда необходимо расшифровать и напечатать данные, производится фотографирование двух рядов ламп, связанных со счетным блоком и показывающих состояние счетчиков.

Система состоит из центрального блока управления, блока счетчиков, контрольного блока, блока представления кодированных данных, съемочной камеры и источников питания. В системе используется 136 ламп.

Центральный блок управления выполняет функции синхронизации и управления всей системой. Он получает импульсы от наземного приемника, принимающего телеизмерительные сигналы, и дает, в соответствие с задержкой телеизмерительных импульсов, 2 серии импульсов (одна на каждый канал). Каждый импульс соответствует 0,025 *в* (таким образом полный диапазон 0÷5 *в* вмещает 200 имп.).

Серии импульсов, соответствующие измеряемым величинам, поступают в блок счетчиков. В этом блоке на каждый канал имеются 3 субблока-счетчика. Субблоки представляют собой двоичные счетчики, первый из них имеет 2 каскада и считает до 0,1 *в* (один импульс равен 0,025 *в*), второй счетчик получает на вход импульсы, соответствующие 0,1 *в*, и выдает импульсы, соответствующие 1 *в*. Третий счетчик считает целые вольты.

В определенный момент времени числа из счетчиков принимаются блоком представления кодированных данных, который имеет 20 неоновых лампочек (по 10 в каждом канале, из которых 4 используются для кодирования единиц вольт, 4 — для кодирования десятых вольта, 1 — для обозначения 0,05 *в* и одна — для нанесения маркерных отметок). Имеется одна лампочка для задания меток времени.

Число из счетчика, при желании, может быть прочитано также на контрольном блоке. Этот блок служит для калибровки системы и имеет также 2 ряда неоновых лампочек, которые загораются в соответствующий момент в соответствии с состоянием счетчика.

Изображение 2 рядов ламп блока представления кодированных данных при помощи оптической системы фокусируется на пленке, которая непрерывно движется. В момент свечения ламп в определенных точках (соответствующих светящимся лампам) пленка засвечивается и получается запись числа, которая в дальнейшем расшифровывается печатающим устройством «Диджер II».

В. Д. Князев

5232. Развитие цифровых электронных вычислительных машин в Национальном бюро стандартов. Каннон (Développement des machines à calculer arithmétiques électroniques au «National Bureau of Standards». Cannon E. W.), Colloq. internat. Centre nat. rech. scient., 1953, 37, 87—99, Discuss. 133—115, 210, 347—354 (франц.)

В программе работ Национального бюро стандартов (США) в области электронных вычислительных машин имеется четыре основных направления: 1) Фундаментальные исследования, непосредственной целью которых является повышение эффективности использования существующих вычислительных машин, а конечной — разработка новых, более совершенных и более гибких машин. Разработка математических вопросов проводится Национальной лабораторией прикладной математики. Значительное место отведено исследованиям в области численного анализа. 2) Усовершенствование техники вычислительных машин. 3) Проектирование и конструирование новых машин. 4) Технические услуги и консультация, оказываемые крупным фирмам и правительственным учреждениям. Приводится описание машин УНИВАК (UNIVAC), Raytheon Computer, СВАК (SWAC) и СЕАК (SEAC).

Т. А. Шмаонов

5233. Роль университета в области высокоскоростного вычисления и обработки данных. Хаусхолдер (The position of the University in the field of high speed computation and data handling. Householder Alston S.), Computers and Automat., 1956, 5, № 5, 6—10 (англ.)

Приводится краткий обзор развития цифровых вычислительных машин и деятельности университетов в области создания и научного применения их в США и других странах. Данные о советских машинах «Урал»

и «БЭСМ» взяты из материалов Дармштадтской конференции, состоявшейся в октябре 1955 г. Отмечается преимущество скорости работы «БЭСМ» перед другими рассмотренными машинами, за исключением американской НОРК.

Указывается, что роль университетов сводится в основном к подготовке специалистов и исследованию возможностей применения машин.

По мнению автора, не следует вводить узкой специализации в подготовке кадров математиков. Предлагается общий уклон математических курсов в сторону численного анализа. Задача быстрейшего развития машинной математики требует объединения математиков, инженеров и деловых экспертов. Такие совместные группы наиболее быстро могут быть созданы в университетах. **А.** В. Аваев

5234. **Решение задач планирования фирмой «Крейслер» после установки ИБМ-702. Линдстром** (The planning behind the I B M 702 installation at Chrysler corporation. L i n d s t r o m E u g e n e), Computers, and Automat., 1956, 5, № 2,13—15, 32 (англ.)

Сообщается, что в 1955 г. фирма «Крейслер» установила вычислительную машину ИБМ-702, которая используется исключительно для обработки коммерческих данных.

Первой была поставлена задача учета распределения товаров. Использование ИБМ-702 позволяет учесть движение товаров за предыдущий день. За два часа непрерывной работы машина выносит 240 000 деловых решений, связанных с размещением товаров. В состав решений входят пункты о наличии товаров, их распределения, количестве и виде остатков. На основании этих решений машина, в случае необходимости, печатает отчет, в котором указывается по какой причине напечатан отчет и какие действия (в пределах логических возможностей машины) следует предпринять. Все исходные, промежуточные и выходные данные хранятся на магнитной ленте или магнитном барабане. Исходные данные обычно вводятся с перфокарт и автоматически записываются на магнитную ленту. Машина используется также для обработки данных по заказам на различные товары. Все крупные магазины фирмы имеют перфораторы. На перфокарты набивается код номера товара, количество покупателей, его адреса. Эти перфокарты ежедневно отправляются воздушным экспрессом в главный вычислительный центр, где расположена ИБМ-702.

Машина учитывает возможность поставки товара, подсчитывает стоимость его и печатает соответствующие документы, которые отправляются заказчику вместе с товаром. Подготовка сопровождающих документов к товарам занимает ежедневно 2 часа работы ИБМ-702 и 12 час. печати. Машина используется также для учета издержек, прибыли и анализа продаж. Ожидаются следующие непосредственные преимущества от применения ИБМ-702: 1) произойдет удешевление коммерческих операций и увеличение их скорости; 2) правление будет в состоянии использовать свое время более экономично, так как возможности машины позволяют производить определенный отбор наиболее важных проблем для изучения; 3) количество товаров на складах уменьшится до минимума, так как запас товаров контролируется ежедневно; 4) появится возможность увеличения контрольных результатов от централизации огромного количества товарных операций. А. В. Аваев

5235. **Организация и работа вычислительного центра, использующего цифровые вычислительные машины. Льюк** (The organization and operation of a computations center employing desk calculators. L u k e Y u d e l l L.), Proc. Sympos. Industr. Applic. Automat. Comput. Equipm. Jan. 1953, Kansas City, Mo., Midwest Res. Inst., 1953, 43—50, discuss. 50—51 (англ.)

Обсуждается опыт работы вычислительного центра Среднезападного исследовательского института. Имеются 2 группы специалистов. Одна из них осуществляет математическую постановку задачи, вторая производит практическое решение задач. Критерием подготовленности сотрудников является знание численного анализа.

Приводятся примеры задач, с помощью которых производится подготовка и испытание сотрудников. А. А. Красилов

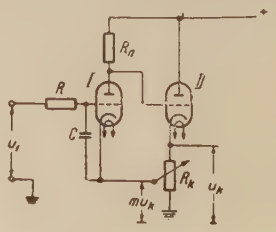
5236. **Математические машины лаборатории кристаллических структур Института технической физики ЧСАН. Линек, Новак** (Matematické stroje laboratoře krystalových struktur Ústavu techniské fysiky ČSAV. L í n e k A l l a n, N o v á k C t i r a d), Stroje zpracov., inform., 1955, № 3, 309—321 (чеш.)

Указывается, что вся вычислительная работа при исследовании кристаллических структур делится на четыре отдельных этапа. Вычисления по каждому этапу выполняются на отдельной машине. Подробное описание этих машин дано в статьях, помещенных в списке литературы в конце работы.

Z. Koutský

5237. **Исследования электронного интегратора для интегрирования электрических процессов в больших промежутках времени. Лооc, Пелнарж** (Vyšetření ryze elektronkového integrátoru pro integraci dlouho trvajících průběhů. L o o s H o r s t R u d o l f, P e l n a ř J i ř í), Slaboproudý obzor, 1955, 16, № 6, 316—320 (чеш.; рез. русск., нем., англ., франц.)

Для интегрирования электрических величин в очень коротких промежутках времени можно воспользоваться цепью RC. Дифференциальное уравнение простой цепи RC имеет решение $u_2(t) = \frac{1}{CR} e^{-\frac{t}{CR}} \times \int_0^t u_1(\tau) e^{\frac{\tau}{CR}} d\tau$, где $u_1(\tau)$ — входное, а $u_2(t)$ — выходное напряжения. Точность интегрирования понижают члены с показательной функцией, в особенности при интегрировании в более длинных промежутках времени. Члены с показательной функцией можно, однако, исключить путем последовательного включения компенсационного напряжения с источником напряжения $u_1(\tau)$.



Упрощенная схема включения электронного интегратора с управляемым при помощи электронных ламп источником компенсационного напряжения изображена на рисунке. Решая систему уравнений для этой цепи, получим формулу для напряжения на конденсаторе C в операторном виде

$$u_c(r) = u_1(r) \frac{1}{CR} \frac{1}{r + \Phi},$$

где $\Phi = \frac{1 + mRk(\varphi_a + \varphi_k)}{CR}$.

При $\Phi = \theta$ получаем, возвращаясь к первоначальному,

$$u_c(t) = \frac{1}{CR}\int_0^t u_1(\tau)\,d\tau$$

Следовательно, напряжение на конденсаторе равно в точности интегралу входного напряжения.

При $\Phi < \theta$ получаем

$$u_c(t) = \frac{1}{CR}\,e^{\Phi t}\int_0^t u_1(\tau)\,e^{-\Phi\tau}\,d\tau.$$

Напряжение на конденсаторе возрастает быстрее, чем следовало бы интегралу входного напряжения, следовательно, имеем дело с состоянием перекомпенсации.

В случае $\Phi > \theta$ получаем

$$u_c(t) = \frac{1}{CR}\,e^{-\Phi t}\int_0^t u_1(\tau)\,e^{\Phi\tau}\,d\tau.$$

Напряжение на конденсаторе возрастает медленнее, чем следовало бы интегралу входного напряжения, следовательно. имеем дело с состоянием недокомпенсации.

Итак, правильной компенсации, а тем самым точного интегрирования достигаем только при $\Phi = \theta$. Для этого необходимо, чтобы удовлетворялось равенство $1 + mR_k(\varphi_a - \varphi_k) = \theta$. Из этого уравнения можно вычислить постоянную величину m, определяющую ту часть всего напряжения $u_k(t)$, которая уходит на компенсационное напряжение:

$$m = \frac{1}{R_k(\varphi_k - \varphi_a)}.$$

При некоторых упрощающих условиях можем вычислить и постоянные φ_a и φ_k:

$$\varphi_a = S_{st}\frac{Ri_1}{Ri_1 + R_a}, \quad \varphi_k = \mu_1\mu_2\frac{Ra}{(Ri_1 + Ra)(Ri_2 + \mu_2 R_k)},$$

где S_{st} — крутизна характеристики первой электронной лампы, μ_1, μ_2 — коэффициенты усиления обеих электронных ламп, Ri_1, Ri_2 — внутренние сопротивления электронных ламп.

Экспериментальным путем было обнаружено, что описанный тип интегратора с успехом можно использовать при интегрировании процессов длительностью до 30 сек., причем достижимая точность интегрирования равна 1%.

Недостатком такого интегратора является то, что условие $1 + mRk(\varphi_a - \varphi_k) = \theta$ можно выполнить лишь в одной точке диапазона изменения входного напряжения, в силу нелинейности ламп. V. Černý

5238. Принципы работы и применение электронных моделирующих устройств. Часть IV. Хеггс (Principles and application of electronic analogue computers. Part 4. Heggs P.), Electronic Engng, 1956, 28, № 340, 257—259 (англ.)

Четвертая и последняя статья из серии статей, (см. РЖМат, 1957, 8761—2763), в которой приводится краткое описание моделирующей установки (Saunders—Roe), содержащей решающие усилители, спиральные десятиоборотные и одноборотные потенциометры, самописцы, катодный осциллограф, нелинейные элементы, источники питания, генератор специальных функций, приспособление для установки и взаимной работы с моделью автопилота и т. п. Приводится пример моделирования системы уравнений, описывающих механические связанные системы. Приводится также пример моделирования системы уравнений, описывающих движение самолета и систему стабилизации самолета. Указывается на возможность решения на моделирующей установке некоторых уравнений в частных производных, например, уравнения распространения волн, передачи тепла путем представления частных производных в конечных разностях. Библ. 5 назв. Б. Ш. Беркович

5239. Электронные дифференциальные анализаторы. Ремон (Les analyseurs différentiels électroniques. Raymond François-Henri), Rev. cálculo automát. y cibernét., 1956, 5, № 13, 1—31 (франц.)

Излагаются метематические принципы моделирующей вычислительной техники вообще и, в частности, механических и электрических моделирующих устройств. Для обоснования принципов машинного моделирования используются понятия теории меры, обобщающей различные способы представления величин в машине (численные и непрерывные). Указывается на преимущества численного представления моделируемых величин. Все возможные математические задачи подразделяются на два класса по типу связей между переменными этих задач (голономные или неголономные). В соответствии с этим определяются возможности решения тех или иных задач с помощью различных вычислительных устройств. Рассматриваются способы и условия реализации решения задач на механических, электронных и электро-механических дифференциальных анализаторах. С помощью теории обратной связи обобщается теория дифференциальных анализаторов и приводится обобщенное уравнение, решаемое ими.

В заключение дается теория цифрового дифференциального анализатора, исходящая из возможности представления непрерывных функций в виде числового ряда. Указывается, что принцип работы цифрового дифференциального анализатора подобен принципу работы механического дифференциального анализатора, но обладает тем преимуществом, что дает широкие возможности выбора метода интегрирования.

Указывается, что для анализа частотных характеристик цифровых дифференциальных анализаторов может быть использовано преобразование Лапласа, если представить интегрируемую функцию в виде ступенчатой функции. Приводится блок-схема цифрового анализатора и краткое описание его структуры. Отмечается, что главными достоинствами такого рода моделирующего устройства является большая точность и скорость решения, а также простота программирования задач по сравнению с универсальными цифровыми машинами. Б. И. Стрелков

5240. Электронные модели и дополнительное оборудование фирмы Mid-Century Instrumatic Corp. (Mid-Century electronic analog computers and accessories) Electronics and Communs, 1955, 3, № 5, 97 (англ.)

Краткое сообщение о том, что фирма Mid-Century Instrumatic Corp. выпускает электронные моделирующие устройства, в которых точность отдельных блоков достигает 0,1%. Все усилители стабилизированы с помощью вибраторов. В состав устройств по особому заказу могут включаться функциональные преобразователи, электронные перемножители, многоканальные регистрирующие приборы. И. М. Витенберг

5241. Промышленные возможности современных моделирующих устройств. Жирер (Les possibilités industrielles des simulateurs analogiques modernes. Girerd J.), Ingrs et techniciens, 1956, № 90, 45—47, 49 (франц.)

Дается описание решающих элементов моделирующих устройств. Приводятся схемы для решения на электронном моделирующем устройстве дифференциальных уравнений и систем линейных алгебраиче-

ских уравнений. Указывается, что электронные моделирующие устройства могут применяться в авиационной, автомобильной, радиотехнической промышленности и т. д. Р. Д. Бачелис

5242. **Электромеханическое моделирующее устройство для решения дифференциального уравнения вида $y''+f(x)y+g(x)=0$.** Боденштедт (Analog computer for the differential equation $y''+f(x)y+g(x)=0$. Bodenstedt Erwin), Rev. Scient. Instrum., 1956, 27, № 4, 218—221 (англ.)

Решение уравнения $y''+f(x)y+g(x)=0$ производится с помощью вращающегося маятника, подвешенного на длинной и тонкой нити, почти исключающей затухание колебаний. Задание зависимостей $f(x)$ и (x) обеспечивается путем изменения токов I_1 и I_2 в двух перпендикулярных катушках, связанных с маятником и перемещающихся в равномерном магнитном поле. Электромеханическая система описывается уравнением

$$\theta\ddot{\varphi}+I_1(F_1\times B)+I_2(F_2\times B)=0,$$

где θ — момент инерции маятника, который специально увеличен с помощью дополнительных грузов, удаленных от центра вращения, φ — угол отклонения маятника, F_1 и F_2 — моменты, действующие на катушку в магнитном поле (на единицу силы тока), и B — магнитная индукция. Так как $F_1\times B=F_1B\sin\varphi$, а $F_2\times B=F_2B\cos\varphi$, то при малых углах отклонения маятника φ уравнение системы

$$\ddot{\varphi}+\frac{F_1B}{\theta}I_1(t)\varphi+\frac{F_2B}{\theta}I_2(t)=0$$

аналогично исследуемому уравнению.

Конструктивное выполнение системы предусматривает стабилизацию маятника в горизонтальной плоскости подвеской нити между двумя стеклянными опорами. Регистрация колебаний производится путем засвечивания пленки, перемещающейся перед объективом, на который падает свет от зеркальца, находящегося на маятнике. Масштаб записи 2,8/35 *мм*.

Изменение токов I_1 и I_2 в катушках для задания переменных коэффициентов $f(x)$ и $g(x)$ производится с помощью системы, выполненной в двух вариантах — механическом и электронном. В механическом варианте задание токов в пределах ± 36 *ма* производится от усилителя, усиливающего фототок фотоэлемента, свет на который падает через пленку с подготовленной зависимостью $I(t)$, перемещаемую синхронным двигателем перед источником света в 500 *вт*. Электронный вариант был выполнен для исследования колебаний в бетатроне и обеспечивал подачу импульсов тока величиной ± 100 *ма*, причем число импульсов в серии менялось от двух до восьми при изменении длительности импульсов в 5 раз.

Градуировка схемы для подбора величин токов $I_1(t)$ и $I_2(t)$ производилась измерением частоты колебаний в функции тока $I_1(t)$ при $I_2(t)=0$ и измерением величины отклонения зеркальца маятника при некоторых значениях $I_1(t)$ и $I_2(t)$ после затухания колебаний. Результаты измерений использовались для расчета масштабов схемы.

Приведены примеры решения уравнений для радиальных и вертикальных колебаний в бетатроне, а также уравнения Матье. И. М. Витенберг

5243. **Об одном приеме численного гармонического анализа по большому числу точек.** Люстерник Л. А., Акушский И. Я., Изв. АН КазССР, сер. матем. и механ., 1956, вып. 4, 80—85.

Рассматривается способ численного вычисления коэффициентов Фурье c_k и d_k на табуляторе для большого количества функций, заданных тремя тысячами значений. Выводятся формулы для вычисления коэффициентов:

$$c_k=h\frac{\pi^3}{4k}\left\{-\frac{\overline{f}^{(-2)}(b)}{2}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{k}\left[2\sum_{i=1}^{2n}(-1)^i\overline{f}^{(-3)}(ikh)-\overline{f}^{(-3)}(b)\right]\right\},$$

$$d_k=h\frac{\pi^3}{4k}\left\{\frac{\overline{f}^{(-1)}(b)}{8}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{k^2}\left[2\sum_{i=1}^{2n}(-1)^i\overline{f}^{(-3)}\left(\left(i-\frac{1}{2}\right)kh\right)-\overline{f}^{(-3)}(b)\right]\right\},$$

где h — шаг таблицы, $b=2nkh$, $f^{(-j)}x=\int_0^x f^{(-j+1)}(x)\,dx$,

$$\overline{f}^{(-j)}(lh)=\sum_{i=0}^{l}f^{(-j+1)}(ih),\qquad h^j\overline{f}^{(-j)}(lh)\cong f^{(-j)}(lh)$$

при $j=1, 2, 3$.

Вычисление осуществляется с помощью комплекта счетноаналитических машин, состоящего из перфоратора, сортировальной машины, репродуктора, табулятора и множительного автомата.

Вычисление состоит из следующих этапов: 1) перенесение на перфокарты заданных величин $f(jh)$ ($j=1, 2, \ldots, N$); 2) вычисление функций $\overline{f}^{(-1)}(lh)$, $\overline{f}^{(-2)}(lh)$, $\overline{f}^{(-3)}(lh)$; 3) образование аргументов, функции $\overline{f}^{(-3)}(lh)$ от которых участвуют в вычислениях c_k и d_k; 4) нанесения на карты соответствующих значений функции $\overline{f}^{(-3)}(lh)$; 5) вычисление сумм, входящих в c_k и d_k.

Остальные вычисления выполняются на малых счетных машинах. А. А. Красилов

5244. **Решение инженерных задач на перфорационных машинах фирмы ИБМ.** Кьюби (The solution of engineering problems on IBM punched card machines. Kubie E. C.), Proc. Sympos. Industr. Applic. Automat. Comput. Equipm. Jan. 1953, Kansas City, Mo., Midwest Res. Inst., 1953, 65—74 (англ.)

Рассматриваются возможности решения инженерных задач с использованием вычислительных машин ИБМ-604 и КПК (CPC). Порядок решения состоит из следующих этапов: математическая формулировка задачи; анализ математического выражения и выбор численного метода; определение последовательности этапов вычислений, которая состоит из арифметических операций, подпрограмм и логических связей между ними; подготовка задачи для вычислительной машины: определение последовательности операций на машине, кодировка, набивка перфокарт; решение задачи на вычислительной машине и анализ результатов.

Далее рассматривается решение задачи прохождения луча в оптической системе, сводящейся к решению системы линейных алгебраических уравнений путем приведения матрицы коэффициентов к диагональному виду, методами Везу (Verzuh) и Ричардсона, удобными для ИБМ-604, и методом Гаусса-Зейделя для КПК. Для решения 20 уравнений необходимо 3 мин. на КПК методом Гаусса-Зейделя и 30 мин. на ИБМ-604 методом Ричардсона. А. А. Красилов

5245. **Прибор для вычисления интеграла Пуассона и некоторые его применения.** Капица С. П.,

Изв. АН СССР, сер. геофиз. 1955, № 4, 369—376

Описан прибор для графического вычисления интеграла вида

$$U(x, y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(\zeta, 0)\, y d\zeta}{(\zeta - x)^2 + y^2},$$

где $u(\zeta, 0)$ — заданные значения u на оси Ox. Дана теория прибора, описание его механического устройства, техника работы с ним. Изложено несколько примеров применения прибора: определение магнитного поля заданной формы, определение распределения магнитного поля на высоте, отличной от той, на которой оно было измерено. Последний пример показывает возможности применения для обработки данных аэромагнитных съемок. Ю. К.

5246. Механический двоично-десятичный преобразователь. Сеттерваллъ (A mechanical binary-decimal converter. Setterwall M.), J. Scient. Instrum., 1956, **33**, № 1, 18—19 (англ.)

Приводится описание механического преобразователя чисел N из двоичной в десятичную форму. Подробно описывается устройство десятиразрядного преобразователя, который абсолютно точно оперирует с числами вплоть до $2^{10} = 1024$. Если преобразование выполнять в два приема, то можно оперировать с числами вплоть до $2^{20} \simeq 10^6$. Всякое n-разрядное $(20 \geqslant n > 10)$ двоичное число N можно рассматривать как составленное из двух десятиразрядных чисел N_1 и N_2:

$$N = 2^{n-10}\left(N_1 + \frac{N_2}{2^{10}}\right), \text{ где } N_1 = \sum_{n-10}^{n-1} A_k \cdot 2^{k-n+10}$$

и

$$N_2 = 2^{20-n} \sum_{0}^{n-11} A_k \cdot 2^k.$$

Коэффициент 2^{n-10} является общим и его введение не требует большой вычислительной работы, тем более, что часто интересуются только относительным распределением чисел. Знаменатель второго члена в скобках принимается приблизительно равным 1000, а поэтому весь второй член представляет собой десятичную дробь. Допущение того, что $2^{10} \simeq 1000$, приводит к ошибке меньше, чем $1/\sqrt{N}$. Принцип работы прибора состоит в следующем. Пусть имеются четыре пластины с отверстиями. Каждая пластина соответствует одному двоичному разряду и может занимать два различных положения. Пластины расположены в параллельных горизонтальных плоскостях над источником света. После набора двоичного числа свет пройдет через систему отверстий и светящееся пятно займет определенное положение на экране, соответствующее десятичной цифре. При соответствующем количестве пластин можно осуществить перевод чисел с большим количеством разрядов. Г. К. Кузьминок

5247. Использование восьмеричной системы для вывода информации, записанной в двоичной системе исчисления. Хатчинсон (The use of octal numbers for recording binary-coded information. Hutchinson G. W.), J. Scient. Instrum., 1956, **33**, № 10, 405—406 (англ.)

Заметка посвящена вопросу о выводе информации из цифровой машины в виде графика. Автор считает, что такие преобразователи информации получаются значительно более простыми, если вывод осуществляется по восьмеричной системе. В этом случае разряды ячейки запоминающего устройства разбиваются просто на группы по три двоичных разряда в каждой, затем этот восьмеричный код выводится в виде точки на осциллограф с сеткой, по которой можно прочесть величину числа. Таким путем оператор может прочесть и записать или нанести на график информацию из 100 каналов за 5—10 минут. При желании эти результаты затем могут быть переведены в десятичную систему. Н. П. Трифонов

5248. Автоматические вычислительные машины. Блакман (ACS. Blachman Nelson M.), Amer. Scientist, 1956, **44**, № 2, 198—203 (англ.)

Приводятся названия ряда вычислительных машин США, Англии, Швеции, оканчивающиеся на «АС». Объясняется происхождение этих названий и их история. Кроме того, называются машины, построенные по типу машин ИАС (IAS), СЕАК (SEAK), АКЕ(ACE), и др. Упоминаются уникальные установки, такие как НОРК, ЛАРК и т. д. А. В. Аваев

5249. Вычислительные машины и счетные системы. Библиография. Грегори (Computers and accounting systems; a bibliography. Gregory Robert H.,) Account. Rev., 1956, **31**, № 2, 278—285 (англ.)

Приведена выборка из библиографии, содержащей около 1000 названий, составленной к курсу «Управление информационными системами», предложенному впервые весной 1955 г. в школе промышленного управления при Массачусетском технологическом институте. Даны названия 33 книг и 116 статей. Литература разделена на 3 части: проектирование и конструирование оборудования; исследование систем и применение оборудования; анализ систем, оценка и обзор. Дан краткий обзор приведенной литературы. А. В. Аваев

5250. Математические вопросы теории счетных машин. Келдыш М. В., Ляпунов А. А., Шура-Бура М. Р., Вестн. АН СССР, 1956, № 11, 16—37

Доклад, прочитанный 15 октября 1956 г. на сессии АН СССР, посвященный научным проблемам автоматизации производства.

В популярной форме излагаются принципы работы моделирующих устройств и цифровых электронных вычислительных машин, дается понятие об алгоритме решения математических задач, говорится о программировании, приводится программа для решения одного простейшего обыкновенного дифференциального уравнения методом Эйлера. Далее рассказывается о значении вычислительных машин для математики, о новых методах численного решения математических задач, которые возникли с появлением электронных вычислительных машин.

Во второй части работы говорится об успехах советских авторов в области автоматизации составления программы, автоматического перевода с одного языка на другой, а также об автоматизации производственных процессов при помощи вычислительных машин. В конце доклада говорится о теории и значении управляющих алгоримов (в связи с этим авторы дают свое определение кибернетики). М. К. Керимов

5251. Арифметические вычислительные машины. Версуа (Les machines à calculer arithmétiques. Versois Pierre), La nature, 1956, № 3255, 257—262 (франц.)

В популярной форме рассказывается об основных принципах работы электронных вычислительных машин. Р. Д. Бачелис

5252. О кибернетике. Китов А. И., Ляпунов А. А., Яблонский С. В., Полетаев, Тр. 3-го Всес. матем. съезда. 2, М., АН СССР, 1956, 76—77

Тезисы доклада, сделанного на III Всесоюзном математическом съезде.

5253. Механический счет в инженерном деле. Буланже (Le calcul mécanique et l'art de l'ingénieur. Boulanger Georges R.), Colloq. internat. Centre nat. rech. scient., 1953, 37, 333—345. Discuss. 347—354 (англ.)

Констатируется недостаточное применение машин в гражданских инженерных расчетах и доказывается экономическая целесообразность создания вычислительных бюро. Р. Д. Бачелис

5254. **Место специализированных электронных систем для обработки данных.** Спрейг (The place of the special purpose electronic data processing systems. Sprague R. E.), Proc. East. Joint Computer Conf., 1955, New York, 1956, 22—25. Discuss., 25 (англ.)

Разбирается вопрос о целесообразности постройки специализированных электронных цифровых машин для обработки коммерческих данных. Преимуществами таких машин являются простота управления, отсутствие необходимости в программировании задач и т. д. Г. Г. Меньшиков

5255. **Заметки о двоичной арифметике.** Д'Амелио (Cenni di aritmetica binaria. D'Amelio Carlo), Electrotecnica, 1956, 43, № 5, 242—249 (итал.)

Приводятся элементарные свойства двоичного счисления, методика выполнения четырех действий арифметики, извлечение квадратного корня последовательным вычитанием нечетных чисел. Предлагается алфавитный способ кодировки чисел. И. В. Лебедев

5256. **Счетно-решающие устройства** (Computing devices), Electr. Rev., 1955, 157, № 25, 1176—1177 (англ.)

Приводятся высказывания проф. Тастина (Tustin) о важной роли вычислительных машин для электропромышленности. Указывается, что дальнейшее развитие автоматизации ведет к повышению спроса на электроэнергию. Можно ожидать, что в Англии в последующие 10—15 лет мощность электростанций возрастет в 5—6 раз и составит 80—90 млн. *квт*. И. В. Лебедев

5257. **Обеспечить развитие механизации учета и вычислительных работ.** Краинский А. И., Приборостроение, 1956, № 6, 13

Краткий отчет о Ленинградской конференции по механизации учета и вычислительных работ, созванной в конце февраля 1956 г. Ленинградским областным правлением научно-технического общества машиностроительной промышленности.

Приводятся наиболее важные решения и пожелания конференции, на которой присутствовало около 1300 человек. А. В. Аваев

5258. **Экспериментальное изучение многозначности и контекста.** Каплан (An experimental study of ambiguity and context. Kaplan Abraham), Mech. Translat., 1955, 2, № 2, 39—46 (англ.)

Рассматривается вопрос об изменении числа значений слова в зависимости от контекста. Значения 140 многозначных слов были испытаны в контекстах семи различных типов: 1) одно предшествующее слово, 2) одно последующее слово, 3) по одному слову с обеих сторон, 4) два предшествующих слова, 5) два последующих слова, 6) по два слова с обеих сторон, 7) целое предложение. Наименьшее количество значений дает контекст 1-го типа. Контекст 6-го типа дает одинаковое количество значений с целым предложением. Отмечается, что уменьшение многозначности слова при переводе зависит от квалификации переводчика. Данные сведены в многочисленные таблицы. О. С. Кулагина

5259. **Перевод при помощи машины.** Уилкс (Translation by machinery. Wilkes M. V.), Discovery 1956, 17, № 2, 83—84 (англ.)

Указывается, что идея механизации перевода с одного языка на другой не нова. Но только развитие цифровых вычислительных машин в последнее время дало возможность рассмотреть эту идею с точки зрения практического ее осуществления. Дается обзор книги Лока и Бута (Locke William N., Booth A. Donald, Machine Translation of Languages, Techn. Pres M. I. T. and J. Wiley, New York, Chapman and Hall, London, 48 s.). Г. К. Кузьминок

5260. **Конференция по механическому переводу, состоявшаяся 17—20 июня 1952 г. в Массачусетском технологическом институте.** Рейнолдс (The conference on mechanical translation. Held at M. I. T., June 17—20, 1952. Reynolds A. C., Jr), Mech. Translat., 1954, 1, № 3, 47—55 (англ.)

Краткое изложение содержания докладов на конференции.

5261 П. **Перфоратор с запоминающим устройством.** Джонсон, Юргенс, Моногл (Storage key punch. Johnson Reynold B., Jurgens Henry A., Moneagle Otto F.) [International Business Machines Corp.]. Канад. пат. № 514 876, 19.07.55

Американская фирма «Интернейшл Бизнес Мэшинз Корпорейшн» сообщает о разработке конструкции универсального автоматического перфоратора для перфорации карт. Перфорация может производиться с цифровой и буквенной клавиатуры, с массива первичных карт и с карт оригиналов.

Цифры и буквенный текст, набранные на клавиатуре, передаются в запоминающее устройство, где они хранятся до перфорации их, в соответствии с заданной программой. Связь клавиатуры с запоминающим устройством механическая.

Перфоратор имеет два механизма подачи и перемещения карт. Один механизм служит для подачи рабочих карт, в которых производится перфорация. Другой механизм подает карты первичного массива, с которого пробивки переносятся в рабочие карты и производится программное управление перфорацией. В транспортной каретке перфоратора могут находиться одновременно четыре карты. Помимо рабочей карты и карты первичного массива, которые подаются автоматически, в каретку могут закидываться вручную еще две карты оригинала. Данные с карт оригиналов также переносятся в рабочие карты.

В машине имеется четыре механизма восприятия пробивок с перфокарт. Первый механизм воспринимает пробивки с карт первичного массива. Он связан с механизмом перфорации посредством электрического устройства задержки, которое позволяет переносить цифры из одних колонок карты первичного массива в другие колонки рабочей карты. Второй и третий механизмы восприятия служат для восприятия пробивок с карт — оригиналов. Эти механизмы восприятия связаны с механизмом перфорации через механические устройства задержки. Четвертый механизм восприятия расположен за механизмом перфорации и служит для восприятия пробивок отперфорированных в рабочих картах с запоминающего устройства. Данные, перенесенные в рабочую карту в запоминающем устройстве, гасятся и запоминающее устройство освобождается для получения новых данных с клавиатуры. Если эти данные требуется пробить в нескольких последовательно идущих картах, то такая перфорация производится с помощью четвертого механизма восприятия, который воспринимает пробивки предыдущей карты и управляет перфорацией последующей карты. Четвертый механизм восприятия устройства задержки не имеет. Е. Н. Маквецов

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ И ИХ ЭЛЕМЕНТОВ В ТЕХНИКЕ

5262. **Вычислительная машина для расчета выпадания радиоактивной пыли.** (Radioactive fallout computer.), Electronic Inds and Tele-Tech, 1956, 15, № 9, 67, 134, 136 (англ.)

Желательно знать заранее, в каких районах будет происходить выпадание определенного количества радиоактивной пыли после ядерного взрыва. Одно такое предсказание при ручном счете требовало получасовой работы бригады математиков. Использование быстродействующих электронных цифровых вычислительных машин сокращает время предсказания до 15 мин., однако это обходится дорого и требует участия квалифицированного персонала. В Национальном бюро стандартов (США) разработано простое портативное недорогое моделирующее устройство, выдающее решение почти немедленно после ввода данных, причем в установку легко вводить текущие изменения данных о погоде. При атомных испытаниях можно сразу определить влияние перемены ветра. Установка может быть использована как для исследований при опытных взрывах, так и при реальном нападении; предсказание выпадания пыли может уменьшить число случаев поражения людей.

В машину вводится информация о погоде и о бомбе. Машина выдает географическое распределение и интенсивность выпадения радиоактивной пыли в виде различной яркости свечения экрана трубки; на экран наложена географическая карта местности. По яркости свечения экрана можно определить интенсивность радиоактивности в радиусе до 500 миль от места взрыва.

Эта машина не является просто моделирующим устройством, хотя для решения задачи используются приемы моделирования. В частности, время используется только для хронирования и не имеет прямого значения как независимой переменной в первоначальной физической модели.

В машине вырабатываются непрерывно изменяющиеся напряжения, пропорциональные медленности частиц (по сравнению со «стандартной») и интервалам высот. Блок ветров имеет 20 каналов, соответствующих разной высоте; выходы всех каналов суммируются в двух блоках, производящих напряжения, пропорциональные смещениям с севера на юг и с востока на запад. Эти напряжения затем воздействуют на отклоняющую систему, образуя координаты местности. Напряжение, учитывающее «нестандартность» частиц и их количество на разных уровнях, воздействует на модулирующий электрод, иммитируя яркостью экрана интенсивность радиоактивности. Частота развертки высоты 20 *гц*. Это основная скорость работы. С такой же частотой выдается полное решение. Умножение в машине не требуется. Приведены блок-схемы устройства. Макет машины состоял из двух стоек высотой 180 *см*, включая блок питания и один осциллоскоп. Демонстрационный осциллоскоп с трубкой в 21 дюйм был смонтирован отдельно.

Дана ссылка на более подробное описание работы.

В. К. Зейденберг

5263. Разработка фотограмметрических вычисляющих систем. Эстен (The development of photogrammetric computing systems. Esten Randall D.), Photogramm. Engng, 1955, 21, № 5, 697—699 (англ.)

С развитием фотограмметрии ее методы стали более точными и появилась возможность описать их математическими выражениями. Применение вычислительных машин открыло дорогу широкому использованию аналитических методов.

Исследование аналитических воздушных триангуляционных систем ведется отделом составления карт Лаборатории технических исследований и разработок (The Map Compilation Branch of the Engineer Research and Development Laboratories). Исследование включает в себя оценку применяемой картографической службой Британской армии системы аналитической воздушной триангуляции, анализ ошибок системы и разработку комбинированной моделирующей и аналитической системы триангуляции, позволяющей использовать персонал с малой квалификацией.

Британская артиллерийская служба (British Ordnance Survey) использовала аналитическую фотограмметрическую триангуляционную систему, предложенную Томсоном. В системе применяется фотокамера с встроенной сантиметровой сеткой. Лабораторией была использована английская съемочная камера F 49 Mark II с фокусным расстоянием 150 *см* и сантиметровой сеткой. Такая же сетка была изготовлена и установлена на американской камере T-II. Этой камерой будет заснята контрольная поверхность в штате Аризона, точность триангуляционной системы будет определяться на машине УНИВАК и результаты сравниваться с расшифровкой этой же фотографии методом моделирования.

Кроме этого метода, имеется еще ряд методов аналитической триангуляции, которые будут рассматриваться Корнельским университетом с тем, чтобы разработать систему триангуляции, наиболее подходящую для военных операций. Изучение будет сводиться к рассмотрению существующих аналитических методов, составлению эмпирических зависимостей горизонтальной и вертикальной точности по всей съемочной полосе как функции длины полосы, густоты и положения вертикальной и горизонтальной сеток, несовпадения и неидентичности фотографий, программированию избранной процедуры для вычисления на машине УНИВАК.

Все исследования будут вестись на фиктивных фотографиях поверхности, и только после полной подготовки будет производиться съемка контрольной поверхности.

В. Д. Князев

5264. Электроника в финансовом учете. Беннет, Элдредж, Моррин, Но, Уитби (Electronics in financial accounting. Bennett B. J., Eldredge K. R., Morrin T. H., Noe J. D., Whitby O. W.), Proc. East. Joint Computer Conf., 1955, New York, 1956, 26—32. Discuss., 32 (англ.)

Сообщается о результатах исследований, проводимых в Станфордском исследовательском институте по автоматизации банковского учета. Описываются операции по учету чеков. Называются наиболее важные факторы, влияющие на выбор оборудования и системы учета при автоматизации учетных работ.

Описывается разработанная институтом машина ИРМА (ERMA). Машина предназначена для обслуживания одновременно 32 000 активных счетов и 8000 клиринговых статей. Предполагается, что последующие модели смогут обрабатывать 50 000 счетов. Для каждого из 32 000 счетов машина регистрирует чеки и вклады и поддерживает текущий баланс. Машина следит за превышением кредита по каждому счету, сортирует входные данные, получаемые в беспорядке, и подсчитывает результаты за день по каждому счету, а также подсчитывает издержки на обслуживание по каждому счету, объявляет эти издержки и печатает отчеты по всем счетам, кроме того, выдает итоги, по которым можно быстро производить выяснение и исправление ошибок. Машина работает преимущественно с жестким программным управлением. Машина построена на стандартных ламповых и релейных переключающих схемах. Она содержит 8000 ламп, 34 000 германиевых диодов, 2400 реле. 2 магнитных барабана обеспечивают хранение 3 000 000 двоичных цифр; 12 магнитных лет могут хранить 400 000 000 двоичных цифр.

С целью исключить влияние помарок на документах при считывании с них данных применялись надписи на документах, сделанные магнитной краской. В начале использовались документы с надписями,

закодированными в двоичной системе. Затем была разработана система, осуществляющая чтение арабских цифр. Чтение осуществляется магнитной головкой. Определение записанного знака выполняется посредством стробирования сигнала с головки (РЖМат, 1956, 5591).

При испытаниях машина допустила 2 ошибки на 10 000 чеков, после чего были добавлены дополнительные устройства обнаружения ошибок и при обработке остальных 90 000 чеков машина не сделала ни одной ошибки. Из первых 38 000 чеков машина не могла прочесть 2% чеков (из них 1,4% из-за плохого качества чеков). Из оставшихся 62 000 чеков машина не могла прочесть 0,76%. В настоящее время при ежедневной работе машина забраковывает в среднем 0,1% всех чеков и редко 0,2% всех чеков за день.

Г. Г. Меньшиков

5265. Вычислительная машина для определения финансового состояния. Грегори, Мангелсдорф (A financial statement computer. Gregory Robert H., Mangelsdorf Theodore A., Jr), Account. Res., 1956, 7, № 2, 141—150 (англ.)

В Школе промышленного управления при Массачусетском технологическом институте (School of Industrial Management at the Massachusetts Institute of Technology) разработана модель вычислительной машины для определения финансового состояния фирмы. Постройка этой модели имеет целью, кроме исследования требований, предъявляемых к машине, еще и обучение студентов.

Модель представляет собой две соединенные деревянные панели размером 75×120 *см*. Каждая панель содержит ряд розеток (по 3 в группе) для вставления пластин, на которых записываются мелом наименования различных статей бухгалтерского учета (пластина вставляется в одну группу розеток). На правой панели может быть размещено 16 таких пластин, а на левой 12. В нижней части левой панели имеется 4 группы розеток для вставления пластин с записями входного бухгалтерского журнала, 2 для дебета и 2 для кредита. Пластины для вставления в розетки имеют с задней стороны различным образом расположенные шрифты, которые при вставлении в розетки замыкают одну из 60 различных схем (30 для дебета и 30 для кредита). Каждой группе розеток соответствуют 2 лампочки, левая — зеленая и правая — красная. Зеленая лампочка обозначает дебет, а красная— кредит.

Перед работой названия статей, характеризующих финансовое состояние фирмы, записываются мелом на пластинах, пластины с штифтами вставляются в розетки на панелях и состояние данных статей (величина) записывается мелом на панелях. При заключении какой-либо сделки выбирается соответствующая пластина и вставляется в розетки журнального входа. После этого переключатель на панели переводится в верхнее положение (дебет) или в нижнее положение (кредит). При этом загорается лампочка против соответствующей статьи, характеризующей новое финансовое состояние (зеленая для дебета или красная — для кредита), и оператор мелом записывает входные числа против этой статьи у соответствующей лампочки (если там имелись данные раньше, то они суммируются со входными). Таким образом, на панелях все время можно прочитать данные, характеризующие финансовое состояние фирмы.

Здесь участок, куда заносятся данные из входного бухгалтерского журнала, можно определить как входной блок, а сами панели как вычислительное, запоминающее и выходное устройство вместе взятые.

Исходя из этой модели, авторы предполагают, что можно спроектировать электромеханическую вычислительную машину, которая будет воспринимать информацию с бумажной перфоленты, а запоминание и суммирование информации будет производиться электромеханическим путем.

В. Д. Князев

См. также: 5188.

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

А

Азбелев Н. В. 5167
Айзенштат Н. Д. 5195
Акасэцу 5123
Акушский И. Я. 5243
Александров П. С. 4534
Аленицын Ю. Е. 4731
Альбрыхт 4957
Альтман М. 4960
Андронов И. К. 4537
Анџелић Т. П. 4886
Аржаных И. С. 4841
Артюхов М. М. 4586

Б

Башмакова И. Г. 4518
Белецкий А. 4780
Белозеров С. Е. 4531
Березанская Е. С. 4537
Березанский Ю. М. 4857
Березин Ф. А. 4762, 4975
Березман А. М. 5121
Бернацкий М. 4730
Билимовић А. 5079 К, 5080 К, 5081 К
Бланк Я. П. 5119
Блехман И. И. 4788
Боголюбов Н. Н. 4888 К
Боев Г. П. 4515
Болотин В. В. 4875
Болтянский В. Г. 4677, 5070 К
Бондаренко Б. А. 5171
Брагинский С. И. 4823
Бредихин Б. М. 4566
Бугулов Е. А. 4588
Булешев У. Б. 4834

В

Вайнштейн И. А. 5195
Вармус М. 5186
Введенская Н. Д. 4865 Д
Вертгейм Б. А. 5164
Волков И. И. 4945 Д
Волковыский Л. И. 4757
Вулих Б. З. 4979

Г

Гайдук Ю. М. 4524
Гасанов А. Д. 4721
Гахов Ф. Д. 4892
Георгиев Г. И. 4671
Глаголев А. А. 5089
Глаголев Н. С. 4537
Гнеденко Б. В. 4512
Головина Л. И. 5071 К
Гольдина Н. П. 4634
Грабарь М. И. 4867
Гринфельд У. К. 4782
Губарь Н. А. 4786

Д

Давыдов Н. А. 4935
Далецкий Ю. Л. 4969
Демидович Б. П. 4810
Джваршейшвили А. Г. 4708
Джемс-Леви Г. Е. 5193, 5194
Джрбашян М. М. 4723
Добрушин Р. Л. 4997
Драпкин А. Б. 4847
Дун Гуан-чан 4562
Дундученко Л. О. 4732

Е

Евграфов М. А. 4736
Евклид 5077 К, 5078 К, 5079 К, 5080 К, 5081 К
Егоров И. П. 5138
Еругин Н. П. 4783

З

Зерагия П. К. 4854
Зморович В. А. 4737, 4908, 4927
Зубов В. И. 4804, 4818
Зуев И. В. 5132

И

Иванов Н. А. 4976
Ивата 5068
Игнатьев М. А. 4889 Д
Иноуэ 4815

Й

Йосида 4816

К

Калицин Г. С. 4620
Каменский Г. А. 4781
Капица С. П. 5245
Карпелевич Ф. И. 4643 Д
Карцивадзе И. Н. 4891
Кац И. С. 4829 Д
Келдыш М. В. 5250
Киро С. Н. 4532
Китов А. И. 5252
Клетеник Д. В. 5073 К
Климов А. И. 4579
Клиот-Дашинский М. И. 4846
Коба В. І. 5091
Кованцов Н. И. 5122, 5124
Кованько А. С. 4710
Кольман Э. Я. 4517
Кордонский Х. Б. 5040
Корнфельд М. 5046
Коровин В. И. 5120
Коровкин П. П. 4597 К
Кошелев А. И. 4840
Краинский А. И. 5257
Красовский Н. Н. 4813
Крастиньш А. Ф. 5184
Крейн С. Г. 4969
Крейнес М. А. 5195
Круковский Б. В. 4909
Купцов Н. П. 4937
Курита 5069, 5133
Курош А. Г. 4540, 4599 К
Кутузов Б. В 5096 К

Л

Лапин А. И. 4764
Лебедев В. И. 4856
Левитан Б. 4800
Лелек А. 4672
Линник Ю. В. 4535
Липатова Д. Л. 5193
Лихтенбаум Л. М. 4668
Ли Чжи-чан 5187
Ли Юэ-шэн 4819
Лу Цзинь-янь 4590
Любовин В. Д. 4977
Люмис Л. 4989 К
Люстерник Л. А. 5243
Люстиг А. М. 4906
Лянце В. Э. 4853
Ляпунов А. А. 5223, 5250, 5252

М

Мальцев А. И. 4638
Мамедов (Хайями) К. М. 4859
Мамедов Я. Д. 4831 Д
Маслов В. П. 4968
Масуда 4645
Маркушевич А. И. 4535, 4536
Мацумото 5136
Меньшов Д. Е. 4701
Микеладзе Ш. Е. 5166
Минь Сы-хао 4563
Митропольский Ю. А. 4888К
Михайлов Г. К. 4523
Мищенко Е. Ф. 4533
Мозговая Л. И. 5092, 5093
Мори 4657
Мышкис А. Д. 4782

Н

Нагата 4651, 4652
Накамура 4679, 4938
Никольский С. М. 4691
Ниномия 4845
Новак И. 4494
Норден А. П. 4526
Норкин С. Б. 4801
Носиро 4926 К

О

Огай С. В. 4589, 4605
Огиевецкий И. Е. 4943
Озолс В. 5014

П

Пань Юн-цзянь 5154
Пеньков О. М. 4541
Перчинкова-Вичкова Даница 4771
Петропавловская Р. В. 4640
Плисс В. А. 4803
Погожельский В. 4851
Полетаев 5252
Поляков А. Н. 5054
Понтрягин Л. С. 4533
Попов В. В. 4830 Д
Посвянский А. Д. 5084
Постников А. Г. 4556
Потапов М. К. 4696
Пугачев Б. П. 5181
Пятецкий-Шапиро И.И. 4762

Р

Рабинович И. М. 4539
Раманатхан 4560
Рашевский П. К. 5074 К, 5134
Реймерс Э. 4933
Роднянский А. М. 4692
Розенфельд Б. А. 4527
Романовский В. И. 5039
Рыбкин Г. Ф. 4514

С

Сакагути 4734
Самарский А. А. 4534
Саргсян И. 4800
Сато 4921 К
Свешников А. Г. 4534, 4883
Свирский И. В. 4872, 4873
Семянистый В. И. 5128
Сенютович В. А. 5056
Симонов Н. И. 4521
Синдаловский Г. Х. 4687
Сифоров В. И. 5035
Скороход А. В. 5007 Д
Слободецкий Л. Н. 4855
Слугин С. Н. 5165
Смирнов В. И. 4520, 4530
Смирнов С. В. 4519
Смогоржевский А. С. 5100
Соминский И. С. 4598 К
Станојевић Ч. В. 4995
Суворов Г. Д. 4727, 4766
Суворов И. Ф. 4916 К
Сюй Сяо-бай 4735

Т

Таками 4922К
Тамадян А. П. 4723
Тан Тянь-дун 4576
Темко К. В. 4703
Терасава 4925 К
Тиман А. Ф. 4695
Тиман М. Ф. 4709
Тихов М. Н. 4871
Тонков Л. В. 5167
Тонян В. А. 4722
Тояма 4923 К
Трохимчук Ю. Ю. 4767
Туманян С. Х. 5013
Тумаркин Г. Ц. 4745
Туран 4914
Тучинский Л. И. 4695

закодированными в двоичной системе. Затем была разработана система, осуществляющая чтение арабских цифр. Чтение осуществляется магнитной головкой. Определение записанного знака выполняется посредством стробирования сигнала с головки (РЖМат, 1956, 5591).

При испытаниях машина допустила 2 ошибки на 10 000 чеков, после чего были добавлены дополнительные устройства обнаружения ошибок и при обработке остальных 90 000 чеков машина не сделала ни одной ошибки. Из первых 38 000 чеков машина не могла прочесть 2% чеков (из них 1,4% из-за плохого качества чеков). Из оставшихся 62 000 чеков машина не могла прочесть 0,76%. В настоящее время при ежедневной работе машина забраковывает в среднем 0,1% всех чеков и редко 0,2% всех чеков за день.

Г. Г. Меньшиков

5265. Вычислительная машина для определения финансового состояния. Грегори, Мангелсдорф (A financial statement computer. Gregory Robert H., Mangelsdorf Theodore A., Jr), Account. Res., 1956, 7, № 2, 141—150 (англ.)

В Школе промышленного управления при Массачусетском технологическом институте (School of Industrial Management at the Massachusetts Institute of Technology) разработана модель вычислительной машины для определения финансового состояния фирмы. Постройка этой модели имеет целью, кроме исследования требований, предъявляемых к машине, еще и обучение студентов.

Модель представляет собой две соединенные деревянные панели размером 75×120 *см*. Каждая панель содержит ряд розеток (по 3 в группе) для вставления пластин, на которых записываются мелом наименования различных статей бухгалтерского учета (пластина вставляется в одну группу розеток). На правой панели может быть размещено 16 таких пластин, а на левой 12. В нижней части левой панели имеется 4 группы розеток для вставления пластин с записями входного бухгалтерского журнала, 2 для дебета и 2 для кредита. Пластины для вставления в розетки имеют с задней стороны различным образом расположенные шрифты, которые при вставлении в розетки замыкают одну из 60 различных схем (30 для дебета и 30 для кредита). Каждой группе розеток соответствуют 2 лампочки, левая — зеленая и правая — красная. Зеленая лампочка обозначает дебет, а красная— кредит.

Перед работой названия статей, характеризующих финансовое состояние фирмы, записываются мелом на пластинах, пластины с штифтами вставляются в розетки на панелях и состояние данных статей (величина) записывается мелом на панелях. При заключении какой-либо сделки выбирается соответствующая пластина и вставляется в розетки журнального входа. После этого переключатель на панели переводится в верхнее положение (дебет) или в нижнее положение (кредит). При этом загорается лампочка против соответствующей статьи, характеризующей новое финансовое состояние (зеленая для дебета или красная — для кредита), и оператор мелом записывает входные числа против этой статьи у соответствующей лампочки (если там имелись данные раньше, то они суммируются со входными). Таким образом, на панелях все время можно прочитать данные, характеризующие финансовое состояние фирмы.

Здесь участок, куда заносятся данные из входного бухгалтерского журнала, можно определить как входной блок, а сами панели как вычислительное, запоминающее и выходное устройство вместе взятые.

Исходя из этой модели, авторы предполагают, что можно спроектировать электромеханическую вычислительную машину, которая будет воспринимать информацию с бумажной перфоленты, а запоминание и суммирование информации будет производиться электромеханическим путем.

В. Д. Князев

См. также: 5188.

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

А

Азбелев Н. В. 5167
Айзенштат Н. Д. 5195
Акасэцу 5123
Акушский И. Я. 5243
Александров П. С. 4534
Аленицын Ю. Е. 4731
Альбрыхт 4957
Альтман М. 4960
Андронов И. К. 4537
Анђелић Т. П. 4886
Аржаных И. С. 4841
Артюхов М. М. 4586

Б

Башмакова И. Г. 4518
Белецкий А. 4780
Белозеров С. Е. 4531
Березанская Е. С. 4537
Березанский Ю. М. 4857
Березин Ф. А. 4762, 4975
Березман А. М. 5121
Бернацкий М. 4730
Билимовић А. 5079 К, 5080 К, 5081 К
Бланк Я. П. 5119
Блехман И. И. 4788
Боголюбов Н. Н. 4888 К
Боев Г. П. 4515
Болотин В. В. 4875
Болтянский В. Г. 4677, 5070 К
Бондаренко Б. А. 5171
Брагинский С. И. 4823
Бредихин Б. М. 4566
Бугулов Е. А. 4588
Булешев У. Б. 4834

В

Вайнштейн И. А. 5195
Вармус М. 5186
Введенская Н. Д. 4865 Д
Вертгейм Б. А. 5164
Волков И. И. 4945 Д
Волковыский Л. И. 4757
Вулих Б. З. 4979

Г

Гайдук Ю. М. 4524
Гасанов А. Д. 4721
Гахов Ф. Д. 4892
Георгиев Г. И. 4671
Глаголев А. А. 5089
Глаголев Н. С. 4537
Гнеденко Б. В. 4512
Головина Л. И. 5071 К
Гольдина Н. П. 4634
Грабарь М. И. 4867
Гринфельд У. К. 4782
Губарь Н. А. 4786

Д

Давыдов Н. А. 4935
Далецкий Ю. Л. 4969
Демидович Б. П. 4810
Джваршейшвили А. Г. 4708
Джемс-Леви Г. Е. 5193, 5194
Джрбашян М. М. 4723
Добрушин Р. Л. 4997
Драпкин А. Б. 4847
Дун Гуан-чан 4562
Дундученко Л. О. 4732

Е

Евграфов М. А. 4736
Евклид 5077 К, 5078 К, 5079 К, 5080 К, 5081 К
Егоров И. П. 5138
Еругин Н. П. 4783

З

Зерагия П. К. 4854
Зморович В. А. 4737, 4908, 4927
Зубов В. И. 4804, 4818
Зуев И. В. 5132

И

Иванов Н. А. 4976
Ивата 5068
Игнатьев М. А. 4889 Д
Иноуэ 4815

Й

Йосида 4816

К

Калицин Г. С. 4620
Каменский Г. А. 4781
Капица С. П. 5245
Карпелевич Ф. И. 4643 Д
Карцивадзе И. Н. 4891
Кац И. С. 4829 Д
Келдыш М. В. 5250
Киро С. Н. 4532
Китов А. И. 5252
Клетеник Д. В. 5073 К
Климов А. И. 4579
Клиот-Дашинский М. И. 4846
Коба В. І. 5091
Кованцов Н. И. 5122, 5124
Кованько А. С. 4710
Кольман Э. Я. 4517
Кордонский Х. Б. 5040
Корнфельд М. 5046
Коровин В. И. 5120
Коровкин П. П. 4597 К
Кошелев А. И. 4840
Крапинский А. И. 5257
Красовский Н. Н. 4813
Крастиньш А. Ф. 5184
Крейн С. Г. 4969
Крейнес М. А. 5195
Круковский Б. В. 4909
Купцов Н. П. 4937
Курита 5069, 5133
Курош А. Г. 4540, 4599 К
Кутузов Б. В 5096 К

Л

Лапин А. И. 4764
Лебедев В. И. 4856
Левитан Б. 4800
Лелек А. 4672
Линник Ю. В. 4535
Липатова Д. Л. 5193
Лихтенбаум Л. М. 4668
Ли Чжи-чан 5187
Ли Юэ-шэн 4819
Лу Цзинь-янь 4590
Любовин В. Д. 4977
Люмис Л. 4989 К
Люстерник Л. А. 5243
Люстиг А. М. 4906
Лянце В. Э. 4853
Ляпунов А. А. 5223, 5250, 5252

М

Мальцев А. И. 4638
Мамедов (Хайями) К. М. 4859
Мамедов Я. Д. 4831 Д
Маслов В. П. 4968
Масуда 4645
Маркушевич А. И. 4535, 4536
Мацумото 5136
Меньшов Д. Е. 4701
Микеладзе Ш. Е. 5166
Минь Сы-хао 4563
Митропольский Ю. А. 4888К
Михайлов Г. К. 4523
Мищенко Е. Ф. 4533
Мозговая Л. И. 5092, 5093
Мори 4657
Мышкис А. Д. 4782

Н

Нагата 4651, 4652
Накамура 4679, 4938
Никольский С. М. 4691
Ниномия 4845
Новак И. 4494
Норден А. П. 4526
Норкин С. Б. 4801
Носиро 4926 К

О

Огай С. В. 4589, 4605
Огиевецкий И. Е. 4943
Озолс В. 5014

П

Пань Юн-цзянь 5154
Пеньков О. М. 4541
Перчинкова-В'чкова Даница 4771
Петропавловская Р. В. 4640
Плисс В. А. 4803
Погожельский В. 4851
Полетаев 5252
Поляков А. Н. 5054
Понтрягин Л. С. 4533
Попов В. В. 4830 Д
Посвянский А. Д. 5084
Постников А. Г. 4556
Потапов М. К. 4696
Пугачев Б. П. 5181
Пятецкий-Шапиро И.И. 4762

Р

Рабинович И. М. 4539
Раманатхан 4560
Рашевский П. К. 5074 К, 5134
Реймерс Э. 4933
Роднянский А. М. 4692
Розенфельд Б. А. 4527
Романовский В. И. 5039
Рыбкин Г. Ф. 4514

С

Сакагути 4734
Самарский А. А. 4534
Саргсян И. 4800
Сато 4921 К
Свешников А. Г. 4534, 4883
Свирский И. В. 4872, 4873
Семянистый В. И. 5128
Сенютович В. А. 5056
Симонов Н. И. 4521
Синдаловский Г. Х. 4687
Сифоров В. И. 5035
Скороход А. В. 5007 Д
Слободецкий Л. Н. 4855
Слугин С. Н. 5165
Смирнов В. И. 4520, 4530
Смирнов С. В. 4519
Смогоржевский А. С. 5100
Соминский И. С. 4598 К
Станојевић Ч. В. 4995
Суворов Г. Д. 4727, 4766
Суворов И. Ф. 4916 К
Сюй Сяо-бай 4735

Т

Таками 4922К
Тамадян А. П. 4723
Тан Тянь-дун 4576
Темко К. В. 4703
Терасава 4925 К
Тиман А. Ф. 4695
Тиман М. Ф. 4709
Тихов М. Н. 4871
Тонков Л. В. 5167
Тонян В. А. 4722
Тояма 4923 К
Трохимчук Ю. Ю. 4767
Туманян С. Х. 5013
Тумаркин Г. Ц. 4745
Туран 4914
Тучинский Л. И. 4695

У

Ульянов П. Л. 4704
Успенский В. А. 4549
У Чжо-цюнь 4789, 4790

Ф

Фаддеев Д. К. 4598 К
Фаддеев Л. Д. 4839
Филин А. П. 5172
Фиш М. 4992
Фрид И. А. 4814
Фудзиока 4924 К

Х

Халилов З. И. 4858
Харазов Д. Ф. 4843
Хинчин А. Я. 5032
Хованский А. Н. 4522
Хомма 4817
Хуа Ло-гэн 4603
Хуан Вань-ли 5022
Ху Хай-чжан 4874

Ц

Цзэн Чжао-ань 5059
Цыганова Н. Я. 4548 Д

Ч

Чан Чан-хун 4832Д
Чапанов Х. 5183
Чеботарев Г. Н. 4775
Черейская В. И. 4700
Черский Ю. И. 4892
Чжан Цзин-чжун 4910
Чуб А. Т. 5085
Чэнь Цзянь-гун 4725

Ш

Шао Пин-цун 4601
Шафаревич Р. С. 5097
Шиханович Ю. А. 4555
Шуликовский В. И. 4870
Шура-Бура М. Р. 5250

Ю

Юшкевич А. П. 4514

Я

Яблонский С. В. 5252
Яглом И. М. 5071 К
Якубович В. А. 4812
Янага 4636
Яненко Н. Н. 5137
Яновская С. А. 4513, 4536
Яновский А. Д. 4902
Ян-Сюн 4613

A

Abe S. 5140
Abramowitz M. 5200, 5203
Adams J. K. 5025 К
Albrycht J. 4957
Alexander S. N. 5222
Aljančić S. 4697
Allamigeon A.-C. 5135
Allen A. C. 4864 Д
Almeida Costa A. 4655, 4660
Altman M. 4959
D'Amelio C. 5255
Arnese G. 5102
Ashour A. A. 4881
Atkinson F. V. 4793

B

Bader R. 4770 Д
Bagemihl F. 4739
Bailey N. T. J. 5033
Baily W. L., Jr 5153 Д
Balázs N. L. 5083
Balcerzyk S. 4635
Bartle R. G. 4983
Bartlett M. S. 4991
Bartlett S. 5012
Bateman P. T. 4559
Beechler B. J. 4662 Д
Beesack P. R. 4798
Bělař A. 5212К
Belevitch V. 5036
Belgodère P. 4496, 4497
Bennett B. J. 5264
Benson F. 5047
Berger M. 5151 Д
Berriman A. E. 4516
Bertolini F. 4844
Bielecki A. 4780
Bilinski S. 5113
Bilo J. 5105
Bing R. H. 4664
Birkhoff G. 4879
Blachman N. M. 5228, 5248
Black G. 5216
Blackwell D. 4993
Blake R. F. 5221
Blanc C. 5169
Blanch G. 5200
Blank A. A. 5008
Blaschke W. 5163 К
Blumenthal L. M. 4903
Bodenstedt E. 5242
Bodewig E. 4614, 4623 К
Bognár Z. 4713
Bojanić R. 4697, 4951
Bonfiglioli L. 5192
Bonn M. 5061
Bonsall F. F. 4748
Borsuk K. 4676
Bottema O. 4607, 4608
Bouckaert L. 5190
Boulanger G. R. 5253
Braier A. 4500
Brauer R. 4571
Brauner H. 5112
Bremermann H. J. 4760
Burger E. 5029

C

Cahen M. 5082
Campbell R. 4941, 4942
Cannon E. W. 5232
Carathéodory C. 4507 К, 4863К
Carlitz L. 4580, 4581, 4582, 4583
Cartwright M. L. 4796
Cattaneo C. 4866
Černý V. 5230
Cesari L. 4897
Chamfy C. 4718
Chaplin G. B. B. 5229
Chapman D. G. 5049
Chapron R. 4587
Chen Yung-Ming 4698
Chojnacka-PniewskaM.M. 4584
Choquet G. 4980, 4981, 4982
Christov C. J. 4646
Chu J. T. 5018
Claus H. J. 4654
Climescu A. 4907
Coddington E. A. 4799
Cohn H. 4756
Cohn-Vossen S. 5075К
Collatz L. 5170
Collingwood E. F. 4728
Collins W. D. 4880
Colombo S. 4905
Copeland A. H., Jr 4681
Corduneanu C. 4785
Costa de Beauregard O. 4885
Courant R. 4547 К
Cugiani M. 4558
Čulík K. 4602

D

Dalcher A. 5023
Darmois G. 5006 К
Davenport H. 4574
David F. N. 4999
David H. A. 5021
Davids N. 5207
Dean P. 4904
Debreu G. 5028
Delachet A. 4600 К
Demaria D. C. 5117
De Munter P. 5009
Denis-Papin M. 4622
Denjoy A. 4717
Deskins W. E. 4625, 4648
Diliberto S. P. 4805, 4811
Dolbeault P. 5152 Д
Douglas J., Jr 5175
Douglis A. 4848
Drobot S. 4528
Dugué D. 4751
Dungen F. van den 4820, 5177
Durbin J. 5048

E

Eckmann B. 4682
Edge W. L. 4629
Eilenberg S. 4649
El-Badry M. A. 5045
Eldredge K. R. 5264
El Makarem H. H. A. 4931, 4932
Eltermann H. 5182
Erdös P. 4559, 4568
Ericksen J. L. 4876, 4878
Esten R. D. 5263
Estève M. 4498, 4499

F

Facciotti G. 5066
Faedo S. 4899
Faivre W. 5065
Falgas M. 4759
Farahat H. K. 4610, 4627
Fejes Tóth L. 5159
Fell J. M. G. 4685
Felstein M. 5098
Fieber H. 4868
Fisher R. A. 5011
Fisz M. 4992
Flemming D. P. 5189
Flett T. M. 4743
Flohn H. 5191
Florian A. 5162
Floyd E. E. 4675
Foiaş C. 4963
Fourès Y. 4966
Fox J. 4827 К
Freimer M. 4901
Friedman B. 4802, 5198 К
Friedrichs K. O. 4808
Frühauf H. 5038
Fuchs L. 4632

G

Gagliardo E. 4849
Garcia Pradillo J. 4505
García Rúa J. 4502
Garnier R. 4779
Gattegno C. 4504
Geddes A. 4653
Geidel H. 5052
Gergely E. 5094
Germain P. 4860
Gheorghiu N. 4792
Giger H. 5161
Gihman I. I. 5001
Gillespie R. P. 4693 К, 4917 К
Girault M. 5006 К
Girerd J. 5241
Gładysz S. 4986, 4987
Glantz H. 5168
Godeaux L. 5114
Gołąb S. 5076 К
Gonçalves J. V. 4577
Goormaghtigh R. 5062
Gosselin R. P. 4940
Goursat E. 4920 К
Grauert H. 4765
Greenberg B. G. 5015
Gregory R. H. 5249, 5265
Griffin E. L., Jr 4973
Grove E. L. 4596 К
Grünbaum B. 4670
Grzegorczyk A. 4552
Gunning R. C. 4763

H

Haldane J. B. S. 5042
Hall G. O. 5231
Hallwright H. W. 4594
Haupt O. 4688
Havlíček K. 5090 К
Hayashi K. 4776
Hayman W. K. 4753
Healy M. J. R. 5011, 5044
Heggs P. 5238
Hercigonja M. 4525
Herlestam T. 4777
Herme A. 5057
Herstein I. N. 4658
Hilbert D. 5075 К
Hillman A. 5202, 5205, 5206
Hirokawa H. 4939
Hlavatý V. 5142
Hlavička A. 5212 К
Hodges J. H. 4582
Hofmann J. E. 4900
Holtsmark J. 4869
Hontoy P. 4820
Hosszú M. 4911
Householder A. S. 5233
Hruša K. 5212 К
Hukuhara M. 4612
Hull T. E. 4930
Hunt P. M. 5214, 5215
Huron R. 5020
Hutchinson G. W. 5247

I

Ikeda M. 4649

J

Jacobi C. G. J. 4595 К
Jacobs K. 4985
Jaffard P. 4637, 4663 Д
James R. D. 4705
Janssens P. 4820
Jeffery R. L. 4711 К
Jeffrey A. 4953
Jenkins J. A. 4750
Jenne W. 5173
Jennings S. A. 4656
Johansen L. 5030
Johnson R. B. 5261 П
Jones P. S. 4545
Julia G. 4544, 4768 К
Jurgens H. A. 5261 П
Jurkat W. 4951

K

Kahane J.-P. 4706, 4707
Kamke E. 4694 К
Kan D. M. 4680
Kanngiesser W. 4998
Kaplan A. 5258
Karrass A. 4633
Kasch F. 4561
Kaufmann A. 4622

Kautz W. H. 5219
Kawakami Y. 4747
Kawata T. 4950
Kazarinoff N. D. 4948
Keil K.-A. 4784
Keiser B. E. 4953
Kimball B. F. 5017
Kinukawa M. 4702
Kirscht H. 4593
Kitchens C. W. 5218
Klee V. L., Jr 4673, 4903
Klein M. L. 5037
Kobayashi Shigehiro 4772
Kobayashi Shoshichi 5143
Kodaira K. 5149
Kodis R. D. 4882
Kokoris L. A. 4659
Kotzig A. 4667
Kounovský J. 5099 К
Koutský K. 4669
Kowalsky H.-J. 4661
Krafft M. 5004
Kreisel G. 4554
Kubie E. C. 5244
Kunz J. 5196 К
Kurepa S. 4970

L

Laderman J. 5210
Langdon L. R. 5188
Lanza L. 5211 К
Lardeux D. 4497
Latta G. E. 4890
Laugwitz D. 4955
Lefschetz S. 4828 К
Legrand G. 5146
Lehrer Y. 4774
Lehto O. 4738
Leighton W. 4894
Lelek A. 4672
Le Lionnais F. 4529
Lelong-Ferrand J. 4729
Leuenberger F. 5050
Levenson A. 5207
Leżański T. 4962
Lichnerowicz A. 5150 К
Lindstrom E. 5234
Linek A. 5236
Lions J. L. 4837, 4861
Littlewood D. E. 4626
Littlewood J. M. 4509 К
Löbell F. 5144
Loewner C. 4621, 4835
Łojasiewicz S. 4824
Longo C. 5127
Loos H. R. 5237
Lothe J. 4869
Lowan A. N. 5200, 5206, 5207, 5210
Luke Y. L. 5235
Lustig G. 4565

M

McCarthy I. E. 4893
McKenzie R. E. 4644
MacLane G. R. 4724
Madar J. 5212 К
Madwed A. 4913
Maillot F. 4609
Mangelsdorf T. A., Jr 5265
Mangeron D. 4500
Mano T. 5000
Marcus M. D. 4805, 4806, 4807
Martin A. D. 4894, 4895
Martinelli E. 5072 К, 5145
Mašek V. 5103
Masotti A. 4508 К
Massera J. L. 5088
Masotti Biggiogero G. 5101
Masuyama M. 5051
Matsumoto T. 5141
Matsushita S. 4984
Matulionis J. 4918 К, 4919 К
Merian P. 4510 К
Mikołajska Z. 4778
Miller G. F. 5179
Milloux H. 4769 К
Milnor J. 4666
Minakshisundaram S. 4618
Minorsky N. 4787, 4821
Mirsky L. 4610, 4615
Mishoe L. I. 4802
Mitrinovitch D. S. 4825
Mitrović D. 4714
Mlak W. 4958
Moneagle O. F. 5261 П
Montalto E. 4712
Montgomery D. 4674
Morgan H. C. 5037
Morinaga K. 4617
Morrin T. H. 5264
Morris G. R. 4791
Morse P. M. 5031
Munthe Hjortnaes M. 4928
Mushelisvili N. I. 4887 К
Mycielski J. 4635
Myller A. 5111

N

Nakai Y. 5109
Nakamura M. 4971
Nakayama T. 4630, 4649
Narayana T. V. 5003
Naumann H. 5155
Neculce M. 5087
Nevanlinna F. 4967
Nicolesco M. 4838
Nieminen T. 4967
Nöbauer W. 4578
Noe J. D. 5264
Nôno T. 4617
Novák C. 5236

O

Obreschkoff N. 4606
Oeconomou G. 4572
Ogasawara T. 4964
Otto E. 5197 К

P

Paasche I. 5064
Padmia N. 5129
Pantazi A. 5126 К
Parameswaran S. 4585
Pascual Ibarra J. R. 4503
Pauc C. Y. 4688
Pavliček J. B. 5095 К
Pelnař J. 5237
Perfect H. 4611
Perna A. 4543
Peschl E. 4761
Petiau G. 4905
Petković V. 5185
Peyerimhoff A. 4951
Pfanzagl J. 5041
Pinl M. 5053
Piranian G. 4744
Pirko Z. 5212 К
Plunkett R. L. 4726
Pogorzelski W. 4822, 4850, 4852
Pohl R. W. 4547 К
Pontreaghin L. S. 4684 К
Popova H. 4641
Poti S. J. 5019
Pozzolo Ferraris G. 5060
Presenza I. 5058
Pták V. 4956

Q

Queysanne N. 4600 К
Quine W. V. 4550

R

Rahman Q. I. 4719
Rajagopal C. T. 4944
Rall L. B. 5178
Ramanathan G. 4557, 4560
Ramos e Costa 5118
Rankin R. A. 4564
Raymond F.-H 5239
Reissig R. 4795
Reissner E. 5168
Rembs E. 5160
Remmert R. 4765
Reuter G. E. H. 4954
Reynolds A. C., Jr 5260
Rham G. de 5110
Riney T. D. 4947
Romberg W. 4869
Rose M. E. 5176
Rosenberg A. 4650
Roy S. N. 5016
Rudin W. 4699, 4744

S

Salem R. 4706, 4707
Salinas B. R. 4912
Salzer H. E. 5201, 5205, 5208
Samelson H. 4674
Sanden H. von 4826 К
Sandor S. 4797
Sands A. D. 4616
Santoro P. 4794
Sarhan A. E. 5015. 5016
Satterly J. 5063
Saxer W. 5002
Schubert H. 4665
Schwarz B. 4798
Segal I. E. 4966
Seidel W. 4739
Semple J. G. 5157
Sen P. 4862
Seng Y. P. 5034
Serre J.-P. 4683, 5147, 5148
Setterwall M. 5246
Shah G. T. 4716
Shapiro H. N. 4569
Sharma A. 4946
Shekel I. 4619
Sherman I. 5202
Shiga K. 4974
Silverman R. J. 4978
Singh K. D. 5139
Singh S. K. 4749
Singh V. 4929
Skolem T. 4575
Słowikowski W. 4961
Słupecki J. 4551
Šoler K. 5212 К
Solitar D. 4633
Sõrmus T. 4934
Špaček A. 4996
Špaček M. 5212 К
Sprague R. E. 5254
Spring O. W. 5043
Srivastava H. M. 4946
Stampacchia G. 4836, 4896
Steiger F. 4592
Steiner A. 4764
Steinhaus H. 4715
Stipanić E. 4546
Stöhr A. 4754
Sunouchi G. 4742, 4936
Švec A. 5130, 5131
Svoboda A. 5220, 5225
Swift G. 4686
Szabó A. 4591
Szász O. 4915 К
Szele T. 4631
Sz.-Nagy B. 4988

T

Taam Choy-tak 4809
Takeno H. 5140
Tallini G. 5086
Tanaka C. 4720, 4740
Tanaka M. 4567
Targonszky G. 4713
Tarnawski E. 4689, 4690
Teicher H. 4994
Teichroew D. 5024
Thiele H. 4553
Thierrin G. 4642 Д
Thonet R. 5104
Thron W. I. 4929
Thullen P. 4990
Tietz H. 4758
Țițeica G. 5125 К
Tjøtta S. 4869
Tomić M. 4697
Toupin R. A. 4876
Tricomi F. G. 4833
Tsuji M. 4733, 4752
Tucker A. W. 5027
Turumaru T. 4971

U

Umegaki H. 4965, 4972

V

Vachin C. 5055
Valach M. 5224
Valouch M. 5212 К
Van der Pol B. 4755
Vandiver H. S. 4573
Versois P. 5251
Vijayaraghavan T. 4944
Vincensini P. 5115, 5116
Viola T. 4501
Vodička V. 4877
Vogel W. 5026
Votruba V. 4646
Vyčichlo F. 5099 К

W

Wagner A. 5156
Wallace A. H. 5158
Warmus M. 5186
Wegstein J. H. 5222
Weil A. 5106, 5107, 5108
Weinberger H. F. 5174
Weisner L. 4949
Whaples G. 4644
Whitby O. W. 5264
Wielandt H. 5180
Wilkes M. V. 5217, 5259
Williams F. K. 5037
Wunderlich W. 5067

Y

Yamanoshita T. 4678
Yoshii T. 4647
Young L. C. 4898

Z

Zabel N. R. 4624 Д
Zamansky M. 4604
Zappa G. 4628
Zawadowski W. 4961
Zelinka R. 4506 К
Zelinsky D. 4650
Zeuli T. 4884
Zítek F. 5010
Zucker R. 5208
Zygmund A. 4741, 4952

中村芳彦 4938
中村得之 4679
井上隆一 4815
伍卓羣 4789, 4790
能代清 4926 К
左藤常三 4921
吉田耕作 4816
坂口果一 4734
增田勝彦 4645
宮信幸 4845
寺澤寬一 4925 К
岩田至康 5068
張景中 4910
彌永昌吉 4636
徐小伯 4735
本間榮一郎 4817
李岳生 4819
李志昌 5187
杜瀾 4914
松本誠 5136
栗田稔 5069, 5133
曾昭安 5059
森光彌 4657
楊雄 4613
永田雅宜 4651, 4652
湯天棟 4576
潘永鑑 5154
胡海昌 4874
董光昌 4562
藤岡茂 4924
赤攝也 5123
遠山啓 4923 К
邵品琮 4601
関嗣鶴 4563
陳建功 4725
陸觀彦 4590
高見清 4922 К
黃萬里 5022

Технический редактор *Р. М. Денисова*